Serie 9 Musterlösung

Klasse: 1Ea, 1Eb, 1Sb — Datum: 11. Dezember 2017

1. Effiziente Berechnung der Determinante — 245158

Berechnen Sie die Determinante effizient. Bringen Sie dazu die Matrix in Dreiecksform.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 25 & 33 \\ 4 & 14 & 24 & 34 & 44 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 14 \\ 1 & 3 & 5 & 11 & 15 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Beginn: Vorfaktor $f = 1$. Elimination:

$$\mathbf{R}' = \left[\begin{array}{lccccc} Z_1' = Z_1 : & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ Z_2' = Z_2 - 3 \cdot Z_1 : & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ Z_3' = Z_3 - 4 \cdot Z_1 : & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ Z_4' = Z_4 - Z_1 : & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ Z_5' = Z_5 - Z_1 : & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \end{array}\right]$$

Wir ordnen die Zeilen:

$$\mathbf{R}' = \left[\begin{array}{lccccc} Z_1'' = Z_1' : & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ Z_2'' = Z_3' : & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ Z_3'' = Z_2' : & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ Z_4'' = Z_5' : & 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ Z_5'' = Z_4' : & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

Das sind zwei Vertauschungen: $f' = f \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$. Die Matrix ist jetzt in Zeilenstufenform und die Determinante ist also

$$\det(\mathbf{R}'') = 1 \cdot 2 \cdot 0 \cdot 4 \cdot 5 \cdot f' = 0$$

2. Effiziente Berechnung der Determinante — 519361

Berechnen Sie die Determinante effizient. Bringen Sie dazu die Matrix in Dreiecksform.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & -11 & -17 \\ 2 & 6 & 13 & 39 & 55 \\ 2 & 6 & 10 & 14 & 28 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Beginn: Vorfaktor $f = 1$. Wir teilen die erste Zeile durch 3

$$\mathbf{R}' = \left[\begin{array}{lccccc} Z_1' = Z_1 \cdot \frac{1}{3} : & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ Z_2' = Z_2 : & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ Z_3' = Z_3 : & 2 & 6 & -5 & -11 & -17 \\ Z_4' = Z_4 : & 2 & 6 & 13 & 39 & 55 \\ Z_5' = Z_5 : & 2 & 6 & 10 & 14 & 28 \end{array}\right].$$

Dadurch ändert sich der Vorfaktor $f' = f \cdot \frac{1}{1/3} = 3$ Jetzt eliminieren wir

$$\mathbf{R}'' = \begin{bmatrix} Z_1'' = Z_1' : & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ Z_2'' = Z_2' - 2 \cdot Z_1 : & 0 & -4 & -8 & -12 & -16 \\ Z_3'' = Z_3' - 2 \cdot Z_1 : & 0 & 0 & -15 & -25 & -35 \\ Z_4'' = Z_4' - 2Z_1' : & 0 & 0 & 3 & 25 & 37 \\ Z_5'' = Z_5' - 2Z_1' : & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Um weiter eliminieren zu können teilen wir die dritte Zeile durch 5:

$$\mathbf{R}''' = \begin{bmatrix} Z_1''' = Z_1'' : & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ Z_2''' = Z_2'' : & 0 & -4 & -8 & -12 & -16 \\ Z_3''' = Z_3'' \cdot \frac{1}{5} : & 0 & 0 & -3 & -5 & -7 \\ Z_4''' = Z_4'' : & 0 & 0 & 3 & 25 & 37 \\ Z_5''' = Z_5'' : & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Der Vorfaktor ändert sich dadurch $f'' = f \cdot \frac{1}{1/5} = 15$. Elimination:

$$\mathbf{R}'''' = \begin{bmatrix} Z_1'''' = Z_1''' : & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ Z_2'''' = Z_2''' - 2 \cdot Z_1 : & 0 & -4 & -8 & -12 & -16 \\ Z_3'''' = Z_3''' : & 0 & 0 & -3 & -5 & -7 \\ Z_4'''' = Z_4''' + Z_3''' : & 0 & 0 & 0 & 20 & 30 \\ Z_5'''' = Z_5''' : & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Die Matrix ist jetzt in Zeilenstufenform und die Determinante ist also

$$\det(\mathbf{R}'''') = 1 \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot 20 \cdot 10 \cdot \underbrace{15}_{f''} = 36000$$

3. Entwicklungssatz von Laplace **193792**

Bestimmen Sie die Determinante der Matrix **A**. Benutze den Entwicklungssatz von Laplace.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung

$$\det(\mathbf{A}) = 2 \cdot \det(\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}) - 2 \cdot \det(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}) = 2 \cdot 22 - 2 \cdot (-36) = 116$$

4. Determinanten von Dreiecksmatrizen 341887

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen. Benutzen Sie den Satz von Sarrus, die linearität der Determinante und den Satz über die Determinante von Dreiecksmatrizen.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ -1 & x & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & -1 & x & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & x & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x+b_5 \end{pmatrix}$

Lösung

(a) $\det(\mathbf{A}) = 0 - 21 + 0 - 0 + 9 + 0 = -12$

(b) $\det\left(\frac{1}{2} \cdot \mathbf{A}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \det(\mathbf{A}) = \frac{1}{8} \cdot (-12) = -\frac{3}{2}$

(c) Die Matrix wird auf obere Dreiecksform gebracht. Dazu wird zur zweiten Zeile $1/x$ mal die zweit Zeile dazugerechnet. Durch mehrfaches Anwenden dieses Verfahrens auf die Zeilen 3, 4 und 5 erhält man die obere Dreiecksform. Dann kann die Determinante durch Multiplikation der Diagonalelemente berechnet werden.

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) \quad & \overset{\text{II'= II+I}\cdot\frac{1}{x}}{=} \quad \det(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & x & 0 & 0 & b_2 + b_1/x \\ 0 & -1 & x & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & x & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x+b_5 \end{pmatrix}) \\
& \dots \\
& = \quad \det(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & x & 0 & 0 & b_2 + b_1/x \\ 0 & 0 & x & 0 & b_3 + \frac{b_2+b_1/x}{x} \\ 0 & 0 & 0 & x & b_4 + b_3 + \frac{b_2+b_1/x}{x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x + b_5 + \frac{b_4 + \frac{b_3 + \frac{b_2+b_1/x}{x}}{x}}{x} \end{pmatrix}) \\
& = \quad x^4 \cdot \left(x + b_5 + \frac{b_4 + \frac{b_3 + \frac{b_2+b_1/x}{x}}{x}}{x} \right) \\
& = \quad x^5 + b_5 \cdot x^4 + b_4 \cdot x^3 + b_3 \cdot x^2 + b_2 \cdot x + b_1
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist auch gültig für den Fall $x = 0$.

5. Determinanten der Transponierten 325124

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen. Benutze den Satz von Sarrus und den Multiplikationssatz für Matrizen. Nutze zudem die Ähnlichkeit der Matrizen aus.

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{-4}{\sqrt{2}} \\ 5 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 4 & \frac{-2}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\left(1+\sqrt{2}\right) & 1 & 0 \\ \frac{1}{8}\left(1-\sqrt{2}\right) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\left(1+\sqrt{2}\right) & \frac{1}{8}\left(1-\sqrt{2}\right) & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung

(a) $\det(\mathbf{A}) = 0 + 0 + 40 - 16 + 0 + 45 = 69$

(b)

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \det\left(\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} & -4 \\ 5 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 4 & \frac{-2}{\sqrt{2}} & -3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\det(\mathbf{A}) = \frac{69}{2} \end{aligned}$$

(c) Feststellung: $\mathbf{C} = \mathbf{D} \odot \mathbf{D}^\intercal$. Also können wir die Determinante durch $\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{D}) \cdot \det(\mathbf{D}^\intercal) = \det(\mathbf{D}) \cdot \det(\mathbf{D})$ berechnen.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{D}) &= \det\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{8}\left(1+\sqrt{2}\right) & 1 & 0 \\ \frac{1}{8}\left(1-\sqrt{2}\right) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= 1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{8}\left(1+\sqrt{2}\right) & 1 \\ \frac{1}{8}\left(1-\sqrt{2}\right) & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{8}\left(1+\sqrt{2}\right) - \frac{1}{8}\left(1-\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Also ist die

$$\det(\mathbf{C}) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{8}$$

6. Determinanten eines Matrix-Produkts 799761

Berechnen Sie die Determinante der Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{T}$. Benutze den Multiplikationssatz für Matrizen.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und } \mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{T}$$

Lösung Wir nennen die Diagonalmatrix in der Aufgabenstellung $\mathbf{D}$ und stellen fest:

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{T}) = \det(\mathbf{T}^{-1}) \cdot \det(\mathbf{D}) \cdot \det(\mathbf{T}) = \frac{1}{\det(\mathbf{T})} \cdot \det(\mathbf{T}) \cdot \det(\mathbf{D}) = \det(\mathbf{D})\ .$$

Die Determinante der Diagonalmatrix lässt sich nun einfach berechnen:

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{D}) = (-5) \cdot 4 \cdot (-3) = 60$$

und

$$\det(\mathbf{T}) = 1 \cdot 3 \cdot 7 = 21$$

7. Lineare Abhängigkeit **468897**

Bestimme x, so dass die Spaltenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$ linear unabhängig sind.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & x & 2 \\ 6 & 5 & x \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Lösung Wir berechnen die Determinante

$$\det(\mathbf{A}) = 60 + 30x$$

Die Spaltenvektoren sind linear unabhängig, falls die Determinante nicht verschwindet, also für alle $x \in \mathbb{R}$ ausser

$$x = -2$$

8. Determinante eines Matrix-Produkts **801837**

Berechne die Determinante der Matrix $\mathbf{P}$.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 9 \\ -9 & 0 & 9 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{10}{9} & \frac{8}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{8}{9} & \frac{19}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{10}{9} & \frac{14}{9} \end{pmatrix}$$

Lösung Wir berechnen das Matrix-Produkt

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist 24 und kann mit der Regel von Sarrus berechnet werden.

9. Determinante von Untermatrizen **311802**

Berechne die Determinante der Matrix $\mathbf{M}$ und ihrer Untermatrizen $\mathbf{N}$ und $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung

Die Determinanten der Untermatrizen berechnen sich mit der Regel von Sarrus zu

$$\det(\mathbf{N}) = 0 - 4 + 0 + 0 - 2 + 0 = -6 \text{ und } \det(\mathbf{P}) = 0 + -2 + -4 + 16 + 0 + 0 = 10$$

Mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz können wir nun die Determinante von $\mathbf{M}$ berechnen

$$\det(\mathbf{M}) = 4 \cdot \det(\mathbf{N}) + (-3) \cdot (-1) \cdot \mathbf{P} = 4 \cdot (-6) + 3 \cdot (10) = 6$$