Brückenkurs Physik
donat.adams@fhnw.ch
www.adams-science.org

Serie 140, Musterlösung

Brückenkurs Physik — Datum: 10. September 2018

1. Hubarbeit (Nr. 5) **6WTDMB**

Ein Fass von 200 kg wird eine Rampe hinaufgerollt. Welche Arbeit muss bei einer Höhendifferenz von 1.5 m verrichtet werden. Benutzen Sie

$$W = \vec{s} \odot \vec{F}$$

(a) Länge der Rampe 2.5 m

(b) Länge der Rampe 5 m

(c) Rampe mit beliebiger Steigung

Lösung:

(a) $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$, $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix}$

$$W = \vec{s} \odot \vec{F} = -m \cdot g \cdot 1.5 = -2943 \text{ J}$$

(b)

$$W = \vec{s} \odot \vec{F} = -m \cdot g \cdot 1.5 = -2943 \text{ J}$$

(c) Bei der Berechnung des Skalarprodukts gibt es keinen Beitrag aus den y-Komponenten. Wir sehen, dass die Länge der Rampe keine Rolle spielt bei der verrichteten Arbeit.

2. Spannarbeit (Nr. 8) **7SXG8S**

Eine Feder wird mit 10 N um 15 cm gedehnt.

(a) Wie gross ist die Arbeit um die Feder aus dem Ruhestand auf 5 cm zu dehnen?

(b) Wie gross ist die Arbeit um die Feder von 5 cm auf 10 cm auszuziehen?

(c) Wie gross ist die Arbeit um die Feder aus dem Ruhestand auf 15 cm zu dehnen?

Lösung:

Aus den Angaben berechnen wir die Federkonstante

$$D = \frac{F}{s} = \frac{10\,\text{N}}{0.15\,\text{m}} = 66.6667$$

Die Energie, die einer Feder maximal entzogen werden kann, ist

$$W(s) = \frac{D}{2} s^2 \,,$$

wobei D die Federkonstante ist und x die Strecke, um die die Feder gespannt wurde. Die Spannarbeit ist

$$W = W(s_2) - W(s_1)$$

wobei s_2 die Ausdehnung am Ende des Vorgangs ist und s_1 die Ausdehnung am Anfang.

(a) $W = W(0.05\,\mathrm{m}) - W(0) = 0.0833\ J$

(b) $W = W(0.10\,\mathrm{m}) - W(0.05\,rmm) = 0.25\ J$

(c) $W = W(0.15\,\mathrm{m}) - W(0) = 0.75\ J$

3. Zylindrischer Tank (Nr. 11) SFS2H7

Ein zylindrischer Tank mit $A = 6\,\mathrm{m}^2$ Grundfläche wird bis zur Höhe von $h = 3\,\mathrm{m}$ mit Wasser gefüllt. Welche Arbeit muss die Pumpe verrichten.

(a) Die Pumpe befördert das Wasser über ein Steigrohr (Höhe $h_1 = 4.0\,\mathrm{m}$) oben in den Tank.

(b) Die Pumpe drückt das Wasser unten in den Behälter.

Lösung:
Das Volumen des Wassers ist $A \cdot h = 3 \cdot 6\,\mathrm{m}^3 = 18\,\mathrm{m}^3$ und die Masse $m = V \cdot \rho = 18 \cdot 1000\,\mathrm{kg} = 18\,000\,\mathrm{kg}$.

(a) Hier wird jeder Tropfen einmal auf 4 m angehoben, deshalb gilt

$$W = m \cdot g \cdot h_1 = 18\,000 \cdot 9.81 \cdot 4 = 706\,320\,\mathrm{J}$$

(b) Hier werden nur die Tropfen der Oberfläche auf 3 m angehoben, die Tropfen am Boden des Gefässes werden gar nicht angehoben. Die Mischrechnung kann so aussehen: Wir wählen als Ursprung des Koordinatensystems den Boden des Beckens. Dann ist vor dem Pumpen $E_{\mathrm{pot},1} = 0$ und nach dem Pumpen

$$E_{\mathrm{pot},2} = \underbrace{\overline{h}}_{=1.5\,\mathrm{m}} \cdot m \cdot g = 264\,870\ J$$

wobei $\overline{h}$ die Höhe des Schwerpunktes des Wassers nach dem Pumpen ist.

4. Pumpwerk (Nr. 13) LCX63B

Das Pumpwerk Arolla ist mit einer Speicherpumpe ausgestattet, welche 4.2 m^3/s fördert. Die Förderhöhe beträgt 312 m. Wie viele Sekunden muss sie in Betrieb sein, um die Energiemenge von 1000 kWh speichern zu können?

Lösung:

Um die Leistung zu berechnen starten wir mit dem Ausdruck für potenzielle Energie

$$E = m \cdot g \cdot h$$

indem wir auf beiden Seiten durch die Zeit t teilen erhalten wir eine Leistung:

$$P = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} = \frac{m}{t} \cdot g \cdot h = \underbrace{4.2 \cdot 1000}_{\frac{m}{t} = \frac{V}{t} \cdot \rho} \cdot 9.81 \cdot 312 = 12.855\,\mathrm{MW}$$

Wir rechnen die Energiemenge in SI-Einheiten um

$$E = 1000 \underbrace{\mathrm{kWh}}_{1000 \cdot W \cdot 3600\,\mathrm{s}} = 3.6 \cdot 10^3\ \mathrm{MJ}$$

Aus $P = E/t$ erhalten wir

$$t = \frac{E}{P} = 280\ \ s \approx 4.7\ \mathrm{min}$$

5. Weltrekord im Stabhochsprung (Nr. 18) **22EYXC**

Der Weltrekord im Stabhochsprung wurde am 15.2.2014 (2018 noch aktuell) von Renaud Lavillenie mit 6.16 m aufgestellt. Die Geschwindigkeit vor dem Absprung ist maximal 10 m/s.

(a) Welche Höhe kann nach dem Energieerhaltungssatz erreicht werden?

(b) Welche Energieformen sind beim Stabhochsprung beteiligt (Anlauf/Absprung/Überquerung der Latte)?

(c) Welche Einflüsse erlauben eine höhere Überquerung der Latte?

Lösung:

(a) Durch den Stab wird kinetische Energie in potenzielle Energie umgewandelt

$$\underbrace{m \cdot g \cdot h}_{E_{\text{pot}}} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}_{E_{\text{kin}}}$$

Wir lösen nach h auf und finden, die maximale Höhe:

$$h_{\max} = \frac{v^2}{2 \cdot g} = 5.09\,\mathrm{m}$$

(b) Beim Anlauf/Absprung hat die Springerin kinetische Energie, diese wird während dem Sprung in potenzielle Energie umgewandelt.

(c) Beim Absprung spring die Springerin in die Höhe. Dadurch wird erreicht sie bereits eine gewisse Höhe, bevor der Stab sie noch höher trägt.

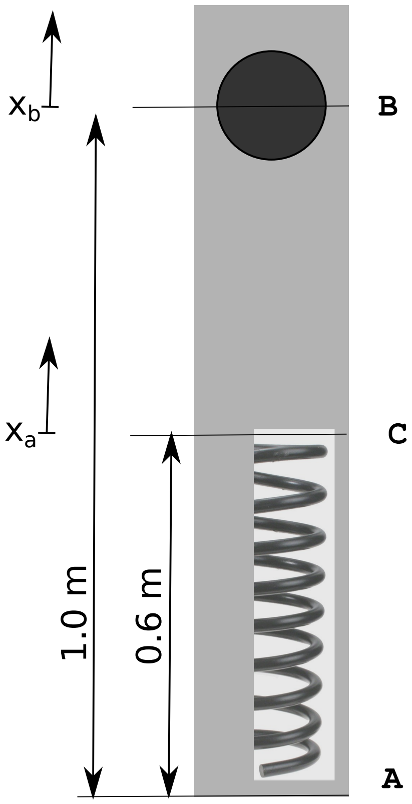
6. Energieerhaltung Feder-Kugel (Nr. 26) **L0QE2K**

In einer senkrecht stehenden Röhre befindet sich eine Feder . Die Federkonstante ist $D = 0.1$ N/cm. Eine Kugel der Masse $m = 50$ g fällt senkrecht auf in der Röhre. Bei B hat sie eine Geschwindigkeit von $v_B = 2.0$ m/s. Die Röhre dient nur zur Führung. Kugel und Feder bewegen sich reibungsfrei und ohne Luftwiderstand. Die Masse der Feder wird vernachlässigt.

(a) Welche kürzeste Länge AQ erreicht die Feder?

(b) Welche Höhe kann die Kugel höchstens erreichen, wenn sie von der Feder zurückgeschleudert wird?

(c) Auf welcher Höhe ist die Geschwindigkeit der Kugel maximal?



Lösung:

Wir verwenden hier, dass der Ursprung des Koordinatensystems frei gewählt werden kann. Die Wahl verändert die physikalischen Resultate nicht. Durch eine geschickte Wahl des Koordinatensystems kann die Rechnung vereinfacht werde. Merke: Sobald die elastische Energie (E_{elast}) nicht null ist, sollte der Ursprung des Koordinatensystems so gewählt werden, dass bei $x = 0$ auch $E_{\text{elast}} = 0$. Hier ist das eingezeichnet mit x_c

(a) Wir bezeichnen den Zustand am Anfang (Kugel bei B) mit dem Index 1 und den Zustand mit maximaler Kompression der Feder mit Index 2. Die Energieerhaltung gilt und die möglichen Energien sind

$$E_{\text{kin},1} + E_{\text{pot},1} + E_{\text{elast},1} = E_{\text{kin},2} + E_{\text{pot},2} + E_{\text{elast},2} \ .$$

Bei 1 ist aber die Feder nicht komprimiert $E_{\text{elast},1} = 0$, und bei 2 steht die Kugel still $E_{\text{kin},2} = 0$, es bleibt also

$$E_{\text{kin},1} + E_{\text{pot},1} = E_{\text{pot},2} + E_{\text{elast},2} \ .$$

Wir haben Beiträge der elastische Energie, also wählen wir das Koordinatensystem x_c. In diesem Koodinatensystem ist $x(0) = x_0 = 1.0 - 0.6$ und

$$\underbrace{\frac{1}{2}(v_0)^2 \cdot m + m \cdot g \cdot x_0}_{=E_0} = m \cdot g \cdot x + \frac{1}{2}x^2 \cdot D$$

Den Beitrag links können wir berechnen $E_0 = 0.2962$ J und lösen nach x auf:

$$\frac{1}{2}x^2 \cdot D + m \cdot g \cdot x - E_0 = 0 \ \Rightarrow \ x_{1,2} = \frac{-m \cdot g \pm \sqrt{(m \cdot g)^2 + \frac{4}{2}\,D \cdot E_0}}{\frac{2}{2}D}$$

mit den Lösungen $x_{1,2} = -0.3\,; 0.2$ m. Die zweite Lösung ist physikalisch nicht sinnvoll, da die Feder ausgezogen wäre.

(b) In der Aufgabe wird ohne Verluste gerechnet. In diesem Fall wird die Kugel auf die Feder fallen und spickt dann wieder hoch. Die Geschwindigkeit bei B wird v_B sein, aber in die andere Richtung zeigen, nämlich nach oben. Wir sagen, die Geschwindigkeit wird an der Feder reflektiert.
Wir bezeichnen den Zustand am Anfang (Kugel bei B) mit dem Index 1 und den Zustand mit maximaler Höhe mit Index 2. Die Energieerhaltung gilt und die möglichen Energien sind

$$E_{\text{kin},1} + E_{\text{pot},1} + E_{\text{elast},1} = E_{\text{kin},2} + E_{\text{pot},2} + E_{\text{elast},2} \ .$$

Bei 1 ist die Feder nicht komprimiert $E_{\text{elast},1} = 0$, und bei 2 ist die Feder nicht komprimiert $E_{\text{elast},2} = 0$ und die Kugel steht still $E_{\text{kin},2} = 0$, es bleibt also

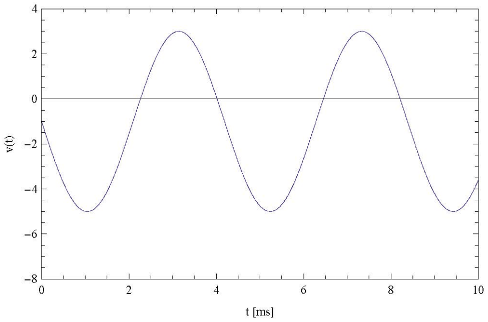
$$E_{\text{kin},1} + E_{\text{pot},1} = E_{\text{pot},2} \ .$$

Es kommen keine elastischen Energien vor, also sind wir frei bei der Wahl des Koordinatensystems. Wenn wir x_a wählen, erhalten wir sogar $E_{\text{pot},1} = 0$ und die Rechnung wird noch einfacher.

$$\frac{1}{2}(v_0)^2 \cdot m = m \cdot g \cdot x$$

Wir lösen nach x auf und erhalten $x = \frac{\frac{1}{2}(v_0)^2 \cdot m}{m \cdot g} = \frac{(v_0)^2}{2g} = 0.20$ m.

(c) Zuerst suchen wir ein Kriterium für die maximale Geschwindigkeit. Wir betrachten zuerst ein Skizze der Geschwindigkeit:



Die Kugel fällt, d.h. die Geschwindigkeit ist negativ und nimmt im Fall (betragsmässig) zu. Sie erreicht ein Maximum, bevor sie durch die Feder gebremst und nach oben beschleunigt wird. Wir beobachten: Bei den (betragsmässig) höchsten Geschwindigkeiten, verändert sich die Geschwindigkeit für einen Moment nicht, mathematisch ausgedrückt:

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

d.h. die Änderung der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit verschwindet.
Anderseits besagt das 2. Axiom von Newton

$$m \cdot \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{=a} = F \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \;,$$

Damit finden wir das Kriterium, nämlich

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = 0 \;\Rightarrow\; F = 0 \;,$$

oder in Worten: Die Geschwindigkeit ist maximal, falls die Kräfte sich aufheben. Die Feder wird ausgelenkt, also wählen wir Koordinatensystem x_c. Die Kräfte sind dann

$$F_g + F_D \;\Rightarrow\; -m \cdot g - x \cdot D = 0$$

also

$$x_m = -\frac{m \cdot g}{D} = -0.04905\,\mathrm{m} \;.$$

Die Geschwindigkeit erhalten wir, wenn wir die Gesamtenergie aufschreiben. Wir bezeichnen den Zustand am Anfang (Kugel bei B) mit dem Index 1 und den Zustand mit maximaler Geschwindigkeit mit Index 2. Die Energieerhaltung gilt und die möglichen Energien sind

$$E_{\text{kin},1} + E_{\text{pot},1} + E_{\text{elast},1} = E_{\text{kin},2} + E_{\text{pot},2} + E_{\text{elast},2} \;.$$

Bei 1 ist die Feder nicht komprimiert $E_{\text{elast},1} = 0$.

$$\underbrace{\frac{1}{2}(v_0)^2 \cdot m + m \cdot g \cdot x_0}_{=E_0} = \frac{1}{2}(v_m)^2 \cdot m + m \cdot g \cdot x_m + \frac{1}{2}(x_m)^2 \cdot D$$

und aufgelöst nach der gesuchten Variablen

$$v_m = \pm\sqrt{\frac{E_0 - \frac{1}{2}(x_m)^2 \cdot D - m \cdot g \cdot x_m}{1/2 \cdot m}} = \pm 3.5\,\mathrm{m/s}$$

d.h. beim Fallen und beim heraufspicken wird an diesem Punkt die selbe Geschwindigkeit erreicht, nur das Vorzeichen ändert sich.

7. PW bremsen (Nr. 27) **UZM66B**

Ein PW von 1450 kg bremst auf einer Strecke von 75 m von 120 km/h auf 60 km/h ab.

(a) Wie viel kinetische Energie werden umgewandelt? Geben Sie die Energie auch in Prozent der ursprünglichen kinetischen Energie an.

(b) Wie gross ist die Bremskraft?

(c) Wie gross ist die verrichtete Arbeit der Bremskraft?

Lösung:

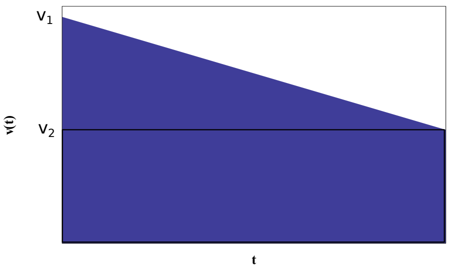
(a) Die kinetische Energie ändert sich um

$$W = E_{\mathrm{kin},2} - E_{\mathrm{kin},1} = \frac{1}{2}m(v_2)^2 - \frac{1}{2}m(v_1)^2 = \frac{1}{2}m\left[(v_2)^2 - (v_1)^2\right]$$

mit $v_1 = 33.3$ m/s und $v_2 = 16.7$ m/s ergibt dies $W = -604\,167\ J$.
und als Anteil der anfänglichen Energie:

$$p = \frac{W}{E_{\mathrm{kin},1}} = \frac{E_{\mathrm{kin},2} - E_{\mathrm{kin},1}}{E_{\mathrm{kin},1}} = \frac{E_{\mathrm{kin},2}}{E_{\mathrm{kin},1}} - 1 = \frac{(v_2)^2}{(v_1)^2} - 1 = -0.75$$

(b) Annahme: Gleichmässige Beschleunigung. Dann können wir die Bremskraft berechnen über $F = a \cdot m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot m$. Die Zeit für den Bremsvorgang berechnen wir aus der Strecke. Im Geschwindigkeits-Zeit Diagramm ist die Strecke s die Fläche unter dem Graphen.



Hier also

$$s = v_2 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot (v_1 - v_2) \cdot t = \frac{t}{2} \cdot (v_1 + v_2) \;\Rightarrow\; t = \frac{2s}{v_1 + v_2} = 3\,\mathrm{s}$$

Also

$$F = \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot m = 1450 \cdot \frac{-16.7}{3}\,\mathrm{N} = -8055.56\,\mathrm{N}$$

(c) Arbeit der Bremskraft

$$W = F \cdot s = -604167\,\mathrm{J}$$

Das ist die Kontrolle: Die Arbeit der Bremskraft ist genau so gross wie die kinetische Energie, die beim Bremsen umgewandelt wurde.

8. Feder mit Reibung (Nr. 30) **50QQ48**

Ein Paket rutscht auf einer Unterlage und wird von einer Feder abgebremst. Anfangsgeschwindigkeit $v_1 = 4.0$ m/s, Strecke $l = 1.2$ m, Masse $m = 2.0$ kg, Reibungszahl $\mu = 0.6$, Federkonstante $D = 500$ N/m.

(a) Wo kommt das Paket zum Stillstand?

(b) Bleibt es dort stehen, oder ist die Federkraft grösser als die Reibung?

Lösung:

(a) Energieerhaltung

$$E_{\mathrm{kin},1} + E_{\mathrm{pot},1} + E_{\mathrm{el},1} = E_{\mathrm{kin},2} + E_{\mathrm{pot},3} + E_{\mathrm{el},4} + W_{\mathrm{reib},2}$$

Die potenzielle Energie ändert sich nicht, also setzen wir $E_{\mathrm{pot},1} = E_{\mathrm{pot},3} = 0$, die Feder ist am Anfang ungespannt $E_{\mathrm{el},1} = 0$ und am Schluss steht das Paket still $E_{\mathrm{kin},2} = 0$. Es bleibt

$$E_{\mathrm{kin},1} = E_{\mathrm{el},4} + W_{\mathrm{reib},2}$$

Wir setzen den Ursprung des Koordinatensystems, so dass die Feder bei $x = 0$ zu stehen kommt. Dann gilt

$$\frac{1}{2}(v_1)^2 \cdot m = \frac{1}{2}Dx^2 + (l - x) \cdot F_r$$

Die Reibungskraft ist $F_r = \mu \cdot F_N = \mu \cdot m \cdot g = 11.772$ N. Wir multiplizieren aus und bringen in Normalform

$$\frac{1}{2}Dx^2 - x \cdot F_r + \underbrace{l \cdot F_r - \frac{1}{2}(v_1)^2 \cdot m}_{E_0 = -3.05\,J} = 0$$

und erhalten die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{F_r \pm \sqrt{F_r - \frac{4}{2}D \cdot E_0}}{\frac{2}{2}D} = -0.063\,;0.11\,\mathrm{m}$$

Nur die negative Lösung ist sinnvoll. (In der anderen Musterlösung wird die Richtung des Koordinatensystems umgekehrt gewählt, deshalb wird dort mit $W_{\mathrm{reib}} = (l + x) \cdot F_r$ gerechnet.)

(b) Die Federkraft ist dort $F_{\mathrm{el}} = -D \cdot x_1 = -15.8\,N$, das Paket wird also nicht stehen bleiben.

9. Aufzug (Nr. 37) **MPPL6K**

Ein Aufzug hebt eine Last von $F = 3$ kN in $t = 15$ s auf die Höhe $h = 22.5$ m. Wie gross ist der Wirkungsgrad der Anlage, wenn die Antriebsmaschine $W_{\text{in}} = 6$ kW leistet?

Lösung:

Wir benutzen die Definition der Arbeit $E = W = F \cdot s$ und die Definition der Leistung

$$P = \frac{E}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = \frac{3 \cdot 22.5}{15} \frac{1000}{1} \frac{N\,m}{s} = 4500\,\mathrm{W}$$

Der Wirkungsgrad ist $\eta = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = 0.75$.

10. PW beschleunigen (Nr. 47) **NW5HY9**

Ein PW von $m = 1\,400$ kg leistet $P = 100$ kW. Wie gross ist die maximale Beschleunigung auf horizontaler Strasse bei $v = 90$ km/h und einem Fahrwiderstand von $F_r = 500$ N?

Lösung:

Wir benutzen $W = F \cdot v$ um die Kraft zu berechnen, die der Motor zur Verfügung stellt:

$$F = \frac{W}{v} = \frac{100\,000}{25}\,\mathrm{N} = 4000\,\mathrm{N}\ .$$

Für die Beschleunigung steht nur der Teil zur Verfügung, der nicht für den Fahrwiderstand gebraucht wird

$$F_b = F - F_r = 3500\,\mathrm{N}\ .$$

also

$$a = \frac{F_b}{m} = 2.5\,\mathrm{m/s^2}$$

11. Kosten Energie (Nr. 51) **P9BHF3**

Benzinmotoren mit Direkteinspritzung benötigen im optimalen Betriebspunkt $m_1 = 0.240$ kg Kraftstoff für eine kWh mechanische Energie. Der Verbrauch kann aber auf $m_2 = 0.400$ kg pro kWh steigen.

(a) Wie gross ist der Wirkungsgrad?

(b) Wie gross ist der kombinierte Wirkungsgrad mit einem Getriebe mit einem Wirkungsgrad $\eta_2 = 0.95$.

Lösung:

(a) $E_{\text{in}} = m \cdot H = 0.240 \cdot 42 \cdot 10^6, \mathrm{J} = 10.1 \cdot 10^6, \mathrm{J}$. Der Wirkungsgrad ist also

$$\eta_1 = \frac{E_{\text{out}}}{E_{\text{in}}} = \frac{1\mathrm{kWh}}{10.1 \cdot 10^6, \mathrm{J}} = 35.7$$

und

$$\eta_1' = \frac{E_{\text{out}}}{E_{\text{in}}} = \frac{1\mathrm{kWh}}{16.8333 \cdot 10^6, \mathrm{J}} = 21.4$$

(b) Der kombinierte Wirkungsgrad ist

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 = 0.339$$

oder

$$\eta' = \eta_1' \cdot \eta_2 = 0.203$$