Serie 3 Musterlösung

Klasse: 1Ea, 1Eb, 1Sb — Datum: HS 17

1. Norm, Betrag und Normierung — Y25243

Berechne die fehlenden Grössen. Die Vektoren werden in darauf folgenden Unteraufgaben wieder verwendet.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $|\vec{a}| =?$

(b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\left|\vec{b}\right| =?$

(c) $\left|\vec{b}\right| = 2$, $\left|(-3)\cdot\vec{b}\right| =?$

(d) $\left|\lambda\cdot\vec{b}\right| = 5$, $\lambda=?$

(e) $|\vec{c}| = 4$, $|5\cdot\vec{c}| =?$

(f) $|\lambda\cdot\vec{c}| = 1$, $\lambda=?$

(g) $\left|\vec{d}\right| = 2$, $\left|\frac{\vec{d}}{2}\right| =?$

(h) $|\vec{e}| = 6$, $\left|\frac{\vec{e}}{|\vec{e}|}\right| =?$

(i) $\left|\vec{f}\right| = 2$, $\left|\frac{\vec{f}}{\left|\vec{f}\right|^2}\right| =?$

Lösung:

(a) $|\vec{a}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5.$

(b) $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{2+2} = 2.$

(c) $\left|(-3)\cdot\vec{b}\right| = 3\cdot 2 = 6.$

(d) Wir lösen die Gleichung $|\lambda|\cdot\underbrace{\left|\vec{b}\right|}_{=2} = 5$ und erhalten $|\lambda| = \frac{5}{2}$. Also $\lambda = \pm\frac{5}{2}$.

(e) $|5\cdot\vec{c}| = 5\cdot 4 = 20.$

(f) Wir lösen die Gleichung $|\lambda|\cdot\underbrace{|\vec{c}|}_{=4} = 1$ und erhalten $|\lambda| = \frac{1}{4}$. Also $\lambda = \pm\frac{1}{4}$.

(g) $\left|\frac{\vec{d}}{2}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\vec{d}\right| = 1.$

(h) Wir rechnen

$$\left|\frac{\vec{e}}{|\vec{e}|}\right| = \frac{1}{|\vec{e}|}\cdot|\vec{e}| = 1\,.$$

Es gilt immer: $\left|\frac{\vec{e}}{|\vec{e}|}\right| = 1$ (Ausnahme $|\vec{e}| = 0$). Wir hätten die Angabe $|\vec{e}| = 6$ gar nicht gebracht.

(i) Wir rechnen

$$\left|\frac{\vec{f}}{\left|\vec{f}\right|^2}\right| = \frac{1}{\left|\vec{f}\right|^2}\cdot\left|\vec{f}\right| = \frac{1}{2^2}\cdot 2 = \frac{1}{2}\,.$$

Wir halten also fest

$$\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = \left|\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}\right| = \frac{1}{|\vec{a}|}\cdot|\vec{a}| = 1$$

2. Normierung **H19WT3**

Normiere die Vektoren.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$

(b) $\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

(c) $\vec{c} = 2\cdot\begin{pmatrix}-7\\24\end{pmatrix}$

(d) $\vec{d} = 5\cdot\begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix}$

Lösung:

(a) $|\vec{a}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$. Also

$$\vec{a}^{(n)} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}\ .$$

Meist werden die weiteren Rechnungen vereinfacht, wenn man nicht jede Komponente einzeln mit dem Vorfaktor multipliziert, also lieber

$$\vec{a}^{(n)} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix} \text{ statt } \vec{a}^{(n)} = \begin{pmatrix}-4/5\\3/5\end{pmatrix}$$

(b) $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Also

$$\vec{b}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\ .$$

(c) Die Rechnung vereinfacht sich, wenn wir den Vorfaktor weglassen $\vec{c}' = \begin{pmatrix}-7\\24\end{pmatrix}$.
Der normierte Vektor wird ja nur eine Richtung angeben und die ist bei $\vec{c}$ und $\vec{c}'$ gleich.
$|\vec{c}'| = \sqrt{7^2+24^2} = 25$. Also

$$\vec{c}^{(n)} = \frac{1}{25}\cdot\begin{pmatrix}-7\\24\end{pmatrix}\ .$$

(d) Wie Aufgabe c): $\left|\vec{d}'\right| = \sqrt{5^2+12^2} = 13$. Also

$$\vec{d}^{(n)} = \frac{1}{13}\cdot\begin{pmatrix}5\\-12\end{pmatrix}\ .$$

3. Winkel zwischen Vektoren (Skalarprodukt) **PI7SKM**

Zeichne die Vektoren in ein orthogonales Koordinatensystem ein, bestimme den Zwischenwinkel aus der Graphik und vergleiche mit der Rechnung.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7.46 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -0.52 \\ 1.93 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3.86 \\ -1.04 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{e} = \begin{pmatrix} -1.93 \\ -2.30 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} 5.20 \\ 3 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0.087 \\ -0.996 \end{pmatrix}$, $\vec{h} = \begin{pmatrix} -0.26 \\ 0.97 \end{pmatrix}$

Lösung:

Wir verwenden $\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{a}\odot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right)$.

(a) $\alpha = \arccos\left(\frac{5.464}{|1.41|\cdot|7.73|}\right) = 60°$

(b) $\alpha = 90°$

(c) $\alpha = 160°$

(d) $\alpha = 170°$

Wir sehen, wenn zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen, ist ihr Skalarprodukt 0.

4. Schatten **ZNWAXR**

Zeichne die Vektoren in ein orthogonales Koordinatensystem ein, bestimme den Schatten von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ und vergleiche mit der Rechnung.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) Wir normieren den Vektor $\vec{a}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Jetzt berechnen wir den Schatten

$$\vec{a}' \odot \vec{b} = 9$$

(b) $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \odot \vec{b} = -1$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \odot \vec{b} = 0$ Der Schatten verschwindet, wieso? Wenn zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen, ist ihr Skalarprodukt 0 - unabhängig von ihrer Länge.

(d) $\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{10} \odot \vec{b} = -5$. Das Skalarprodukt wird negativ, falls die beiden Vektoren einen Zwischenwinkel von mehr als 90° einschliessen.

5. Senkrechte Vektoren in 2D IXRK15

Bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf dem gegebenen Vektor steht.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

Komponenten vertauschen und bei *einer* Komponente das Vorzeichen tauschen:

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

6. Skalarprodukt, Orthogonalität ASKXJE

Bestimme die Vektoren in der Liste, die zu $\vec{v}$ *orthogonal* sind.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{a} = \begin{pmatrix} 263 \\ -35 \\ -44 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -121 \\ 15 \\ -48 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 71 \\ 5 \\ -48 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \vec{v} \odot \vec{a} &= 0 \\ \vec{v} \odot \vec{b} &= -142 \\ \vec{v} \odot \vec{c} &= 0 \end{aligned}$$

Also stehen $\vec{a}$ und $\vec{c}$ orthogonal zu $\vec{v}$

7. Projektion 69A4X4

Berechnen Sie den Anteil von $\vec{b}$, der parallel zu $\vec{a}$ steht.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) Um den parallelen Anteil zu berechnen verwenden wir die Formel

$$\vec{f} = (\vec{b} \odot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \ .$$

Die Klammern sind hier zwar unnötig, sie zeigen aber die Struktur der Formel: in der Klammer steht die Länge des Schattens, hinter der Klammer der normierte Einheitsvektor. In der Praxis ist es einfacher den Ausdruck umzuformen zu

$$\vec{f} = \frac{\vec{b} \odot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \ .$$

Hier ist die Struktur: Vorfaktor mal Vektor.
Wir erhalten hier

$$|\vec{a}| = 5 \text{ und } \vec{a} \odot \vec{b} = 45$$

also

$$\vec{f} = \frac{45}{5^2} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

(b) Wir berechnen zuerst

$$|\vec{a}| = 3 \text{ und } \vec{a} \odot \vec{b} = 45$$

also

$$\vec{f} = \frac{45}{3^2} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

(c) Wir berechnen zuerst

$$|\vec{a}| = \sqrt{10} \text{ und } \vec{a} \odot \vec{b} = 0$$

also

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen senkrecht aufeinander.

(d) Wir berechnen zuerst

$$|\vec{a}| = 10 \text{ und } \vec{a} \odot \vec{b} = -50$$

also

$$\vec{f} = \frac{-50}{10^2} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Wir stellen folgendes fest:
Die Ebene kann in zwei Hälften geteilt werden: die eine Hälfte, die mit $\vec{a}$ weniger als $90°$ einschliesst und übrige Halbebene. Dann liegt die Projektion $\vec{f} = \cdot \frac{\vec{b} \odot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$ und der Vektor $\vec{b}$ jeweils in der selben Halbebene: Sie schliessen weniger als — bis maximal — $90°$ miteinander ein.

8. Spiegelung **2DY9EN**

Spiegle $\vec{B}$ an der Geraden durch den Ursprung und $\vec{A}$.

(a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 10 \\ 28 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) Da die Gerade durch den Ursprung geht, können wir $\vec{A}$ als den Richtungsvektor der Geraden nehmen. Der Vektor senkrecht zur Geraden ist $\vec{n}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$. Damit können wir den Anteil von $\vec{B}$ berechnen, der zu Geraden senkrecht steht:

$$\vec{l} = \frac{\vec{B} \odot \vec{n}'}{|\vec{n}'|^2} \cdot \vec{n}' = \frac{-10}{|5|^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \ .$$

Dieser Vektor zeigt *immer* von der Gerade in Richtung $\vec{B}$. Der gespiegelte Punkt ist also

$$\vec{B}'' = \vec{B} - 2 \cdot \vec{l} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(b) Der Vektor senkrecht zur Geraden ist $\vec{n}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Damit können wir den Anteil von $\vec{B}$ berechnen, der zu Geraden senkrecht steht:

$$\vec{l} = \frac{\vec{B} \odot \vec{n}'}{|\vec{n}'|^2} \cdot \vec{n}' = \frac{20}{|\sqrt{10}|^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix} \ .$$

Der gespiegelte Punkt ist also

$$\vec{B}'' = \vec{B} - 2 \cdot \vec{l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(c) Der Vektor senkrecht zur Geraden ist $\vec{n}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Damit können wir den Anteil von $\vec{B}$ berechnen, der zu Geraden senkrecht steht:

$$\vec{l} = \frac{\vec{B} \odot \vec{n}'}{|\vec{n}'|^2} \cdot \vec{n}' = \frac{-40}{|\sqrt{5}|^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \end{pmatrix} \ .$$

Der gespiegelte Punkt ist also

$$\vec{B}'' = \vec{B} - 2 \cdot \vec{l} = \begin{pmatrix} 16 \\ -12 \end{pmatrix}$$

(d) Der Vektor senkrecht zur Geraden ist $\vec{n}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Damit können wir den Anteil von $\vec{B}$ berechnen, der zu Geraden senkrecht steht:

$$\vec{l} = \frac{\vec{B} \odot \vec{n}'}{|\vec{n}'|^2} \cdot \vec{n}' = \frac{104}{|\sqrt{13}|^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix} \ .$$

Der gespiegelte Punkt ist also

$$\vec{B}'' = \vec{B} - 2 \cdot \vec{l} = \begin{pmatrix} -22 \\ -20 \end{pmatrix}$$