

MSP Ialg1

Klasse 1Sb

Semester: 1

Datum: 4.2.2017

Zeit: 120 Minuten.

80 Punkte geben eine 6. Lösung *nicht* mit Bleistift, Lösungsweg muss ersichtlich sein! Zugelassen:

- 1. Teil: Zusammenfassung (8 Seiten, einseitig A4) und Taschenrechner ohne Speicher.
- 2. Teil: zusätzlich MATLAB oder programmierbarer Taschenrechner.

1 (10)	2 (10)	3 (10)	4 (10)	5 (14)	6 (12)	7 (14)	Total (80)	Note

1. Teil ohne Matlab

1. Orthogonale Matrizen (10)

Berechnen Sie $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top \odot \mathbf{A}$. Berechnen Sie dann die Determinante der Matrix \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^\top \odot \mathbf{D} \odot \mathbf{A}$$

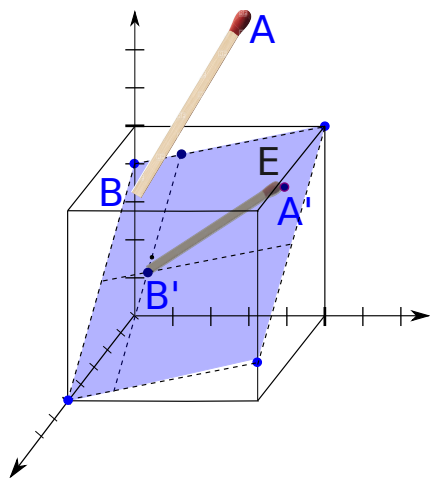
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Regel von Cramer (10)

Die Ebenen E_1, E_2 und E_3 hängen noch von einem Parameter ab ($a \neq 0$) und

schneiden sich in einem Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie \vec{P} .

$$\left| \begin{array}{l} E_1: 10x + y = 3 \\ E_2: 9y + az = 6 \\ E_3: -9x = 9 \end{array} \right|$$

3. Projektion (10)

Die Ebene E wird senkrecht beleuchtet, d.h. die Lichtquelle steht senkrecht zu E . Geben Sie den Anfangspunkt (\vec{A}') und Endpunkt (\vec{B}') des Schattens des Streichholzes auf der Ebene an.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie dazu

- einen Aufpunkt der Ebene $E : 3x - 4z + 1 = 0$.
- den Normalenvektor der Ebene
- die Projektionen der Verbindungsvektoren der Ebene mit den Anfangspunkt und Endpunkt des Streichholzes auf den Normalenvektor
- und schliesslich Anfangspunkt und Endpunkt des Schattens.

4. Linearkombination (10)

$$(a) \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (c) \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(b) \quad \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -16 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

Stellen Sie den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Summe der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$ dar.

Stellen Sie dafür zuerst das Problem als Koeffizientenmatrix dar.

Geben sie *alle* möglichen Linearkombinationen an.

2. Teil mit Matlab

5. Diskrete Fourier-Transformation (14)

Wir betrachten die Funktion

$$f(t) = \cos\left(t \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}\right) \cdot \sin\left(t \cdot \frac{2 \cdot \pi}{7}\right).$$

Sie ist $T = 5 \cdot 7 = 35$ -periodisch. Sie kann geschrieben werden als Linearkombination von harmonischen Schwingungen

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos(t \cdot \omega_1) + a_2 \cos(t \cdot \omega_2) + \dots + b_1 \sin(t \cdot \omega_1) + b_2 \sin(t \cdot \omega_2) + \dots$$

In dieser Aufgabe sollen die Amplituden und die Frequenzen dieser Linearkombination bestimmt werden. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Plotten Sie die Funktion $f(t)$ für $t \in [0, 70]$ (Speichern und abgeben als `plot_‘name’.pdf`).
- Diskretisieren Sie die Funktion $f(t)$ an 60 Punkten $t_j = \frac{35}{60} \cdot j$ mit $j \in [0, 1 \dots, 59]$.
- Projizieren* Sie die Funktion auf die diskrete Fourier-Basis der Dimension 60.
- Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_i \neq 0$ und $b_i \neq 0$ und geben Sie die Winkel-frequenzen $j \cdot \omega$ ($j \in \mathbb{N}$) an, zu denen die Koeffizienten gehören. (Sie können z.B. `sort` benutzen).
- Schreiben Sie $f(t)$ als Linearkombination von harmonischen Schwingungen (siehe auch Aufgabenstellung).

6. Lineare Regression (12)

Tabelle 1 zeigt die Abweichung der Jahrmitteltemperatur vom langzeitigen Mittelwert und die CO_2 -Konzentration in den entsprechenden Jahren (für den Monat Dezember) zwischen 1991 und 2016.

- Berechnen Sie durch lineare Regression die CO_2 -Konzentration in Abhängigkeit der Zeit $C(t) = c_0 + c_1 \cdot t$, wobei C die Konzentration und t die Zeit in Jahren sind.
- Berechnen Sie die erwartete CO_2 -Konzentration für das Jahr 2020.
- Wann wird sich die CO_2 -Konzentration verdoppelt haben bezüglich dem Wert von 1991?

7. Korrelation (14)

Tabelle 2 zeigt die jährlichen Importe von Zitronen von Mexiko nach den USA in Tonnen.

- Berechnen Sie den Korrelations-Koeffizienten zwischen Temperatur-Anomalie und CO_2 Konzentration zwischen 1991 und 2016 (Benutzen Sie Tabelle 1 aus der vorherigen Aufgabe).

- (b) Geben Sie an, ob dieser Korrelations-Koeffizient signifikant ist (Irrtumswahrscheinlichkeit 0.5%).
- (c) Berechnen Sie den Korrelations-Koeffizienten zwischen CO₂-Konzentration und der Menge an Zitronen, die jährlich in die USA importiert werden.
- (d) Geben Sie an, ob dieser Korrelations-Koeffizient signifikant ist (Irrtumswahrscheinlichkeit 0.5%).
- (e) Benutzen Sie die statistischen Resultate um folgende Aussagen zu bewerten. Sie können sich auch auf die im Unterricht besprochene langjährige ($5 \cdot 10^5$ Jahre) Korrelation zwischen CO₂-Konzentration und Temperatur beziehen.
- i. Die CO₂ Konzentration erhöht sich auf Grund der Zitronen-Importe aus Mexiko.
 - ii. Die Klimaerwärmung wird durch die erhöhte CO₂ Konzentration erzeugt.
 - iii. Die CO₂ Konzentration wird durch die Klimaerwärmung erzeugt.

Jahr	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Temperatur (°C)	0.25	0.1	0.15	0.21	0.32	0.18	0.39	0.54
C_{CO_2} (ppm)	355.12	355.57	356.91	358.98	360.68	362.25	364.38	367.13
Jahr	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Temperatur (°C)	0.31	0.29	0.44	0.5	0.51	0.45	0.54	0.51
C_{CO_2} (ppm)	368.1	369.67	371.24	373.79	375.99	377.51	380.11	381.82
Jahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Temperatur (°C)	0.49	0.39	0.51	0.56	0.42	0.47	0.51	0.58
C_{CO_2} (ppm)	383.95	385.56	387.42	389.79	391.86	394.34	396.84	398.91
Jahr	2015	2016						
Temperatur (°C)	0.76	0.77						
C_{CO_2} (ppm)	401.85	404.48						

Tabelle 1: Globale Temperaturanomalie (gemäss der HadCRUT4 Datenbank) und Konzentration CO₂ (gemäss Dr. Pieter Tans, NOAA/ESRL und Dr. Ralph Keeling, Scripps Institution of Oceanography)

Jahr	1996	1997	1998	1999	2000
Zitronen (t)	230	280	355	445	530

Tabelle 2: Angaben über jährliche Importe von Zitronen von Mexiko nach den USA in Tonnen.