

## MSP Ialg1

Klasse 1Ea,1Eb

Semester: 1

Datum: 9.2.2017

Zeit: 120 Minuten.

80 Punkte geben eine 6. Lösung *nicht* mit Bleistift, Lösungsweg muss ersichtlich sein! Zugelassen:

- 1. Teil: Zusammenfassung (8 Seiten, einseitig A4) und Taschenrechner ohne Speicher.
- 2. Teil: zusätzlich MATLAB oder programmierbarer Taschenrechner.

1 (10)	2 (10)	3 (10)	4 (10)	5 (14)	6 (12)	7 (14)	Total (80)	Note

### 1. Teil ohne Matlab

#### 1. Orthogonale Matrizen (10)

Berechnen Sie  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top \odot \mathbf{A}$ . Berechnen Sie dann die Determinante der Matrix  $\mathbf{C}$ :

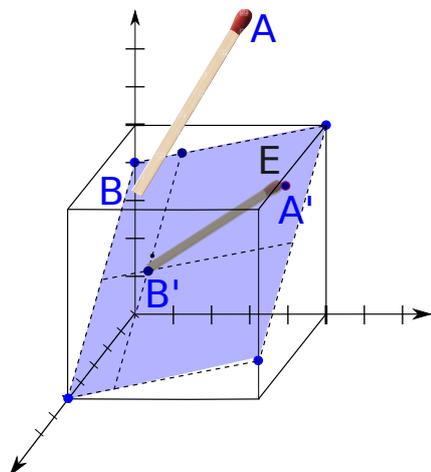
$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^\top \odot \mathbf{D} \odot \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

#### 2. Regel von Cramer (10)

Die Ebenen  $E_1, E_2$  und  $E_3$  hängen noch von einem Parameter ab ( $a \neq 0$ ) und schneiden sich in einem Punkt  $\vec{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$ . Bestimmen Sie  $\vec{P}$ .

$$\left| \begin{array}{l} E_1: \\ E_2: \\ E_3: \end{array} \right. \begin{array}{l} a \cdot x + 10y = 121 \\ y + a \cdot z = -100 \\ 9y + a \cdot z = -12 \end{array}$$

**3. Projektion** (10)

Die Ebene  $E$  wird senkrecht beleuchtet, d.h. die Lichtquelle steht senkrecht zu  $E$ . Geben Sie den Anfangspunkt ( $\vec{A}'$ ) und Endpunkt ( $\vec{B}'$ ) des Schattens des Streichholzes auf der Ebene an.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie dazu

- einen Aufpunkt der Ebene  $E : 3x - 4z + 1 = 0$ .
- den Normalenvektor der Ebene
- die Projektionen der Verbindungsvektoren der Ebene mit den Anfangspunkt und Endpunkt des Streichholzes auf den Normalenvektor
- und schliesslich Anfangspunkt und Endpunkt des Schattens.

**4. Linearkombination** (10)

$$(a) \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (b) \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Stellen Sie den Vektor  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$  als Summe der Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$  dar.

Beachten Sie die mögliche Orthogonalität der Vektoren. Geben Sie *alle* möglichen Linearkombinationen an.

## 2. Teil mit Matlab

### 5. Diskrete Fourier-Transformation (14)

Wir betrachten die Funktion

$$f(t) = 1 + \sin\left(t \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}\right) \cdot \sin\left(t \cdot \frac{2 \cdot \pi}{7}\right).$$

Sie ist  $T = 5 \cdot 7 = 35$ -periodisch. Sie kann geschrieben werden als Linearkombination von harmonischen Schwingungen

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos(t \cdot \omega_1) + a_2 \cos(t \cdot \omega_2) + \dots + b_1 \sin(t \cdot \omega_1) + b_2 \sin(t \cdot \omega_2) + \dots$$

In dieser Aufgabe sollen die Amplituden und die Frequenzen dieser Linearkombination bestimmt werden. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Plotten Sie die Funktion  $f(t)$  für  $t \in [0, 70]$  (Speichern und abgeben als `plot_‘name’.pdf`).
- Diskretisieren Sie die Funktion  $f(t)$  an 60 Punkten  $t_j = \frac{35}{60} \cdot j$  mit  $j \in [0, 1 \dots, 59]$ .
- Projizieren* Sie die Funktion auf die diskrete Fourier-Basis der Dimension 60.
- Bestimmen Sie die Koeffizienten  $a_i \neq 0$  und  $b_i \neq 0$  und geben Sie die Winkel-frequenzen  $j \cdot \omega$  ( $j \in \mathbb{N}$ ) an, zu denen die Koeffizienten gehören. (Sie können z.B. `sort` benutzen).
- Schreiben Sie  $f(t)$  als Linearkombination von harmonischen Schwingungen (siehe auch Aufgabenstellung).

### 6. Lineare Regression (12)

Tabelle 1 zeigt die Abweichung der Jahrmitteltemperatur vom langzeitigen Mittelwert und die  $\text{CO}_2$ -Konzentration in den entsprechenden Jahren (für den Monat Dezember) zwischen 1991 und 2016.

- Berechnen Sie durch lineare Regression die  $\text{CO}_2$ -Konzentration in Abhängigkeit der Zeit  $C(t) = c_0 + c_1 \cdot t$ , wobei  $C$  die Konzentration und  $t$  die Zeit in Jahren sind.
- Berechnen Sie die erwartete  $\text{CO}_2$ -Konzentration für das Jahr 2020.
- Wann wird sich die  $\text{CO}_2$ -Konzentration verdoppelt haben bezüglich dem Wert von 1991?

### 7. Korrelation (14)

Tabelle 2 zeigt die jährlichen Importe von Zitronen von Mexiko nach den USA in Tonnen.

- Berechnen Sie den Korrelations-Koeffizienten zwischen Temperatur-Anomalie und  $\text{CO}_2$  Konzentration zwischen 1991 und 2016 (Benutzen Sie Tabelle 1 aus der vorherigen Aufgabe).

- (b) Geben Sie an, ob dieser Korrelations-Koeffizient signifikant ist (Irrtumswahrscheinlichkeit 0.5%).
- (c) Berechnen Sie den Korrelations-Koeffizienten zwischen CO<sub>2</sub>-Konzentration und der Menge an Zitronen, die jährlich in die USA importiert werden.
- (d) Geben Sie an, ob dieser Korrelations-Koeffizient signifikant ist (Irrtumswahrscheinlichkeit 0.5%).
- (e) Benutzen Sie die statistischen Resultate um folgende Aussagen zu bewerten. Sie können sich auch auf die im Unterricht besprochene langjährige ( $5 \cdot 10^5$  Jahre) Korrelation zwischen CO<sub>2</sub>-Konzentration und Temperatur beziehen.
- Die CO<sub>2</sub> Konzentration erhöht sich auf Grund der Zitronen-Importe aus Mexiko.
  - Die Klimaerwärmung wird durch die erhöhte CO<sub>2</sub> Konzentration erzeugt.
  - Die CO<sub>2</sub> Konzentration wird durch die Klimaerwärmung erzeugt.

Jahr	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Temperatur (°C)	0.25	0.1	0.15	0.21	0.32	0.18	0.39	0.54
$C_{CO_2}$ (ppm)	355.12	355.57	356.91	358.98	360.68	362.25	364.38	367.13
Jahr	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Temperatur (°C)	0.31	0.29	0.44	0.5	0.51	0.45	0.54	0.51
$C_{CO_2}$ (ppm)	368.1	369.67	371.24	373.79	375.99	377.51	380.11	381.82
Jahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Temperatur (°C)	0.49	0.39	0.51	0.56	0.42	0.47	0.51	0.58
$C_{CO_2}$ (ppm)	383.95	385.56	387.42	389.79	391.86	394.34	396.84	398.91
Jahr	2015	2016						
Temperatur (°C)	0.76	0.77						
$C_{CO_2}$ (ppm)	401.85	404.48						

Tabelle 1: Globale Temperaturanomalie (gemäss der HadCRUT4 Datenbank) und Konzentration CO<sub>2</sub> (gemäss Dr. Pieter Tans, NOAA/ESRL und Dr. Ralph Keeling, Scripps Institution of Oceanography)

Jahr	1996	1997	1998	1999	2000
Zitronen (t)	230	280	355	445	530

Tabelle 2: Angaben über jährliche Importe von Zitronen von Mexiko nach den USA in Tonnen.