Serie 1 Musterlösung

Klasse: 1Ea, 1Eb, 1Sb | Datum: HS 17

1. Kollinear — RIMDII

Bestimme ob die Vektoren kollinear sind, indem du die erste Komponente eliminierst.

(a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) $2\vec{v} + 3\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, die Vektoren sind also nicht kollinear.

(b) $2\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, die Vektoren sind kollinear.

2. Komplanar — Y899D7

Überprüfen Sie ob die Vektoren komplanar sind. Bestimmen Sie wenn möglich die Linearkombination die den Nullvektor $\vec{0}$ ergibt.

(a)
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c)
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a) Wir schreiben die Vektoren untereinander auf und eliminieren zuerst in der x-Komponente:

$$\begin{array}{rlllcllll} \vec{u} = (-3 & 1 & -1) & & \vec{u}' & & = & (-3 & 1 & -1) \\ \vec{v} = (9 & -5 & 6) & \rightarrow & \vec{v}' & = \vec{v} + 3\vec{u} & = & (0 & -2 & 3) \\ \vec{w} = (6 & 8 & 7) & & \vec{w}' & = \vec{w} + 2\vec{u} & = & (0 & 10 & 5) \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} & \vec{u}'' & = & (-3 \quad 1 \quad -1) \\ \rightarrow & \vec{v}'' & = & (0 \quad -2 \quad 3) \\ & \vec{w}'' = \vec{w}' + 5\vec{v}' & = & (0 \quad 0 \quad 20) \end{array}$$

Es ist nicht möglich, den Vektor $\vec{w}''$ ganz zu eliminieren. Die Vektoren sind nicht komplanar.

(b) Wir schreiben die Vektoren untereinander auf und eliminieren zuerst in der x-Komponente:

$$\begin{array}{lcl} \vec{u} = (2 \quad 4 \quad 1) & & \vec{u}' & & = (2 \quad 4 \quad 1) \\ \vec{v} = (3 \quad 4 \quad 0) & \rightarrow & \vec{v}' & = 2\vec{v} - 3\vec{u} & = (0 \quad -4 \quad -3) \\ \vec{w} = (5 \quad 8 \quad 1) & & \vec{w}' & = 2\vec{w} - 5\vec{u} & = (0 \quad -4 \quad -3) \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} & \vec{u}'' & = & (2 \quad 4 \quad 1) \\ \rightarrow & \vec{v}'' & = & (0 \quad -4 \quad -3) \\ & \vec{w}'' = \vec{w}' - \vec{v}' & = & (0 \quad 0 \quad 0) \end{array}$$

Es ist also möglich, die Komponenten von Vektor $\vec{w}''$ ganz zu eliminieren. Die Vektoren sind komplanar.
Diese Linearkombination verfolgen wir nun rückwärts:

$$\vec{w}'' = \vec{w}' - \vec{v}' = (2\vec{v} - 3\vec{u}) - (2\vec{w} - 5\vec{u}) = 2\vec{u} + 2\vec{v} - 2\vec{w} + = \vec{0}$$

(c) Wir schreiben die Vektoren untereinander auf und eliminieren zuerst in der x-Komponente:

$$\begin{array}{lcl} \vec{u} = (-5 \quad 1 \quad 1) & & \vec{u}' & = (-5 \quad 1 \quad 1) \\ \vec{v} = (2 \quad 1 \quad 1) & \rightarrow & \vec{v}' = 5\vec{v} + 2\vec{u} & = (0 \quad 7 \quad 7) \\ \vec{w} = (3 \quad 5 \quad 5) & & \vec{w}' = 5\vec{w} + 3\vec{u} & = (0 \quad 28 \quad 28) \end{array}$$

$$\begin{array}{llcl} & \vec{u}'' & = & (-5 \quad 1 \quad 1) \\ \rightarrow & \vec{v}'' & = & (0 \quad 7 \quad 7) \\ & \vec{w}'' = \vec{w}' - 4\vec{v}' & = & (0 \quad 0 \quad 0) \end{array}$$

Wir erhalten in der untersten Zeile einen Nullvektor. Die Vektoren sind komplanar.
Diese Linearkombination verfolgen wir nun rückwärts:

$$\vec{w}'' = \vec{w}' - 4\vec{v}' = (5\vec{w} + 3\vec{u}) - 4 \cdot (5\vec{v} + 2\vec{u}) = -5\vec{u} - 20\vec{v} + 5\vec{w} = \vec{0}$$

3. Gauss-Verfahren: Gleichungen lösen **K9C5RL**

Bestimmen Sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform mit dem Gaussverfahren.
Lösen Sie dann das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

(a)

$$\left|\begin{array}{rrrcr} x & -4y & -2z & = & -25 \\ & -3y & +6z & = & -18 \\ 7x & -13y & -4z & = & -85 \end{array}\right|$$

(b)

$$\left|\begin{array}{rrrcr} -3x & +y & -z & = & -1 \\ +9x & -5y & +6z & = & -3 \\ +6x & +8y & +7z & = & -8 \end{array}\right|$$

Lösung:

(a) Wir eliminieren zuerst die x-Komponenten:

$$\left|\begin{array}{crrrcr} L_1' : & x & -4y & -2z & = & -25 \\ L_2' = L_2 : & & -3y & +6z & = & -18 \\ L_3' = L_3 - 7L_1 : & & 15y & +10z & = & 90 \end{array}\right|$$

Jetzt eliminieren wir die y-Komponente:

$$\left|\begin{array}{crrrcr} L_1'' : & x & -4y & -2z & = & -25 \\ L_2'' = L_2' : & & -3y & +6z & = & -18 \\ L_3'' = L_3' + 5L_2' : & & & 40z & = & 0 \end{array}\right|$$

Das ist die Dreieck-Form und wir können von unten nach oben einsetzen. Das ergibt:

$$z = 0 \;\Rightarrow\; -3y = -18\ (L_2'') \;\Rightarrow\; y = 6 \;\text{ und } x - 4 \cdot 6 = -25 \Rightarrow x = -1$$

(b) Wir eliminieren zuerst die x-Komponenten:

$$\left|\begin{array}{crrrcr} L_1' : & -3x & +y & -z & = & -1 \\ L_2' = L_2 + 3L_1 : & & -2y & +3z & = & -6 \\ L_3' = L_3 + 2L_1 : & & 10y & +5z & = & -10 \end{array}\right|$$

Jetzt eliminieren wir die y-Komponente:

$$\left|\begin{array}{crrrcr} L_1'' : & -3x & +y & -z & = & -1 \\ L_2'' : & & -2y & +3z & = & -6 \\ L_3'' = L_3' + 5L_2' : & & & 20z & = & -40 \end{array}\right|$$

Das ist die Dreieck-Form und wir können von unten nach oben einsetzen. Das ergibt:

$$20z = -40 \;\Rightarrow\; z = -2 \Rightarrow\; -2y + 3 \cdot (-2) = -6 \Rightarrow y = 0$$

und schliesslich (L_1''):

$$-3x + 0 - (-2) = -1 \;\rightarrow x = 1$$

4. Lineare Abhängigkeit von Funktionen **YQX6G2**

Untersuchen Sie, ob die Funktionen f und h linear abhängig sind.

(a) $\begin{vmatrix} f(x) & = & (2x+3)^2 \\ g(x) & = & 8x^2+24x+18 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} f(x) & = & (x+3)^2 \\ g(x) & = & 2x^2+11x+18 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} f(x) & = & \frac{1}{x^2} \\ g(x) & = & \frac{1}{x} \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} f(x) & = & (x+1)^3 \\ g(x) & = & -x^3-4x^2-3x-1 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} f(x) & = & (1-x)^3 \\ g(x) & = & x^3-3x^2+3x-1 \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} f(x) & = & \sqrt{x^2-2x+1} \\ g(x) & = & 1-x \end{vmatrix}$ $(x \geq 0)$

Lösung:

(a) $f(x) = 4x^2+12x+9$, also $2f(x)-g(x) = 0$, d.h. die Funktionen sind linear abhängig.

(b) $f(x) = x^2+6x+9$, also $2f(x)-g(x) = x$, d.h. die Funktionen sind linear unabhängig.

(c) Die Funktionen sind linear unabhängig.

(d) $f(x) = x^3+3x^2+3x+1$, also $f(x)+g(x) = -x^2$, d.h. die Funktionen sind linear unabhängig.

(e) $f(x) = -x^3+3x^2-3x+1$, also $f(x)+g(x) = 0$, d.h. die Funktionen sind linear abhängig.

(f) $f(x) = \sqrt{(x-1)^2} = x-1$, also $f(x)-g(x) = 0$, d.h. die Funktionen sind linear abhängig.

5. Lineare Abhängigkeit bei Funktionen **S9WDUD**

Untersuchen Sie, ob die Funktionen f, g und h linear abhängig sind.

(a) $\begin{vmatrix} f(x) & = & -x\cdot(x+3)-4 \\ g(x) & = & 2x^2+7x+8 \\ h(x) & = & (x+2)^2 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} f(x) & = & x^2+2x+1 \\ g(x) & = & -2x^2-x \\ h(x) & = & 3x^2+3x+1 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} f(x) & = & \sqrt{x}-\frac{1}{x^2} \\ g(x) & = & -\frac{11}{x^2}-5\sqrt{x} \\ h(x) & = & \frac{5}{x^2}+3\sqrt{x} \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} f(x) & = & -2|x|+\frac{5}{x^2}-15\sqrt{x}-\frac{2}{x} \\ g(x) & = & \frac{1}{x^2}-5\sqrt{x} \\ h(x) & = & |x|-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x} \end{vmatrix}$

Lösung:

(a) Wir ordnen nach Potenzen und eliminieren systematisch die höchsten Potenzen:

$$\begin{vmatrix} f(x) & = & -x^2-3x-4 \\ g(x) & = & 2x^2+7x+8 \\ h(x) & = & x^2+4x+4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} g'(x) = g(x)+2f(x) & = & x \\ h'(x) = h(x)+f(x) & = & x \end{vmatrix}$$

Wir rechnen $g'(x)-h'(x) = 0$, d.h. die Funktionen sind linear abhängig.

(b) Wir ordnen nach Potenzen und eliminieren systematisch die höchsten Potenzen:

$$\begin{vmatrix} f(x) & = & x^2+2x+1 \\ g(x) & = & -2x^2-x \\ h(x) & = & 3x^2+3x+1 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} g'(x) = g(x)+2f(x) & = & 3x+2 \\ h'(x) = h(x)-3f(x) & = & -3x-2 \end{vmatrix}$$

Wir rechnen $g'(x) + h'(x) = 0$, d.h. die Funktionen sind linear abhängig.

(c) Wir ordnen die Funktionen und eliminieren systematisch:

$$\left| \begin{array}{lcr} f(x) & = & \sqrt{x} - \frac{1}{x^2} \\ g(x) & = & -5\sqrt{x} - \frac{11}{x^2} \\ h(x) & = & 3\sqrt{x} + \frac{5}{x^2} \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{lcr} g'(x) = g(x) + 5f(x) & = & -\frac{16}{x^2} \\ h'(x) = h(x) - 3f(x) & = & \frac{8}{x^2} \end{array} \right|$$

Wir rechnen $g'(x) + 2h'(x) = 0$, d.h. die Funktionen sind linear abhängig. Das hätten wir auch ohne Rechnung herausfinden können. Die verschiedenen "Sorten" von Funktionen sind $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x^2}$. Es gibt also nur zwei Sorten, d.h. zwei Dimensionen. Es sind aber drei "Vektoren" gegeben. Die müssen also linear abhängig sein.

(d) Wir ordnen die Funktionen und eliminieren systematisch:

$$\left| \begin{array}{lcc} f(x) & = & -2|x| + \frac{5}{x^2} - 15\sqrt{x} - \frac{2}{x} \\ g(x) & = & \frac{1}{x^2} - 5\sqrt{x} \\ h(x) & = & |x| - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc} g'(x) = g(x) & = & \frac{1}{x^2} - 5\sqrt{x} \\ f'(x) = f(x) + 2h(x) & = & \frac{3}{x^2} - 15\sqrt{x} \end{array} \right|$$

Und $3g'(x) - f'(x) = 0$, also sind die Funktionen linear abhängig