Serie 2 Musterlösung

Klasse: 1Ea, 1Eb, 1Sb — Datum: HS 17

1. Lineare Abhängigkeit — FTU53J

Werten Sie die Funktionen an den Stellen $x_1 = -4$, $x_2 = -2$ und $x_3 = 4$ aus und untersuchen Sie, ob die Funktionen linear abhängig sind.

(a) $\left|\begin{array}{rcl} f(x) & = & (x+4)^2 \\ g(x) & = & (x+2)^2 \\ h(x) & = & (x-4)^2 \end{array}\right|$

(c) $\left|\begin{array}{rcc} f(x) & = & (x+4)^2 \\ g(x) & = & -(x+2)\cdot(x+6)-4 \\ h(x) & = & -(x+2)\cdot(x+6) \end{array}\right|$

(b) $\left|\begin{array}{rcl} f(x) & = & (x-2)\cdot(x-4) \\ g(x) & = & (x+4)\cdot(x-4) \\ h(x) & = & (x+4)\cdot(x-2) \end{array}\right|$

(d) $\left|\begin{array}{rcl} f(x) & = & (x+1)^2 \\ g(x) & = & (x+2)^2 \\ h(x) & = & (x+3)^2 \end{array}\right|$

Lösung:

(a) $\left|\begin{array}{ccccc} x & | & -4 & -2 & 4 \\ f(x) & : & 0 & 4 & 64 \\ g(x) & : & 4 & 0 & 36 \\ h(x) & : & 64 & 36 & 0 \end{array}\right|$

Auf der Diagonalen stehen immer Nullen, sonst sind alle Einträge ungleich Null: Die Zeilen sind linear unabhängig — und damit die Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$ auch.

(b) $\left|\begin{array}{ccccc} x & | & -4 & -2 & 4 \\ f(x) & : & 48 & 0 & 0 \\ g(x) & : & 24 & -12 & -8 \\ h(x) & : & 0 & 0 & 16 \end{array}\right|$

Die erste Zeile hat einen Beitrag an erster Stelle, die letzte Zeile an letzter. Nur die mittlere Zeile hat einen Eintrag an zweiter Stelle: Die Zeilen sind linear unabhängig — und damit die Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$ auch.

(c) $\left|\begin{array}{ccccc} x & | & -4 & -2 & 4 \\ f(x) & : & 0 & 0 & 4 \\ g(x) & : & 4 & -4 & 0 \\ h(x) & : & 64 & -64 & -60 \end{array}\right|$

Die letzte Zeile kann durch die ersten beiden erzeugt werden:

$$-15\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}+16\begin{pmatrix}4\\-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}64\\-64\\-60\end{pmatrix}$$

also sind die Zeilen linear abhängig — und damit die Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$ auch.

(d) $\begin{vmatrix} x & | & -4 & -2 & 4 \\ f(x) & : & 9 & 4 & 1 \\ g(x) & : & 1 & 0 & 1 \\ h(x) & : & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$

Die Situation ist hier mit der Elimination zu entscheiden:

$$\begin{vmatrix} L_1 & : & 9 & 4 & 1 \\ L_2 & : & 1 & 0 & 1 \\ L_3 & : & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} L'_1 = L_2 & : & 1 & 0 & 1 \\ L'_2 = L_1 - 9L_2 & : & 0 & 4 & -8 \\ L'_3 = L_3 - 25L_2 & : & 0 & 36 & 24 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} L'_1 & : & 1 & 0 & 1 \\ L'_2 & : & 0 & 4 & -8 \\ L''_3 = L'_3 - 9L'_2 & : & 0 & 0 & 96 \end{vmatrix}$$

Die Zeilen sind linear unabhängig — und damit die Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$ auch.

2. Quadratische Interpolation **ECGP2Y**

Interpolieren Sie die Punkte mit einer Funktion

$$f(x) = a_1 \cdot f_1(x) + a_2 \cdot f_2(x) + a_3 \cdot f_3(x)$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -4 \\ 18 \end{pmatrix},\ \vec{R} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix},\ \vec{S} = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \end{pmatrix}$$

(a) $\begin{vmatrix} f_1(x) & = & (x+4)^2 \\ f_2(x) & = & (x+2)^2 \\ f_3(x) & = & (x-4)^2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} f(x) & = & (x-2)\cdot(x-4) \\ g(x) & = & (x+4)\cdot(x-4) \\ h(x) & = & (x+4)\cdot(x-2) \end{vmatrix}$

Lösung:

(a) Wir werten die Funktionen an den gegebenen Stellen aus:

$$\begin{vmatrix} x & | & -4 & -2 & 4 \\ f(x) & : & 1 & 1 & 1 \\ g(x) & : & -4 & -2 & 4 \\ h(x) & : & 16 & 4 & 16 \end{vmatrix}$$

Für die Stelle $x = -4$ muss gelten:

$$a_1 \cdot f(-4) + a_2 \cdot g(-4) + a_3 \cdot h(-4) = 18 \Rightarrow a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot (-4) + a_3 \cdot 16 = 18$$

Genau gleich erhalten wir für die weiteren Stellen noch zwei Gleichungen. Wir schreiben das Gleichungssystem als erweiterte Koeffizientenmatrix und eliminieren:

$$\left|\begin{array}{llccc|c} & & a_1 & a_2 & a_3 & y \\ \hline L_1: & x=-4 & :\ 1 & -4 & 16 & 18 \\ L_2: & x=-2 & :1 & -2 & 4 & 6 \\ L_3: & x=4 & :1 & 4 & 16 & 18 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{lccc|c} L_1' = L_1: & 1 & -4 & 16 & 18 \\ L_2' = L_2 - L_1: & 0 & 2 & -12 & -12 \\ L_3' = L_2 - L_1: & 0 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

$$\rightarrow \left|\begin{array}{lccc|c} L_1'' = L_1': & 1 & -4 & 16 & 18 \\ L_2'' = L_3': & 0 & 8 & 0 & 0 \\ L_3'' = L_2' - L_3: & 0 & 0 & -12 & -12 \end{array}\right|$$

Wir setzen von unten nach oben ein und erhalten $a_1 = 2,\ a_2 = 0$ und $a_3 = 1$ also

$$f(t) = 2 \cdot f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) + 1 \cdot f_3(x)$$

.

(b) Wir werten die Funktionen an den gegebenen Stellen aus:

$$\left|\begin{array}{lcccc} x & | & -4 & -2 & 4 \\ f(x) & : & 16 & 0 & 0 \\ g(x) & : & 0 & -12 & 0 \\ h(x) & : & 0 & 0 & 48 \end{array}\right|$$

Die Gleichungen, die sich daraus ergeben sind einfach zu lösen z.B.

$$a_1(16) = 18 \ \Rightarrow\ a_1 = \frac{18}{16} = \frac{9}{8}$$

Genau gleich erhalten wir $a_2 = -\frac{1}{2}$ und $a_3 = \frac{3}{8}$, also

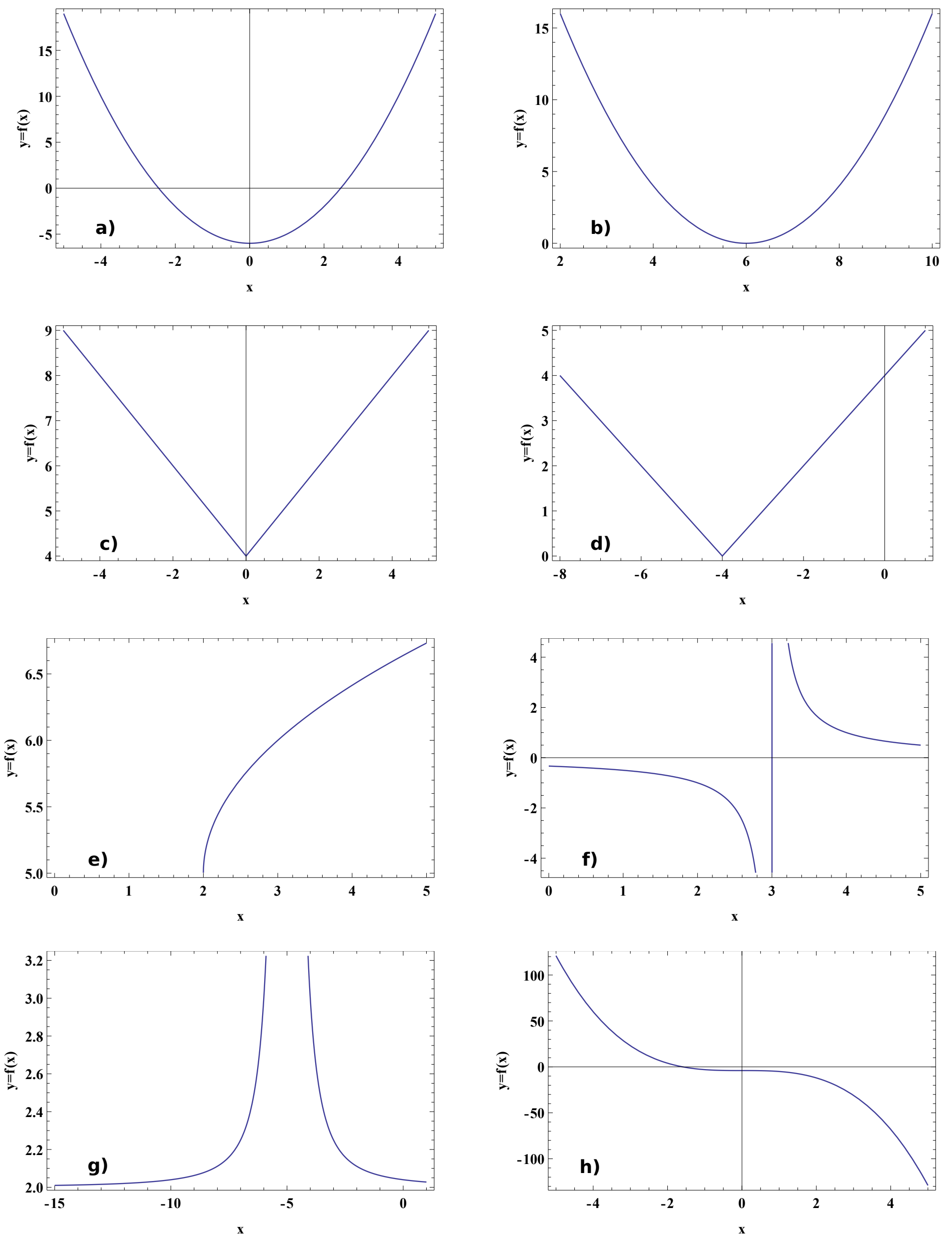
$$f(t) = \frac{9}{8} \cdot f_1(x) - \frac{1}{2} \cdot f_2(x) + \frac{3}{8} \cdot f_3(x)$$

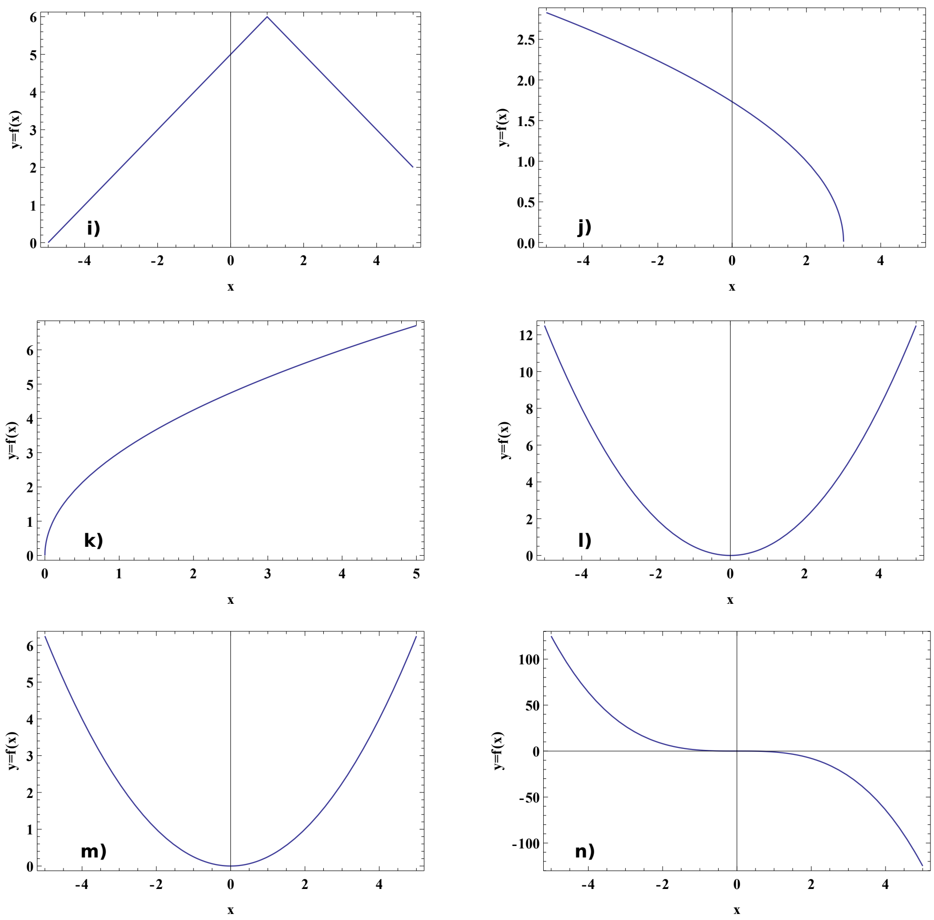
3. Transformationen von Funktionen **HUPT5D**

Zeichen Sie die Grafen der Funktionen. Benutzen Sie dazu die Grafiken der Grundfunktionen. Zeichnen Sie ohne zuerst eine Liste von Punkten zu berechnen und ohne die Hilfe von Matlab.

(a) $f(x) = x^2 - 6$
(b) $f(x) = (x-6)^2$
(c) $f(x) = |x| + 4$
(d) $f(x) = |x+4|$
(e) $f(x) = \sqrt{x-2} + 5$
(f) $f(x) = \frac{1}{x-3}$
(g) $f(x) = \frac{1}{(x+5)^2} + 2$
(h) $f(x) = -x^3 - 4$
(i) $f(x) = 6 - |x-1|$
(j) $f(x) = \sqrt{3-x}$
(k) $f(x) = 3\sqrt{x}$
(l) $f(x) = \frac{x^2}{2}$
(m) $f(x) = (\frac{x}{2})^2$
(n) $f(x) = -x^3$

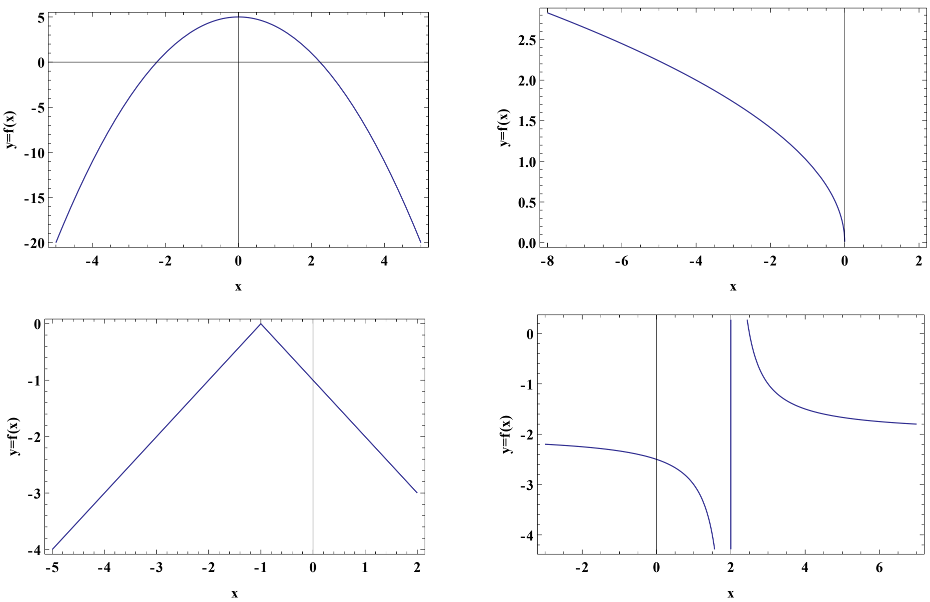
Lösung:


a)
b)
c)
d)
e)
f)
g)
h)
y=f(x)
x



4. Funktionen auslesen ZYI9D2

Schreiben Sie den Funktionsterm $f(x)$ auf.



Lösung:

(a) $f(x) = 5 - x^2$

(b) $f(x) = \sqrt{-x}$

(c) $f(x) = -|x + 1|$

(d) $f(x) = \frac{1}{x-2} - 2$