Serie 12 Musterlösung

Klasse: 1Ea, 1Eb, 1Sb — Datum: HS 17

In dieser Serie werden alle Rechnungen in der Basis

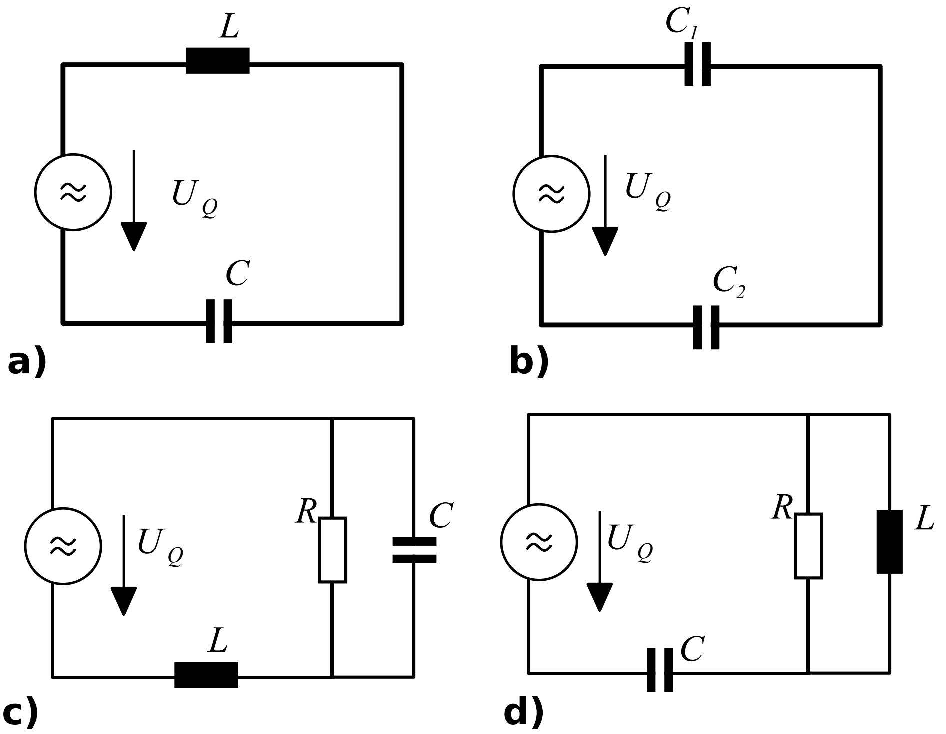
$$\vec{e}_1 \hat{=} \cos(\omega \cdot t) \text{ und } \vec{e}_2 \hat{=} \sin(\omega \cdot t)$$

und in SI-Einheiten durchgeführt.

1. Gesamt-Impedanz **86MM2L**

Bestimmen Sie die Gesamt-Impedanz des Netzwerks. Benutzen Sie auch

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$



Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z}_T &= \mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_L \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C\omega} \\ \frac{1}{C\omega} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & L\omega \\ -L\omega & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & L\omega - \frac{1}{C\omega} \\ \frac{1}{C\omega} - L\omega & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Z}_T &= \mathbf{Z}_{C_1} + \mathbf{Z}_{C_2} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C_1\omega} \\ \frac{1}{C_1\omega} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C_2\omega} \\ \frac{1}{C_2\omega} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C_1\omega} - \frac{1}{C_c\omega} \\ \frac{1}{C_1\omega} + \frac{1}{C_1\omega} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{C_1+C_2}{C_1C_2\omega} \\ \frac{C_1+C_2}{C_1C_2\omega} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Z}_T &= \mathbf{Z}_L + \left(\mathbf{Z}_C^{-1} + \mathbf{Z}_R^{-1}\right)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & L\omega \\ -L\omega & 0 \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & C\omega \\ -C\omega & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{R\left(C^2\omega^2+\frac{1}{R^2}\right)} & L\omega - \frac{C\omega}{C^2\omega^2+\frac{1}{R^2}} \\ \frac{C\omega}{C^2\omega^2+\frac{1}{R^2}} - L\omega & \frac{1}{R\left(C^2\omega^2+\frac{1}{R^2}\right)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{(C\,R\omega)^2+1} & L\omega - \frac{C\omega R^2}{(C\,R\omega)^2+1} \\ -L\omega + \frac{C\omega R^2}{(C\,R\omega)^2+1} & \frac{R}{(C\,R\omega)^2+1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

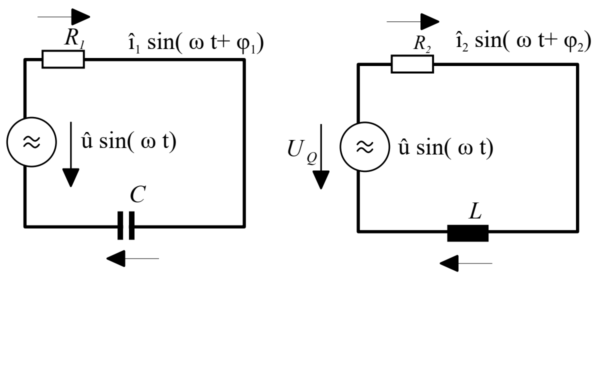
(d)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Z}_T &= \mathbf{Z}_C + \left(\mathbf{Z}_R^{-1} + \mathbf{Z}_L^{-1}\right)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C\omega} \\ \frac{1}{C\omega} & 0 \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L\omega} \\ \frac{1}{L\omega} & 0 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{R\left(\frac{1}{L^2\omega^2}+\frac{1}{R^2}\right)} & \frac{1}{L\left(\frac{1}{L^2\omega^2}+\frac{1}{R^2}\right)\omega} - \frac{1}{C\omega} \\ \frac{1}{C\omega} - \frac{1}{L\left(\frac{1}{L^2\omega^2}+\frac{1}{R^2}\right)\omega} & \frac{1}{R\left(\frac{1}{L^2\omega^2}+\frac{1}{R^2}\right)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{\left(\frac{R}{L\omega}\right)^2+1} & \frac{L\omega}{1+\left(\frac{L\omega}{R}\right)^2} - \frac{1}{C\omega} \\ -\frac{L\omega}{1+\left(\frac{L\omega}{R}\right)^2} + \frac{1}{C\omega} & \frac{R}{\left(\frac{R}{L\omega}\right)^2+1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

2. Zeigerdiagramm **P5DDG1**

Gegeben sind die beiden Netzwerke mit den Komponenten $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $C = 300\,nF$, und $L = 3\,\mu$ H. Für die Amplitude und Frequenz der sinusförmigen Quellenspannung gelten $\hat{u} = 10$ V und $f = 100$ kHz.

Bestimmen Sie die Ströme $i_1(t)$ und $i_2(t)$ mit Hilfe der Zeigerdarstellung.



Lösung:
Netzwerk 1: Die Impedanz des Netzwerks ist

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{Z}_{R_1} + \mathbf{Z}_C = \begin{bmatrix} R_1 & -\frac{1}{C\omega} \\ \frac{1}{C\omega} & R_1 \end{bmatrix}$$

Die Spannungsquelle ist in der Zeigerdarstellung $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{u} \end{bmatrix}$. Es ergibt sich aus $\vec{u} = \mathbf{Z} \odot \vec{i}$

$$\vec{i} = \mathbf{Z}^{-1} \odot \vec{u} = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{50}{3\pi} \\ \frac{50}{3\pi} & 4 \end{bmatrix}^{-1} \odot \vec{u} = \begin{bmatrix} 1.20177 \\ 0.90611 \end{bmatrix}$$

Die Amplitude des Stromes ist

$$|\vec{i}| = \sqrt{1.20177^2 + 0.90611^2} = 1.5\,\mathrm{A}$$

und die Phasenverschiebung

$$\phi_1 = \arctan \frac{1.20177}{0.90611} = 0.924 = 53^\circ$$

Also ist der Strom

$$i_1(t) = 1.5\,\mathrm{A} \sin(\omega \cdot t + 53^\circ)$$

Netzwerk 2: Die Impedanz des Netzwerks ist

$$\mathbf{Z}'_T = \mathbf{Z}_{R_1} + \mathbf{Z}_L = \begin{bmatrix} R & L\omega \\ -L\omega & R \end{bmatrix}$$

Die Spannungsquelle ist in der Zeigerdarstellung $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{u} \end{bmatrix}$. Es ergibt sich aus $\vec{u} = \mathbf{Z} \odot \vec{i}$

$$\vec{i'} = (\mathbf{Z}')^{-1} \odot \vec{u} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3\pi}{5} \\ -\frac{3\pi}{5} & 2 \end{bmatrix}^{-1} \odot \vec{u} = \begin{bmatrix} -2.49562 \\ 2.64793 \end{bmatrix}$$

Die Amplitude und Phasenverschiebung des Stromes sind

$$|\vec{i}| = \sqrt{(-2.50)^2 + 2.65)^2} = 3.64\,\mathrm{A} \text{ und } \phi_2 = \arctan \frac{-2.50}{2.65} = -43^\circ$$

Also ist der Strom $i_2(t) = 3.64\,\mathrm{A} \sin(\omega \cdot t - 43^\circ)$.

3. Zeigerdiagramm **MZ8213**

Gegeben ist das Netzwerke mit den Komponenten $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $C = 300\,nF$, und $L = 3\,\mu$ H.

(a) Für die Amplitude und Frequenz der sinusförmigen Quellenspannung gilt

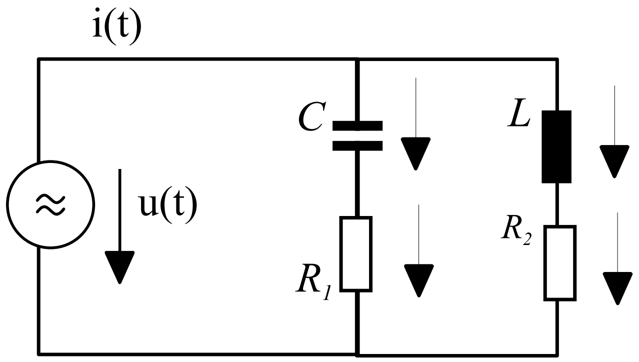
$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t) \text{ mit } \hat{u} = 10 \text{ V und } f = 100 \text{ kHz .}$$

Bestimmen Sie den Strom $i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi')$ mit Hilfe der Zeigerdarstellung.

(b) Für die Amplitude und Frequenz des sinusförmigen Quellen-Stroms gilt

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t) \text{ mit } \hat{i} = 5 \text{ A und } f = 100 \text{ kHz} .$$

Bestimmen Sie die Spannung $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi'')$ mit Hilfe der Zeigerdarstellung.



Lösung:

Die Impedanz des Netzwerks ist

$$\mathbf{Z}_T = \left(\big(\underbrace{\mathbf{Z}_{R_1} + \mathbf{Z}_C}_{=\mathbf{Z}_a}\big)^{-1} + \big(\underbrace{\mathbf{Z}_{R_1} + \mathbf{Z}_L}_{=\mathbf{Z}_b}\big)^{-1} \right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} R_1 & -\frac{1}{C\omega} \\ \frac{1}{C\omega} & R_1 \end{bmatrix}^{-1} + \begin{bmatrix} R & L\omega \\ -L\omega & R \end{bmatrix}^{-1} \right)^{-1}$$

(a) Die Spannungsquelle ist in der Zeigerdarstellung $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{u} \end{bmatrix}$. Es ergibt sich aus $\vec{i} = (\mathbf{Z}_T)^{-1} \odot \vec{u}$. Wir bemerken

$$(\mathbf{Z}_T)^{-1} = \left[\left((\mathbf{Z}_a)^{-1} + (\mathbf{Z}_b)^{-1} \right)^{-1} \right]^{-1} = (\mathbf{Z}_a)^{-1} + (\mathbf{Z}_b)^{-1}$$

also

$$\vec{i} = \mathbf{Z_T}^{-1} \odot \vec{u} = \begin{bmatrix} 0.355404 & -0.129385 \\ 0.129385 & 0.355404 \end{bmatrix} \odot \vec{u} = \begin{bmatrix} -1.29385 \\ 3.55404 \end{bmatrix}$$

Die Amplitude des Stromes ist

$$|\vec{i}| = \sqrt{(-1.29385)^2 + 3.55404^2} = 3.78223\,\text{A}$$

und die Phasenverschiebung

$$\phi' = \arctan \frac{-1.29385}{3.55404} = -0.349137 = -20.00^\circ$$

Also ist der Strom

$$i(t) = 3.78\,\text{A} \cdot \sin(\omega \cdot t - 20^\circ)$$

(b) Die Stromquelle ist in der Zeigerdarstellung $\vec{i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{i} \end{bmatrix}$. Wir berechnen also

$$\vec{u} = \mathbf{Z_T} \odot \vec{i} = \begin{bmatrix} 2.48443 & 0.904459 \\ -0.904459 & 2.48443 \end{bmatrix} \odot \vec{i} = \begin{bmatrix} 4.52229 \\ 12.4221 \end{bmatrix}$$

Amplitude und Phasenverschiebung der Spannung sind

$$|\vec{u}| = \sqrt{4.52^2 + 12.4^2} = 13.22\,\mathrm{V} \text{ und } \phi'' = \arctan\frac{4.52}{12.4} = 20°$$

Die Spannung ist also $u(t) = 13.22\,\mathrm{V} \cdot \sin(\omega \cdot t + 20°)$.

4. Tiefpassfilter **D1A5N3**

Gegeben ist das Netzwerke mit den Komponenten R, C. Für die Amplitude und Frequenz der sinusförmigen Quellenspannung gelten $\hat{u}$ V und ω Hz. Bestimmen Sie die Gangs-Spannung $u_o(t) = \hat{u}_R \cdot \sin(\omega t + \varphi_C)$.

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

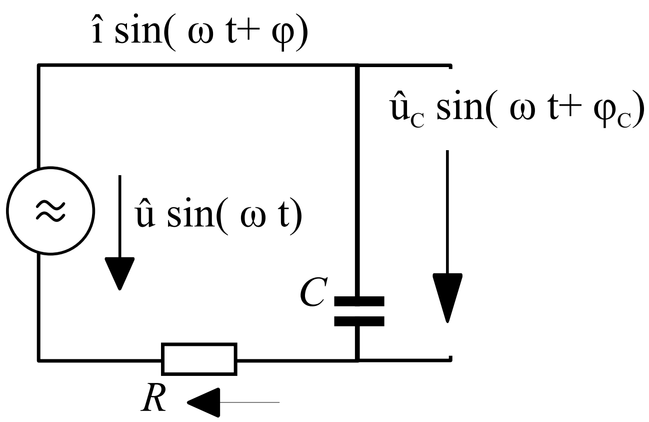
(a) Bestimmen Sie die Impedanz der Kapazität und des gesamten Netzwerks in Zeigerdarstellung.

(b) Berechnen Sie damit den Strom $i(t)$ im Netzwerk in Zeigerdarstellung.

(c) Benutzen Sie $\vec{u} = \mathbf{Z} \odot \vec{i}$ um aus dem Strom die Spannung über der Kapazität C zu berechnen.

(d) Wandeln Sie den Zeiger für die Spannung in die Form $\hat{u}_C \cdot \sin(\omega t + \varphi_C)$ um.

(e) Berechnen Sie die Ausgangsspannung $\hat{u}_C$ bei $f_0 = 0$ und $f_1 = 230$ kHz, $\hat{u} = 10$ V und ein Netzwerk mit $R = 4\,\Omega$ und $C = 300$ nF.



Lösung:

(a) Die Impedanzen in Zeigerform sind

$$\mathbf{Z}_C = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C\omega} \\ \frac{1}{C\omega} & 0 \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{Z}_T = \begin{bmatrix} R & -\frac{1}{C\omega} \\ \frac{1}{C\omega} & R \end{bmatrix}$$

(b) Der Strom ergibt sich aus $\vec{u} = \mathbf{Z}_T \odot \vec{i}$ also

$$\vec{i} = (\mathbf{Z}_T)^{-1} \odot \vec{u} = \begin{bmatrix} R & -\frac{1}{C\omega} \\ \frac{1}{C\omega} & R \end{bmatrix}^{-1} \odot \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{u} \end{bmatrix}$$

also

$$\vec{i} = \frac{1}{R^2 + 1/(C\omega)^2} \cdot \begin{bmatrix} R & \frac{1}{C\omega} \\ -\frac{1}{C\omega} & R \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \frac{\hat{u}}{R^2 + 1/(C\omega)^2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{C\omega} \\ R \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned} \vec{u}_C &= \mathbf{Z}_C \odot \vec{i} = \frac{\hat{u}}{R^2 + 1/(C\omega)^2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C\omega} \\ \frac{1}{C\omega} & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \frac{1}{C\omega} \\ R \end{bmatrix} = \frac{\hat{u}}{R^2 + 1/(C\omega)^2} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{R}{C\omega} \\ \frac{1}{(C\omega)^2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{\hat{u}}{R^2 \cdot (C\omega)^2 + 1} \cdot \begin{bmatrix} -R \cdot C\omega \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt wurde der Bruch erweitert mit $(C\omega)^2$.

(d) Amplitude :

$$\hat{u}_C = \frac{\hat{u}}{R^2 \cdot (C\omega)^2 + 1} \cdot \sqrt{(-R \cdot C\omega)^2 + 1^2} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 \cdot (C\omega)^2 + 1}}$$

Phase:

$$\varphi_C = \arctan\left(\frac{-R \cdot C\omega}{1}\right) = -\arctan(R \cdot C\omega)$$

Also ist die Ausgangspannung

$$u_o(t) = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 \cdot (C\omega)^2 + 1}} \cdot \sin(\omega t - \arctan(R \cdot C\omega))$$

Für hohe Frequenzen ist der Ausdruck $\sqrt{R^2 \cdot (C\omega)^2 + 1}$ gross, also ist die Amplitude von $u_o(t)$ klein. D.h. an dieser Schaltung werden hohe Frequenzen werden mehr gedämpft als tiefe.

(e) Die Ausgangsspannungen sind

$$\begin{aligned} \hat{u}_C &= \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 \cdot (C \cdot 0)^2 + 1}} = 10 \text{ V} \\ \hat{u}_C &= \frac{10 \text{ V}}{\sqrt{(R \cdot C \cdot 2\pi \cdot 230 \cdot 10^3)^2 + 1}} = 5 \,\text{V} \end{aligned}$$

da $R \cdot C \cdot 2\pi \cdot 230 \cdot 10^3 = 1.734$

5. Hochpassfilter EBBCWE

Gegeben ist das Netzwerke mit den Komponenten R, C. Für die Amplitude und Frequenz der sinusförmigen Quellenspannung gelten $\hat{u}$ V und ω Hz. Bestimmen Sie die Gangs-Spannung $u_o(t) = \hat{u}_R \cdot \sin(\omega t + \varphi_C)$.

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

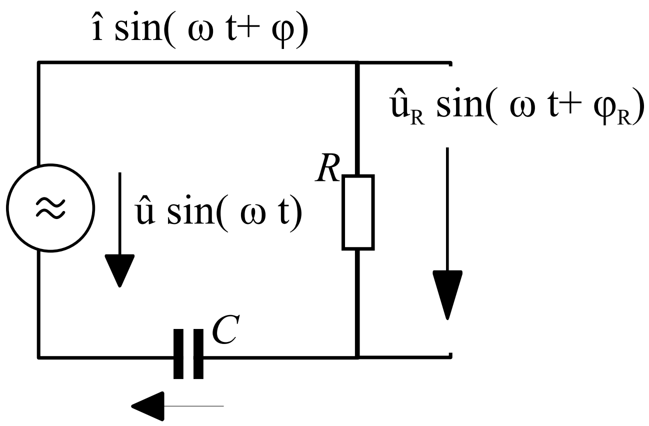
(a) Das Netzwerk ist hat die selbe Struktur wie in der vorherigen Aufgababe. Deshalb können wir den resultierenden Strom in Zeigerform

$$\vec{i} = \frac{\hat{u}}{R^2 + 1/(C\omega)^2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{C\omega} \\ R \end{bmatrix}$$

verwenden. Benutzen Sie $\vec{u} = \mathbf{Z} \odot \vec{i}$ um aus dem Strom die Spannung über dem Widerstand R zu berechnen.

(b) Wandeln Sie den Zeiger für die Spannung in die Form $\hat{u}_R \cdot \sin(\omega t + \varphi_R)$ um.

(c) Berechnen Sie die Ausgangsspannung $\hat{u}_C$ bei $f_0 = 0$ und $f_1 = 274$ kHz, $\hat{u} = 10$ V und ein Netzwerk mit $R = 4\,\Omega$ und $C = 300$ nF.



Lösung:

(a) Die Spannung ist

$$\begin{aligned} \vec{u}_R &= \mathbf{Z}_R \odot \vec{i} = \frac{\hat{u}}{R^2 + 1/(C\omega)^2} \cdot \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \frac{1}{C\omega} \\ R \end{bmatrix} \\ &= \frac{\hat{u}}{R^2 + 1/(C\omega)^2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{R}{C\omega} \\ R^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1} \cdot \begin{bmatrix} \omega \cdot RC \\ (RC\omega)^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt wurde der Bruch erweitert mit $(C\omega)^2$.

(b) Die Amplitude ist

$$\begin{aligned} \hat{u}_R &= \frac{\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1} \cdot \sqrt{(\omega \cdot RC)^2 + (RC\omega)^4} \\ &= \frac{\hat{u}}{(RC\omega)^2 + 1} \cdot (\omega \cdot RC) \cdot \sqrt{1 + (RC\omega)^2} \\ &= \frac{\hat{u} \cdot (\omega \cdot RC)}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \end{aligned}$$

Die Phasenverschiebung

$$\varphi_R = \arctan\left(\frac{\omega \cdot RC}{(RC\omega)^2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{RC\omega}\right)$$

(c) Berechnen Sie die Ausgangsspannung $\hat{u}_C$ bei $f_0 = 0$ und $f_1 = 230$ kHz, $\hat{u} = 10$ V und ein Netzwerk mit $R = 4\,\Omega$ und $C = 300$ nF.

Die Ausgangsspannungen sind

$$\begin{aligned}\hat{u}_C &= \frac{\hat{u} \cdot (0 \cdot RC)}{\sqrt{1 + (RC \cdot 0)^2}} = 0 \text{ V} \\ \hat{u}_C &= \frac{\hat{u} \cdot (\omega \cdot RC)}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} = 9\,\text{V}\end{aligned}$$

da $\omega \cdot RC = 2.06591$

Der Gleichstromanteil verschwindet, während Wechselströme um so weniger gedämpft werden, je höher ihre Frequenz liegt.