Serie 10, Musterlösung

Klasse: 1Ea, 1Eb, 1Sb Datum: HS 17

1. Interpolation

Berechnen Sie das Interpolationspolynom durch die folgenden Punkte. Kontrollieren Sie das Ergebnis, indem Sie das Polynom bei $\vec{T}$ auswerten.

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \vec{Q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{T} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Es sind 5 Punkte gegen, also hat das Interpolationspolynom 5 Koeffizienten

$$p(t) = c_0 + c_1 \cdot t + c_2 \cdot t^2 + c_3 \cdot t^3 + c_4 \cdot t^4 .$$

Es soll durch die gegeben Punkte verlaufen, also müssen die Koeffizienten folgende Gleichungen erfüllen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{A}} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizienten sind also

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Kontrolle ergibt beim Punkt $\vec{T}$

$$p(2) = 1 + 0 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot 2^4 = -3$$

2. Orthogonale Matrizen

Berechne $\mathbf{B}^\intercal \odot B$. Benutze dieses Resultat um $\mathbf{B}^{-1}$ zu berechnen.

$$\mathbf{B} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$\mathbf{B}^\intercal \odot B = \mathbb{1}$ ergibt die Einheitsmatrix. $\mathbf{B}$ ist also eine orthogonale Matrix. Deshalb gilt

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^\intercal = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Basistransformation

Berechne die Komponenten des Vektors $\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix}$ (Standart-Basis) in der Orthogonalbasis

$$\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vermeide wenn möglich die Matrix-Inversion z.B. mit dem Gauss-Jordan-Verfahren. Schreibe danach den Vektor $\vec{s}$ als Summe der Basisvektoren $\vec{f_i}$.

Lösung:

In der Orthogonalbasis **F** können die Komponenten berechnet werden mit Hilfe von Skalarprodukten.

$$\begin{aligned} s_1^F &= \frac{1}{|\vec{f_1}|^2} \vec{f_1} \odot \vec{s} = 1 \\ s_2^F &= \frac{1}{|\vec{f_2}|^2} \vec{f_2} \odot \vec{s} = 2 \\ s_3^F &= \frac{1}{|\vec{f_3}|^2} \vec{f_3} \odot \vec{s} = 3 \end{aligned}$$

Also lautet der Vektor s in der Basis **F**

$$\vec{s}^F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Als Summe der Basisvektoren können wir $\vec{s}$ also schreiben

$$\vec{s} = \vec{f_1} + 2\vec{f_2} + 3\vec{f_3}$$

4. Invertierbarkeit

Welche der folgenden Matrizen lassen sich invertieren. Entscheiden Sie anhand der Determinante.

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

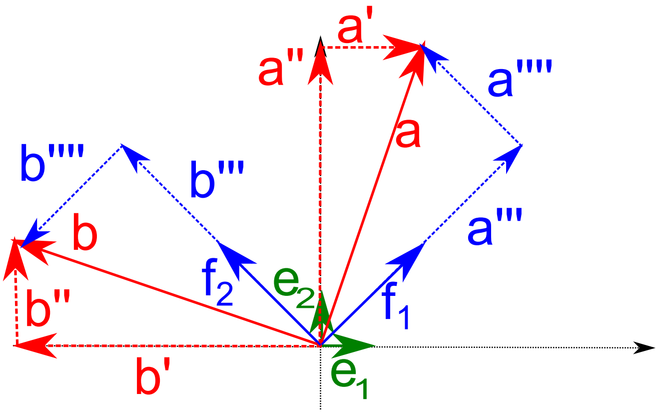
(b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & -2 & -3 \\ 5 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

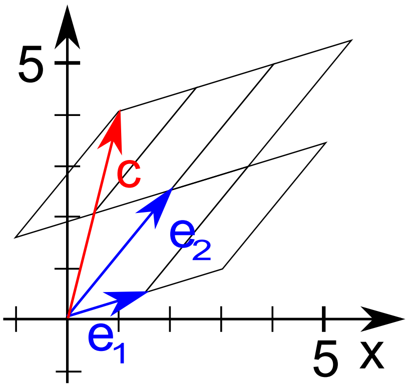
Lösung
Für $\det(\mathbf{A}) = 0$ lässt sich eine Matrix nicht invertieren. Die Determinanten sind hier:

(a) $\det(\mathbf{A}) = 2$, d.h. $\mathbf{A}$ ist invertierbar.

(b) $\det(\mathbf{B}) = 0$, d.h. $\mathbf{B}$ ist nicht invertierbar.

5. Linearkombination





- Drücken Sie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als Linearkombination von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ aus (graphisch).
- Drücken Sie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als Linearkombination von $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$ aus (graphisch).
- Drücken Sie $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ aus (rechnerisch).

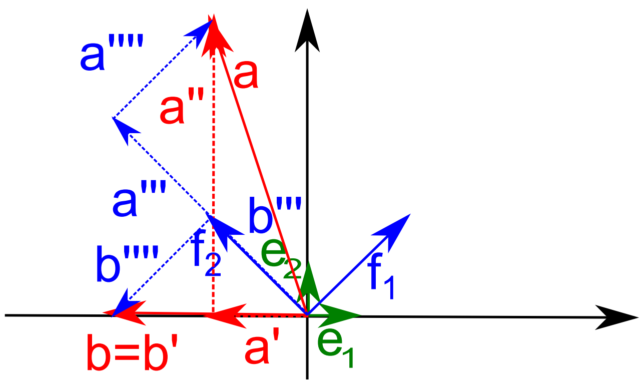
Lösung: Um $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ auszudrücken, stellen wir das entsprechende lineare Gleichungssystem auf:

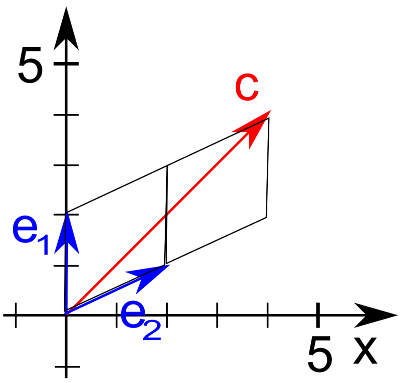
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$c_1 = -2 \text{ und } c_2 = 2$$

6. Linearkombination





- Drücken Sie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als Linearkombination von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ aus (graphisch).

- Drücken Sie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als Linearkombination von $\vec{f_1}$ und $\vec{f_2}$ aus (graphisch).
- Drücken Sie $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ aus (rechnerisch).

Lösung: Um $\vec{c}$ als Linearkombination von $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ auszudrücken, stellen wir das entsprechende lineare Gleichungssystem auf:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$c_1 = 1 \text{ und } c_2 = 2$$