



Serie 11, Musterlösung

Klasse: 1Ea, 1Eb, 1Sb

Datum: HS 17

1. Orthonormalbasis

UFDF51

Geben Sie die Punkte in der jeweiligen Orthonormalbasis an.

(a) Basis $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -(4/5) \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -2.2 \\ -0.4 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 6.8 \\ -7.4 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 10.4 \\ -2.2 \end{pmatrix}$$

(b) Basis $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 8/17 \\ 15/17 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 15/17 \\ -(8/17) \end{pmatrix}$.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -0.941176 \\ -1.76471 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 3.35294 \\ 8.41176 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 6.29412 \\ 1.17647 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} -2.70588 \\ -0.823529 \end{pmatrix}$$

(c) Basis $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} -(5/13) \\ 12/13 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 12/13 \\ 5/13 \end{pmatrix}$.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -4.154 \\ 4.769 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -4.538 \\ 5.692 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -1.769 \\ 6.846 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 6.462 \\ 2.692 \end{pmatrix}$$

(d) Basis $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 7/25 \\ -(24/25) \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 24/25 \\ 7/25 \end{pmatrix}$.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 6.84 \\ 5.12 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -0.92 \\ -7.56 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 0.68 \\ 1.24 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 7.28 \\ 0.04 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a) Lösung durch Projektion:

$$\begin{aligned} A_1^F \cdot \vec{f}_1 &= \vec{A} \odot \frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|} \cdot \frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|} = (\vec{A} \odot \vec{f}_1) \cdot \vec{f}_1 \\ &= \left(\begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \right) \cdot \vec{f}_1 = \frac{36+4}{5} \cdot \vec{f}_1 = 8 \cdot \vec{f}_1 \end{aligned}$$

$$A_2^F \cdot \vec{f}_2 = (\vec{A} \odot \vec{f}_2) \cdot \vec{f}_2 = \left(\begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \right) \cdot \vec{f}_2 = \frac{48-3}{5} \cdot \vec{f}_2 = 9 \cdot \vec{f}_2$$

Also $\vec{A} = 8 \cdot \vec{f}_1 + 9 \cdot \vec{f}_2$ oder $\vec{A} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}_F$.

$$B_1^F \cdot \vec{f}_1 = (\vec{B} \odot \vec{f}_1) \cdot \vec{f}_1 = \left(\begin{pmatrix} -2.2 \\ -0.4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \right) \cdot \vec{f}_1 = \frac{-6.6 + 1.6}{5} \cdot \vec{f}_1 = 1 \cdot \vec{f}_1$$

$$B_2^F \cdot \vec{f}_2 = (\vec{B} \odot \vec{f}_2) \cdot \vec{f}_2 = \left(\begin{pmatrix} -2.2 \\ -0.4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \right) \cdot \vec{f}_2 = \frac{-8.8 - 1.2}{5} \cdot \vec{f}_2 = -2 \cdot \vec{f}_2$$

Also $\vec{B} = 1 \cdot \vec{f}_1 - 2 \cdot \vec{f}_2$ oder $\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}_F$.

$$C_1^F = (\vec{C} \odot \vec{f}_1) = \left(\begin{pmatrix} 6.8 \\ -7.4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \right) = \frac{20.4 + 29.6}{5} = 10$$

$$C_2^F = (\vec{C} \odot \vec{f}_2) = \left(\begin{pmatrix} 6.8 \\ -7.4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \right) = \frac{27.2 - 22.2}{5} = 1$$

Also $\vec{C} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}_F$

Alternativ mit der Basismatrix:

$$\left[\begin{pmatrix} 3/5 \\ -(4/5) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \right] \odot \begin{pmatrix} D_1^F \\ D_2^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.4 \\ -2.2 \end{pmatrix}$$

Die Basis-Matrix F ist orthogonal also gilt $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^\top$ und

$$\begin{pmatrix} D_1^F \\ D_2^F \end{pmatrix} = \mathbf{F}^{-1} \odot \begin{pmatrix} 10.4 \\ -2.2 \end{pmatrix} = \mathbf{F}^\top \odot \begin{pmatrix} 10.4 \\ -2.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(b) Die Punkte sind

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}_F, \vec{B} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}_F, \vec{C} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}_F, \vec{D} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}_F$$

(c) Die Punkte sind

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}_F, \vec{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}_F, \vec{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}_F, \vec{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}_F$$

(d) Die Punkte sind

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}_F, \vec{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}_F, \vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_F, \vec{D} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}_F$$

2. Orthogonalbasis**V6P3LC**

Geben Sie die Punkte in der jeweiligen Orthogonalbasis an.

(a) Lösung durch Projektion:

$$\begin{aligned} A_1^F \cdot \vec{f}_1 &= \vec{A} \odot \frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|} \cdot \frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|} = \frac{(\vec{A} \odot \vec{f}_1)}{|\vec{f}_1|^2} \cdot \vec{f}_1 \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}}{5^2} \cdot \vec{f}_1 = \frac{6 + 44}{25} \cdot \vec{f}_1 = 2 \cdot \vec{f}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2^F \cdot \vec{f}_2 &= \frac{(\vec{A} \odot \vec{f}_2)}{|\vec{f}_2|^2} \cdot \vec{f}_2 \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{5^2} \cdot \vec{f}_2 = \frac{8 - 33}{25} \cdot \vec{f}_2 = -1 \cdot \vec{f}_2 \end{aligned}$$

Also $\vec{A} = 2 \cdot \vec{f}_1 - 1 \cdot \vec{f}_2$ oder $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_F$.

$$B_1^F \cdot \vec{f}_1 = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}}{5^2} \cdot \vec{f}_1 = \frac{15 + 60}{5^2} \cdot \vec{f}_1 = 3 \cdot \vec{f}_1$$

$$B_2^F \cdot \vec{f}_2 = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{5^2} \cdot \vec{f}_2 = \frac{20 - 45}{5^2} \cdot \vec{f}_2 = -1 \cdot \vec{f}_2$$

Also $\vec{B} = 3 \cdot \vec{f}_1 - 1 \cdot \vec{f}_2$ oder $\vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_F$.

$$C_1^F = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}}{5^2} = \frac{-6 - 44}{5^2} = -2$$

$$C_2^F = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{5^2} = \frac{-8 + 33}{5^2} = 1$$

Also $\vec{C} = -2 \cdot \vec{f}_1 + 1 \cdot \vec{f}_2$ oder $\vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_F$.

Alternativ mit der Basismatrix:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \odot \begin{pmatrix} D_1^F \\ D_2^F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Die Basis-Matrix ist zwar nicht orthogonal, aber es gilt $\mathbf{F}^\top \odot \mathbf{F} = \mathbf{K}$, wobei \mathbf{K} eine Diagonalmatrix ist. Wir berechnen also

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathbf{F}^\top \odot \mathbf{F}}_{\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} D_1^F \\ D_2^F \end{pmatrix} &= \mathbf{F}^\top \odot \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} D_1^F \\ D_2^F \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 50 \\ 25 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} D_1^F \\ D_2^F \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 50/25 \\ 25/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) Basis $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 12 \\ -14 \end{pmatrix}$$

(c) Basis $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -5 \\ 25 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

(d) Basis $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a) Basis $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2. \\ -11. \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 5. \\ -15. \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -2. \\ 11. \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 10. \\ -5. \end{pmatrix}$$

(b) Die Punkte sind

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}_F, \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}_F, \vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}_F, \vec{D} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}_F$$

(c) Die Punkte sind

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_F, \vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_F, \vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}_F, \vec{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_F$$

(d) Die Punkte sind

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_F, \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_F, \vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_F, \vec{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_F$$

3. Allgemeine Basis

AKD6C2

(a) Basis $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ -0.6 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 2.2 \\ -0.6 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -1.2 \\ 0.6 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 2.8 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

(b) Basis $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -8 \\ 21 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} -6 \\ 24 \end{pmatrix}$$

(c) Basis $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -15 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -25 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(d) Basis $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a) Mit der Basis-Matrix schreiben wir

$$\underbrace{\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \right]}_{=\mathbf{F}} \begin{pmatrix} A_F^1 \\ A_F^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ -0.6 \end{pmatrix}$$

Wir wenden auf beiden Seiten $\mathbf{F}^{-1} \odot$ an und erhalten

$$\begin{pmatrix} A_F^1 \\ A_F^2 \end{pmatrix} = \mathbf{F}^{-1} \odot \begin{pmatrix} 1.2 \\ -0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Genau gleich ergeben sich die weiteren Punkte:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_F, \vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_F, \vec{D} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_F$$

(b) Die Punkte sind

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}_F, \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}_F, \vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}_F, \vec{D} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}_F$$

(c) Die Punkte sind

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_F, \vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_F, \vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}_F, \vec{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_F$$

(d) Die Punkte sind

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_F, \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_F, \vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_F, \vec{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_F$$