Serie 7, Musterlösung

Klasse: 1Ea, 1Eb, 1Sb Datum: HS 17

1. Lineare Interpolation D22NHF

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden durch die Punkte $\vec{P}$ und $\vec{Q}$.

(a) $\vec{P} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ -4 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) Funktion: $y(x) = m \cdot x + c$.

$$\left|\begin{array}{cc|c} m & c & y_i \\ \hline -1 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{array}\right| .$$

Wir eliminieren und erhalten $m = 0.166$ und $c = 2.833$, also

$$y(x) = -0.1667 \cdot x + 2.833$$

(b) Funktion: $y(x) = m \cdot x + c$.

$$\left|\begin{array}{cc|c} m & c & y_i \\ \hline 1 & 0.5 & 2 \\ 1 & 0.6 & -4 \end{array}\right| .$$

Wir eliminieren und erhalten $m = -60$ und $c = 32$, also

$$y(x) = 32 - 60 \cdot x$$

2. Quadratische Interpolation I 7A6MFS

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Parabel durch die Punkte $\vec{P}, \vec{Q}$ und $\vec{R}$.

(a) $\vec{P} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\vec{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 103/9 \end{pmatrix}$, $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 29 \end{pmatrix}$, $\vec{R} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 475/9 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{P} = \begin{pmatrix} -12/5 \\ 21.6006 \end{pmatrix}$, $\vec{Q} = \begin{pmatrix} -2 \\ 20.0004 \end{pmatrix}$, $\vec{R} = \begin{pmatrix} -8/5 \\ 18.4003 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) Funktion: $y(x) = ax^2 + b \cdot x + c$.

$$\left|\begin{array}{ccc|c} a & b & c & y_i \\ \hline 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 13 \end{array}\right| .$$

Wir eliminieren und erhalten $a = -2$, $b = 5$ und $c = 10$, also

$$y(x) = -2x^2 + 5x + 10$$

(b) Funktion: $y(x) = ax^2 + b \cdot x + c$.

$$\left|\begin{array}{ccc|c} a & b & c & y_i \\ \hline (4/3)^2 & 4/3 & 1 & 103/9 \\ 2^2 & 2 & 1 & 29 \\ (8/3)^2 & 8/3 & 1 & 475/9 \end{array}\right| .$$

Wir eliminieren und erhalten $a = 7$, $b = 3$ und $c = -5$, also

$$y(x) = 7 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 5$$

(c) Funktion: $y(x) = ax^2 + b \cdot x + c$.

$$\left|\begin{array}{ccc|c} a & b & c & y_i \\ \hline (-12/5)^2 & -12/5 & 1 & 21.6006 \\ (-2)^2 & -2 & 1 & 20.0004 \\ (-8/5)^2 & -8/5 & 1 & 18.4003 \end{array}\right| .$$

Wir eliminieren und erhalten $a = 0.0003$, $b = -3.9991$ und $c = 12.0009$, also

$$y(x) = 0.0003 \cdot x^2 - 3.9991 \cdot x + 12.0009$$

3. Quadratische Interpolation II **X77GKN**

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung einer Parabel, die folgende Kriterien erfüllt:

(a) Parabel der Form $f(x) = a \cdot x^2 + 4x + c$ durch die Punkte $\vec{P} = \begin{pmatrix} -2 \\ 30 \end{pmatrix}$ und $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 46 \end{pmatrix}$

(b) Der Scheitelpunkt liegt bei $\vec{S} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und ein weiterer Punkt auf der Parabel ist $\vec{P} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

(c) Die Parabel ist symmetrisch bezüglich der y-Achse und verläuft durch die Punkte $\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{Q} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

(a) Funktion: $y(x) = ax^2 + 4 \cdot x + c$.

$$\left|\begin{array}{cc|c} a & c & y_i - 4x_i \\ \hline (-2)^2 & 1 & 38 \\ (2)^2 & 1 & 38 \end{array}\right| .$$

Wir eliminieren und erhalten $a + \frac{1}{4}b = 9.5$. a ist also eine Pivot-Variable und c eine freie Variable. Wir bestimmen den Aufpunkt ($c = 0$):

$$a + 0 = 9.5$$

und den Richungsvektor ($c = 1$):

$$a + \frac{1}{4} = 0 \;\Rightarrow\; a = -\frac{1}{4}$$

Die Lösung für die Koeffizienten ist also

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.5 - \lambda \\ 4\lambda \end{pmatrix}$$

Die Funktion ist also

$$y(x) = (9.5 - \lambda) \cdot x^2 + 4x + 4\lambda$$

(b) Funktion: $y(x) = ax^2 + b \cdot x + c$. Die Ableitung dieser Funktion am Scheitelpunkt verschwinden, also $y'(x) = 2a \cdot x + b$ und $2 \cdot a \cdot 2 + b = 0$.

$$\left|\begin{array}{ccc|c} a & b & c & y_i \\ \hline 2^2 & 2 & 1 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 & -3 \\ 2 \cdot 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right| .$$

Wir eliminieren und erhalten $a = -4$, $b = 16$ und $c = -15$.

(c) Funktion: $y(x) = ax^2 + b \cdot x + c$. Eine gerade Funktion kann nur aus geraden Summanden bestehen. Deshalb beschränken wir uns auf gerade Funktionen, d.h x^2 und 1. Jetzt lautet die Funktion also noch $y(x) = ax^2 + c$

$$\left|\begin{array}{cc|c} a & c & y_i \\ \hline 1^2 & 1 & 4 \\ (-2)^2 & 1 & 1 \end{array}\right| .$$

Wir eliminieren und erhalten $a = -1$ und $c = 5$, also $y(x) = -x^2 + 5$

4. Interpolation **D72H3S**

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung durch die Punkte $\vec{P}, \vec{Q}$ und $\vec{R}$.

(a) $f(x) = a + b \cdot \cos(x) + c \cdot \sin(x)$ und

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \ \vec{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

(b) $f(x) = a \cdot (x-2) \cdot (x-8) + b \cdot (x-4) \cdot (x-8) + c \cdot (x-4) \cdot (x-2)$ und

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 4 \\ 103 \end{pmatrix}, \ \vec{Q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 29 \end{pmatrix}, \ \vec{R} = \begin{pmatrix} 8 \\ 475 \end{pmatrix}$$

(c) $f(x) = a + b \cdot e^x + c \cdot e^{-x}$ und

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -12 \\ 21.6 \end{pmatrix}, \ \vec{Q} = \begin{pmatrix} -2 \\ 20.0 \end{pmatrix}, \ \vec{R} = \begin{pmatrix} -8 \\ 18.4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a) Wir werten die Funktion an den drei Stellen aus und erhalten

$$\left| \begin{array}{rcl} a + b \cdot \cos(-1) + c \cdot \sin(-1) & = & 3 \\ a + b \cdot \cos(0) + c \cdot \sin(0) & = & 10 \\ a + b \cdot \cos(1) + c \cdot \sin(1) & = & 13 \end{array} \right|$$

und als erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left| \begin{array}{ccc|c} a & b & c & y_i \\ \hline 1 & \cos(-1) & \sin(-1) & 3 \\ 1 & \cos(0) & \sin(0) & 10 \\ 1 & \cos(1) & \sin(1) & 13 \end{array} \right| .$$

Wir eliminieren und erhalten $a = 5.6493$, $b = 4.3507$, $c = 5.9420$, oder also

$$f(x) = 5.6493 + 4.3507 \cdot \cos(x) + 5.9420 \cdot \sin(x)$$

(b) Wir werten die Funktion an den drei Stellen aus und erhalten

$$\left| \begin{array}{cccrr} -8 \cdot a & +0 & +0 & = & 103 \\ 0 & +12 \cdot b & +0 & = & 29 \\ 0 & +0 & +24 \cdot c & = & 475 \end{array} \right|$$

Wir brauchen nicht zu eliminieren, sondern nur nach den Varablen aufzulösen. Es ergibt sich $a = -12.8750$, $b = 2.4167$, $c = 19.7917$, oder also

$$f(x) = -12.8750 \cdot (x-2) \cdot (x-8) + 2.4167 \cdot (x-4) \cdot (x-8) + 19.7917 \cdot (x-4) \cdot (x-2)$$

oder durch Ausmultiplizieren

$$f(x) = 9.3333 \cdot x^2 - 19 \cdot x + 29.6667$$

(c) Wir werten die Funktion an den drei Stellen aus und erhalten

$$\left| \begin{array}{rcl} a + b \cdot e^{-12} + c \cdot e^{-(-12)} & = & 21.6 \\ a + b \cdot e^{-2} + c \cdot e^{-(-2)} & = & 20 \\ a + b \cdot e^{-8} + c \cdot e^{-(-8)} & = & 18.4 \end{array} \right|$$

und als erweiterte Koeffizientenmatrix

a	b	c	y_i
1	0.0000061442	162754.79	21.6
1	0.1353352832	7.389056	20
1	0.0003354626	2980.958	18.40

.

Wir eliminieren und erhalten $a = 18.336096876283957$, $b = 0.000020053649794$, $c = 5.9420$, oder also

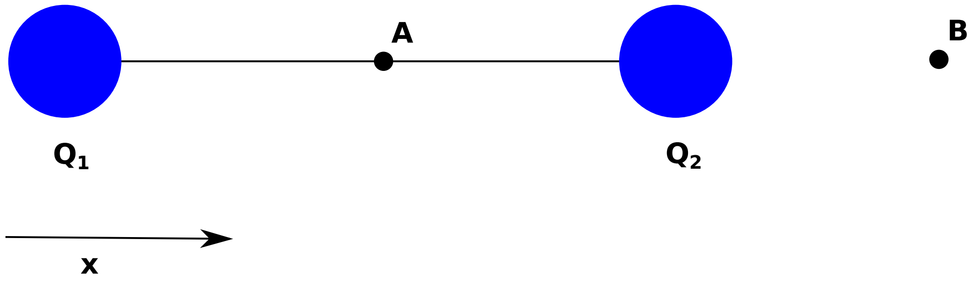
$$f(x) = 18.336096876283957 + 12.293578632143634 \cdot e^{x} + 0.000020053649794 \cdot e^{-x}$$

5. Ladungen bestimmen **8LQVJM**

Zwei Ladungen sind in der Distanz 1 m auf einem Stab angebracht. Die Feldstärke in der Mitte (bei Punkt $\vec{A}$) beträgt $-1.8 \cdot 10^6$N/C, 50 cm entfernt vom Stab beim Punkt $\vec{B}$ in der Achse der Stabes hingegen $-2.2 \cdot 10^6$N/C. Wie gross sind die zwei Ladungen Q_1 und Q_2?
Betrag der Feldstärke einer Punktladung

$$E(x) = k \cdot \frac{Q}{x^2} \text{ mit } k = 8.988 \cdot 10^9 \, \frac{\mathrm{N\,m}^2}{\mathrm{C}^2}$$

Beachten Sie, dass dieser Ausdruck nur den Betrag, nicht aber das Vorzeichen des Feldes ergibt.



Lösung:
Wir stellen das Gleichungssystem auf:

$$\left| \begin{array}{lrrcl} \text{bei A:} & k \cdot \frac{Q_1}{|0.5|^2} & -k \cdot \frac{Q_2}{|0.5|^2} & = & -1.8 \cdot 10^6 \\ \text{bei B:} & -k \cdot \frac{Q_1}{|1.5|^2} & -k \cdot \frac{Q_2}{|0.5|^2} & = & -2.2 \cdot 10^6 \end{array} \right|$$

Da wir alles strikt in SI Eiheiten schreiben, brauchen wir die Einheiten nicht mitzuführen. Die erweiterte Koefffizienten-Matrix ist also (die Unbekannten sind Q_1 und Q_2):

$$\begin{vmatrix} 1.7976 \cdot 10^6 & -3.5952 \cdot 10^6 & -1.7976 \cdot 10^6 \\ -1.7976 \cdot 10^6 & -399467 & -2.19707 \cdot 10^6 \end{vmatrix}$$

Wir lösen das Gleichungssystem

und erhalten $Q_1 = -0.0001$ C und $Q_2 = -0.00005$ C.