

MSP Ialg1, Musterlösung

Klasse 1Sb

Semester: 1

Datum: 4.2.2017

Zeit: 120 Minuten.

80 Punkte geben eine 6. Lösung *nicht* mit Bleistift, Lösungsweg muss ersichtlich sein! Zugelassen:

- 1. Teil: Zusammenfassung (8 Seiten, einseitig A4) und Taschenrechner ohne Speicher.
- 2. Teil: zusätzlich MATLAB oder programmierbarer Taschenrechner.

1. Teil ohne Matlab

1. Orthogonale Matrizen

533658

Berechnen Sie $\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top \odot \mathbf{A}$. Berechnen Sie dann die Determinante der Matrix \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^\top \odot \mathbf{D} \odot \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung

$\mathbf{B} = \mathbf{A}^\top \odot \mathbf{A} = \mathbf{1}$. Wir schliessen daraus, dass \mathbf{A} eine orthogonale Matrix ist, also $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^{-1}$.

Für die Determinante der Matrix ergibt sich damit

$$\det(\mathbf{A}^\top \odot \mathbf{D} \odot \mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{D} \odot \mathbf{A}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \det(\mathbf{D}) \cdot \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{D}) .$$

Um die Determinante von \mathbf{D} zu bestimmen, vertauschen wir die zweite und dritte Zeile. Dadurch entsteht eine Diagonalmatrix:¹

$$\det(\mathbf{D}) = -\det\left(\begin{pmatrix} -6 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right) = (-1) \cdot (-6) \cdot 2 \cdot 8 \cdot 4 = 384$$

Alternativ auch, ohne Inverse Matrix:

$$\det(\mathbf{A}^\top \odot \mathbf{D} \odot \mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top) \cdot \det(\mathbf{D}) \cdot \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\top \odot \mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{D}) = \det(\mathbf{1}) \cdot \det(\mathbf{D}) .$$

Dies gilt, obwohl

$$\mathbf{A}^\top \odot \mathbf{D} \odot \mathbf{A} \neq \mathbf{A}^\top \odot \mathbf{A} \odot \mathbf{D} .$$

¹Achtung, dies ändert das Vorzeichen!

2. Regel von Cramer

783473

Die Ebenen E_1, E_2 und E_3 hängen noch von einem Parameter ab ($a \neq 0$) und schneiden sich in einem Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie \vec{P} .

$$\left| \begin{array}{l} E_1: 10x + y = 3 \\ E_2: 9y + az = 6 \\ E_3: -9x = 9 \end{array} \right|$$

Lösung

Wir wenden den Satz von Cramer an um Koordinaten zu berechnen. Wir bezeichnen die Koeffizientenmatrix mit

$$\mathbb{A} = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

$$P_1 = \frac{\det\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right)}{\det(\mathbb{A})} = \frac{0 + 9a + 0 + 0 + 0}{0 - 9a + 0 + 0 + 0 + 0} = -1$$

$$P_2 = \frac{\det\left(\vec{a}_1, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{a}_3\right)}{\det(\mathbb{A})} = \frac{0 - 27a + 0 + 0 - 90a + 0}{-9a} = 13$$

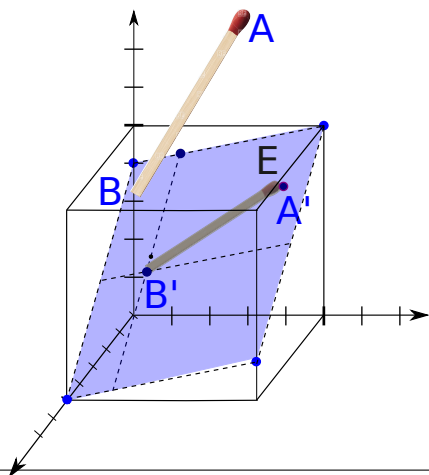
$$P_3 = \frac{\det\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}\right)}{\det(\mathbb{A})} = \frac{810 - 54 + 0 + 243 + 0 + 0}{-9a} = -\frac{111}{a}$$

Der Schnittpunkt ist also bei

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ -\frac{111}{a} \end{pmatrix}$$

3. Projektion

715510



Die Ebene E wird senkrecht beleuchtet, d.h. die Lichtquelle steht senkrecht zu E . Geben Sie den Anfangspunkt (\vec{A}') und Endpunkt (\vec{B}') des Schattens des

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie dazu

- einen Aufpunkt der Ebene $E : 3x - 4z + 1 = 0$.
- den Normalenvektor der Ebene
- die Projektionen der Verbindungsvektoren der Ebene mit den Anfangspunkt und Endpunkt des Streichholzes auf den Normalenvektor
- und schliesslich Anfangspunkt und Endpunkt des Schattens.

Lösung

- Ein Aufpunkt, der die Ebenengleichung erfüllt ist z.B. $\vec{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Der Normalenvektor kann abgelesen werden:

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

- Die Verbindungsvektoren sind

$$\vec{r}_A = \vec{A} - \vec{R} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{r}_B = \vec{B} - \vec{R} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Wir projizieren die Verbindungsvektoren auf den Normalenvektor:

$$\vec{r}_{\text{Ap}} = (\vec{r}_A \odot \vec{n}) \cdot \vec{n} = 10 \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{\text{Bp}} = (\vec{r}_B \odot \vec{n}) \cdot \vec{n} = 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Jetzt gehen wir entlang diesem Vektors in Richtung der Ebene. Somit erhalten wir Endpunkt und Anfangspunkt des Schattens

$$\vec{A}' = \vec{A} - \vec{r}_{\text{Ap}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{B}' = \vec{B} - \vec{r}_{\text{Bp}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$(a) \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (c) \vec{v}_1, \vec{v}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(b) \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -16 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

Stellen Sie den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Summe der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$ dar.

Stellen Sie dafür zuerst das Problem als Koeffizientenmatrix dar.
Geben sie *alle* möglichen Linearkombinationen an.

Lösung

(a) Wir suchen drei Koeffizienten, die folgende Gleichung erfüllen:

$$a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + a_3 \cdot \vec{v}_3 = \vec{w}.$$

Dies entspricht dem inhomogenen LGS (erweiterte Koeffizientenform):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} L_1: & 1 & 1 & -1 & 6 \\ L_2: & 1 & -1 & 1 & -4 \\ L_3: & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right].$$

Die Schritte zur Elimination sind

$$\left[\begin{array}{ccc|c} L'_1 = L_1: & 1 & 1 & -1 & 6 \\ L'_2 = L_2 - L_1: & 0 & -2 & 2 & -10 \\ L'_3 = L_3 + L_1: & 0 & 2 & 0 & 8 \end{array} \right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} L''_1 = L'_1: & 1 & 1 & -1 & 6 \\ L''_2 = L'_2: & 0 & -2 & 2 & -10 \\ L''_3 = L'_3 + L'_2: & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right].$$

Einsetzen von unten nach oben ergibt

$$a_3 = \frac{-2}{2} = -1, \quad a_2 = \frac{-10 - 2 \cdot (-1)}{-2} = 4, \quad a_1 = 6 - 4 + (-1) = 1$$

Die Linearkombination ist also

$$\vec{w} = \vec{v}_1 + 4\vec{v}_2 - \vec{v}_3.$$

(b) Keine Lösung (die Basisvektoren sind linear abhängig).

(c) Wir suchen zwei Koeffizienten, die folgende Gleichung erfüllen:

$$b_1 \cdot \vec{v}_1 + b_2 \cdot \vec{v}_2 = \vec{w}.$$

Dies entspricht dem inhomogenen LGS (erweiterte Koeffizientenform):

$$\left[\begin{array}{cc|c} L_1: & -3 & 12 & 6 \\ L_2: & 2 & -8 & -4 \\ L_3: & -1 & 4 & 2 \end{array} \right].$$

Das System ist zwar überbestimmt, kann aber eine Lösung haben, falls die Gleichungen linear abhängig sind.

Die Schritte zur Elimination sind

$$\left[\begin{array}{l} L'_1 = L_3 : \\ L'_2 = L_2 + 2L'_3 : \\ L'_3 = L_1 - 3L_3 : \end{array} \begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Die Gleichungen sind also linear abhängig. Es gibt eine Pivot-Variable (b_1) und eine freie Variablen (b_2). Die inhomogene Lösung ist ($b_2 = 0$):

$$\left[\begin{array}{l} L'_1 : \\ L'_2 : \\ L'_3 : \end{array} \begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Die homogene Lösung ergibt sich aus ($b_2 = 1$):

$$\left[\begin{array}{l} L'_1 : \\ L'_2 : \\ L'_3 : \end{array} \begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow b_1 = \frac{-4}{-1} = 4 \Rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizienten sind also

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Linearkombinationen ist

$$\vec{w} = (-2 + 4\lambda) \cdot \vec{v}_1 + \lambda \cdot \vec{v}_2.$$

2. Teil mit Matlab

5. Diskrete Fourier-Transformation

394971

Wir betrachten die Funktion

$$f(t) = \cos\left(t \cdot \frac{2 \cdot \pi}{5}\right) \cdot \sin\left(t \cdot \frac{2 \cdot \pi}{7}\right).$$

Sie ist $T = 5 \cdot 7 = 35$ -periodisch. Sie kann geschrieben werden als Linearkombination von harmonischen Schwingungen

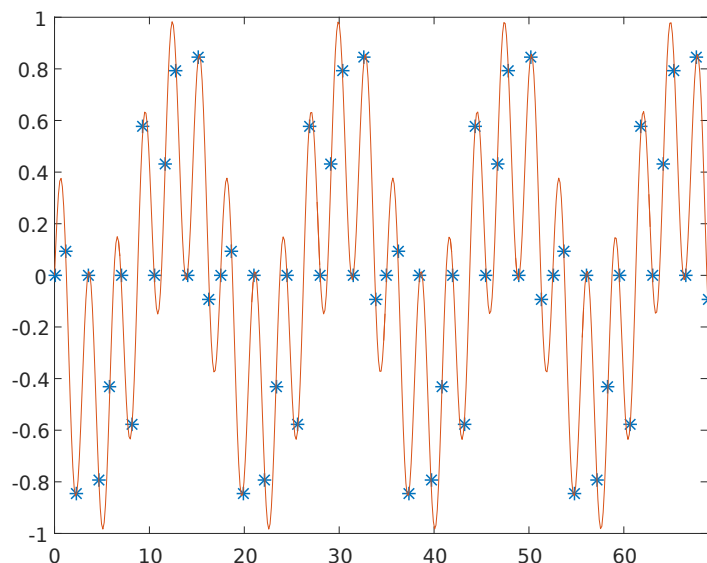
$$f(t) = a_0 + a_1 \cos(t \cdot \omega_1) + a_2 \cos(t \cdot \omega_2) + \dots + b_1 \sin(t \cdot \omega_1) + b_2 \sin(t \cdot \omega_2) + \dots$$

In dieser Aufgabe sollen die Amplituden und die Frequenzen dieser Linearkombination bestimmt werden. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Plotten Sie die Funktion $f(t)$ für $t \in [0, 70]$ (Speichern und abgeben als `plot_'name'.pdf`).
- Diskretisieren Sie die Funktion $f(t)$ an 60 Punkten $t_j = \frac{35}{60} \cdot j$ mit $j \in [0, 1 \dots, 59]$.
- Projizieren* Sie die Funktion auf die diskrete Fourier-Basis der Dimension 60.

- (d) Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_i \neq 0$ und $b_i \neq 0$ und geben Sie die Winkel-
frequenzen $j \cdot \omega$ ($j \in \mathbb{N}$) an, zu denen die Koeffizienten gehören. (Sie können z.B
sort benutzen).
- (e) Schreiben Sie $f(t)$ als Linearkombination von harmonischen Schwingungen
(siehe auch Aufgabenstellung).

Lösung



- (a) Matlab-Skript und Plot oben (durchgezogene Linie)
- (b) Diskretisierung: Matlab-Skript
- (c) Projektion zur Berechnung der Fourier-Koeffizienten: Matlab-Skript. Koeffizienten sind alle 0 ausser:

$$c_{35} = -1/2, \text{ und } c_{55} = 1/2.$$

- (d) Gerade Anzahl (60) von Stützpunkten und Basisfunktionen \Rightarrow cos-Funktionen bei den Indizes 2 bis 31, sin-Funktionen 32 bis 60. Frequenzen:

$$0, 1 \cdot \omega, 2 \cdot \omega, \dots, 30 \cdot \omega, 1 \cdot \omega \dots 29 \cdot \omega$$

Die relevanten Frequenzen sind also: $4 \cdot \omega$ und $24 \cdot \omega$.

- (e) $f(t) = -0.5 \cdot \sin(t \cdot \omega \cdot 4) + 0.5 \cdot \sin(t \cdot \omega \cdot 24)$

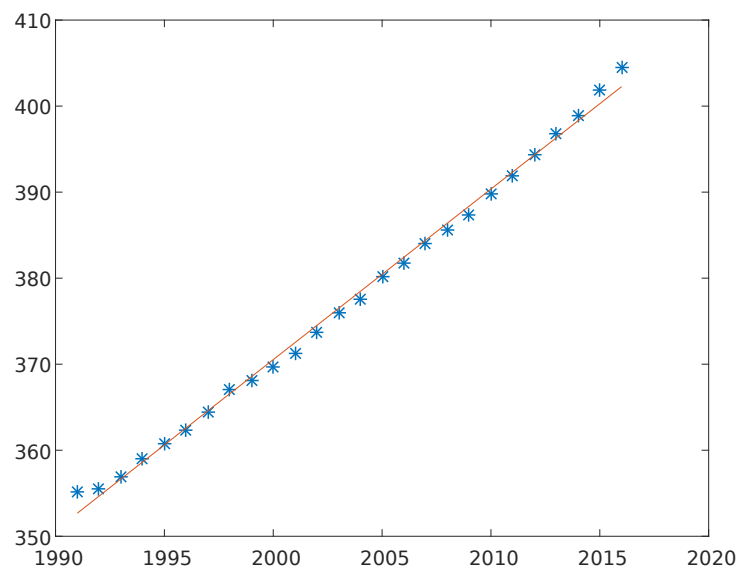
6. Lineare Regression

513028

Tabelle 1 zeigt die Abweichung der Jahrmitteltemperatur vom langzeitigen Mittelwert und die CO₂-Konzentration in den entsprechenden Jahren (für den Monat Dezember) zwischen 1991 und 2016.

- (a) Berechnen Sie durch lineare Regression die CO_2 -Konzentration in Abhängigkeit der Zeit $C(t) = c_0 + c_1 \cdot t$, wobei C die Konzentration und t die Zeit in Jahren sind.
- (b) Berechnen Sie die erwartete CO_2 -Konzentration für das Jahr 2020.
- (c) Wann wird sich die CO_2 -Konzentration verdoppelt haben bezüglich dem Wert von 1991?

Lösung



- (a) Matlab-Skript. Die Regression ist (falls wir t in Jahren unserer Zeitrechnung messen):

$$C(t) = -3595.4 + 1.983 \cdot t$$

- (b) $C(2020) = 410.1899$
- (c) Wir lösen die Gleichung

$$-3595.4 + 1.983 \cdot t = 2 \cdot 355.1200$$

und erhalten $t = 2171$.

Übrigens: Man sieht im Plot, dass die Lineare Regression gegen Ende steiler ansteigt. Deshalb ist die Verdoppelung früher zu erwarten

7. Korrelation

703836

Tabelle 2 zeigt die jährlichen Importe von Zitronen von Mexiko nach den USA in Tonnen.

- (a) Berechnen Sie den Korrelations-Koeffizienten zwischen Temperatur-Anomalie und CO_2 Konzentration zwischen 1991 und 2016 (Benutzen Sie Tabelle 1 aus der vorherigen Aufgabe).

- (b) Geben Sie an, ob dieser Korrelations-Koeffizient signifikant ist (Irrtumswahrscheinlichkeit 0.5%).
- (c) Berechnen Sie den Korrelations-Koeffizienten zwischen CO₂-Konzentration und der Menge an Zitronen, die jährlich in die USA importiert werden.
- (d) Geben Sie an, ob dieser Korrelations-Koeffizient signifikant ist (Irrtumswahrscheinlichkeit 0.5%).
- (e) Benutzen Sie die statistischen Resultate um folgende Aussagen zu bewerten. Sie können sich auch auf die im Unterricht besprochene langjährige ($5 \cdot 10^5$ Jahre) Korrelation zwischen CO₂-Konzentration und Temperatur beziehen.
- Die CO₂ Konzentration erhöht sich auf Grund der Zitronen-Importe aus Mexiko.
 - Die Klimaerwärmung wird durch die erhöhte CO₂ Konzentration erzeugt.
 - Die CO₂ Konzentration wird durch die Klimaerwärmung erzeugt.

Lösung

- (a) Der Korrelations-Koeffizienten zwischen Temperatur-Anomalie und CO₂ Konzentration zwischen 1991 und 2016 ist

$$r_{kT} = 0.8393 .$$

- (b) Bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit 0.5% und 26 Datenpunkten ist der t -Wert (für $m = 26 - 2 = 24$) 2.797. Wir lesen ihn aus der Tabelle aus. Der t -Wert aus den Datenpunkten ist

$$t = r_{kT} \frac{\sqrt{26 - 2}}{\sqrt{1 - (r_{kT})^2}} = 7.563$$

Also ist die Korrelation signifikant.

- (c) Der Korrelations-Koeffizienten zwischen CO₂-Konzentration und der Menge an Zitronen, die jährlich in die USA importiert werden ist

$$r_{ki} = 0.9691 .$$

- (d) Bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit 0.5% und 5 Datenpunkten ist der t -Wert (für $m = 5 - 2 = 3$) 5.841. Wir lesen ihn aus der Tabelle aus. Der t -Wert aus den Datenpunkten ist

$$t = r_{ki} \frac{\sqrt{26 - 2}}{\sqrt{1 - (r_{ki})^2}} = 6.8072$$

Also ist die Korrelation signifikant.

- (e) i. Eine Korrelation bedeutet nicht unbedingt einen kausalen Zusammenhang. Hier könnte die Zeit eine versteckte Variable sein, zu der beide Datenmengen korreliert sind.

- ii. Aus der langjährige Korrelation (in Aufgabenstellung erwähnt) und aus der berechneten Korrelation geht hervor, dass die Temperatur und die CO₂ Konzentration gekoppelt sind. Im Moment erzeugt die Menschheit viel CO₂, deshalb ist ein kausaler Zusammenhang CO₂ Anstieg \Rightarrow Temperatur-Erhöhung nahe liegend.
- iii. Die Korrelation könnte auch als Temperatur-Erhöhung \Rightarrow CO₂ Anstieg gelesen werden. Da aber die Temperatur von den Menschen nicht direkt manipuliert wird (niemand hat Heizkörper aufgestellt, die Atmosphäre direkt heizen könnten), ist die Umgekehrte Kausalität (Aufg. ii) nahe liegender.

Jahr	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Temperatur (°C)	0.25	0.1	0.15	0.21	0.32	0.18	0.39	0.54
C_{CO_2} (ppm)	355.12	355.57	356.91	358.98	360.68	362.25	364.38	367.13
Jahr	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Temperatur (°C)	0.31	0.29	0.44	0.5	0.51	0.45	0.54	0.51
C_{CO_2} (ppm)	368.1	369.67	371.24	373.79	375.99	377.51	380.11	381.82
Jahr	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Temperatur (°C)	0.49	0.39	0.51	0.56	0.42	0.47	0.51	0.58
C_{CO_2} (ppm)	383.95	385.56	387.42	389.79	391.86	394.34	396.84	398.91
Jahr	2015	2016						
Temperatur (°C)	0.76	0.77						
C_{CO_2} (ppm)	401.85	404.48						

Tabelle 1: Globale Temperaturanomalie (gemäss der HadCRUT4 Datenbank) und Konzentration CO₂ (gemäss Dr. Pieter Tans, NOAA/ESRL und Dr. Ralph Keeling, Scripps Institution of Oceanography)

Jahr	1996	1997	1998	1999	2000
Zitronen (t)	230	280	355	445	530

Tabelle 2: Angaben über jährliche Importe von Zitronen von Mexiko nach den USA in Tonnen.

```

T=70;N=60;
w=2*pi/T;
jlis=[0:N-1]           % indices j
tk= jlis*T/N          % positions, where Signal was read out
n=floor(N/2)
% Continuous funktion corresponding to Basis n+1 Cos-Lists and n (or n-1)
% Sin-Lists
ff=@(t,N)[ cos((0:(floor(N/2)))'*t.*w) ; sin((1:(N-floor(N/2)-1))*t.*w)]
bas=ff(tk,N)' % F

sig=cos(tk*2*pi/5).*sin(tk*2*pi/7) % b) Diskretisierung

cfs=sig*0 % Initialisierung
for ii=1:N
    cfs(ii)= bas(:,ii)'\*sig'/norm(bas(:,ii))^2; % c) Projektion
end
cfs
[soda,inx]=sort(abs(cfs));
[inx(end-5:end);cfs(inx(end-5:end))]'

sig= -0.5*sin(tk*w*4)+ 0.5*sin(tk*w*24) % Kontrolle
ffs=@(t)ff(t,N)'\*cfs' % Einsetzen der Fourier-Koeffizienten in die Funktion
plot(tk,sig, '*') % a)
hold on
fplot(ffs,[tk(1),tk(end)])
hold off

ffs=@(t)ff(t,N)'\*cfs' % Einsetzen der Fourier-Koeffizienten in die Funktion
plot(tk,sig, '*')% a)
hold on
fplot(ffs,[tk(1),tk(end)])
hold off

% a) Plotten: Siehe Markierung a) oben
% b) Diskretisierung: Siehe Markierung b) oben
% c) Projektion: Siehe Markierung c) oben
% d)
[inx(end-5:end);cfs(inx(end-5:end))]'
% 46.0000 -0.0000
% 53.0000 0.0000
% 50.0000 -0.0000
% 48.0000 -0.0000
% 55.0000 0.5000
% 35.0000 -0.5000
% Wir haben eine gerade Anzahl (60) von Stützpunkten und Basisfunktionen
% deshalb sind die cos-Funktionen bei den Indizes 2:31, sin-Funkt 32:60
% Die Frequenzen sind [ 0, 1w , 2w, .. , 30w ] (cos) und [ 1w, 2w, ..., 29w ] (sin)
% Hier haben nur die Funktionen 35 und 55 eine Amplitude /=0
% Ihre Frequenzen sind 4w und 24w

% e) -0.5*sin(t *w*4)+ 0.5*sin(t*w*24)

```

```
% jahr [1], Temperatur-Anomalie °C [2], CO2-Konzentration ppm [3]
dat= [ 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, ↵
2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016 ;
    0.25, 0.1, 0.15, 0.21, 0.32, 0.18, 0.39, 0.54, 0.31, 0.29, 0.44, 0.5, 0.51, 0.45, ↵
0.54, 0.51, 0.49, 0.39, 0.51, 0.56, 0.42, 0.47, 0.51, 0.58, 0.76, 0.77 ;
    355.12, 355.57, 356.91, 358.98, 360.68, 362.25, 364.38, 367.13, 368.1, 369.67, ↵
371.24, 373.79, 375.99, 377.51, 380.11, 381.82, 383.95, 385.56, 387.42, 389.79, ↵
391.86, 394.34, 396.84, 398.91, 401.85, 404.48];

ff=@(t)[ exp(t).^0 t]
F=ff(dat(1,:))'
ys=F'*dat(3,:)'
Mm=F'*F
cfs=inv(Mm)*ys
ffs=@(t) ff(t)*cfs

plot(dat(1,:),dat(3,:), '*')
hold on
plot(dat(1,:),ffs(dat(1,:))', '-')
hold off

%b)
ffs(2020)
%c)
syms t
solve(ffs(t)==2*dat(3,1),t)
%59176041900976128/27253557127325
59176041900976128/27253557127325.00
%ans = 2.1713e+03
% Im Jahr 2171 wird sich die Konzentration verdoppelt haben.
```

```
% jahr [1], Temperatur-Anomalie °C [2], CO2-Konzentration ppm [3]
dat= [ 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003,
2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016 ;
    0.25, 0.1, 0.15, 0.21, 0.32, 0.18, 0.39, 0.54, 0.31, 0.29, 0.44, 0.5, 0.51, 0.45,
0.54, 0.51, 0.49, 0.39, 0.51, 0.56, 0.42, 0.47, 0.51, 0.58, 0.76, 0.77 ;
    355.12, 355.57, 356.91, 358.98, 360.68, 362.25, 364.38, 367.13, 368.1, 369.67,
371.24, 373.79, 375.99, 377.51, 380.11, 381.82, 383.95, 385.56, 387.42, 389.79,
391.86, 394.34, 396.84, 398.91, 401.85, 404.48]';
dati=[1996 1997 1998 1999 2000; 230 280 355 445 530]';

% a)
% Korrelationskoeffizient zwischen Konsum und Temperatur
mdat=dat*0;
mdat(:,2)=dat(:,2)-mean(dat(:,2));
mdat(:,3)=dat(:,3)-mean(dat(:,3));
mdat(:,2)=mdat(:,2)/norm(mdat(:,2));
mdat(:,3)=mdat(:,3)/norm(mdat(:,3));
rkt=mdat(:,2)'*mdat(:,3)
nn=length(mdat)

% b)
% Ist Korrelation signifikant? (Irrtumswahrscheinlichkeit 0.5%)
tam=2.797;
t=rkt*sqrt(nn-2)/sqrt(1-rkt^2)
if abs(t)>=tam
    'Korrelation ist signifikant'
else
    'Korrelation ist NICHT signifikant'
end
% ans =
% Korrelation ist signifikant

% c)
% Korrelationskoeffizient zwischen Konsum und Temperatur
datii=[dati ,dat(6:10,2:3)]
mdat=datii*0;
mdat(:,2)=datii(:,2)-mean(datii(:,2));
mdat(:,4)=datii(:,4)-mean(datii(:,4));
mdat(:,2)=mdat(:,2)/norm(mdat(:,2));
mdat(:,4)=mdat(:,4)/norm(mdat(:,4));
rkt=mdat(:,2)'*mdat(:,4)
nn=length(mdat)

% d)
% Ist Korrelation signifikant? (Irrtumswahrscheinlichkeit 0.5%)
tam=5.841;
t=rkt*sqrt(nn-2)/sqrt(1-rkt^2)
if abs(t)>=tam
    'Korrelation ist signifikant'
else
    'Korrelation ist NICHT signifikant'
end
% ans =
% Korrelation ist signifikant
```

```
% e) i   Eine Korrelation bedeutet nicht unbedingt einen kausalen
% Zusammenhang. Hier könnte die Zeit eine versteckte Variable sein, zu der
% beide Datenmengen korreliert sind.
% e) ii  Aus der langjährigen Korrelation (in Aufgabenstellung erwähnt) und
% aus der berechneten Korrelation geht hervor, dass die Temperatur und die
% CO2 Konzentration gekoppelt sind. Im Moment erzeugt die Menschheit viel
% CO2, deshalb ist ein kausaler Zusammenhang CO2 Anstieg => Temperatur-Erhöhung
% naheliegend.
% e) iii Die Korrelation könnte auch als Temperatur-Erhöhung => CO2
% Anstieg gelesen werden. Da aber die Temperatur von den Menschen nicht
% direkt manipuliert wird (niemand hat Heizkörper aufgestellt, die
% Atmosphäre direkt heizen könnten), ist die Umgekehrte Kausalität (Aufg.
% ii) nahe liegender.
```