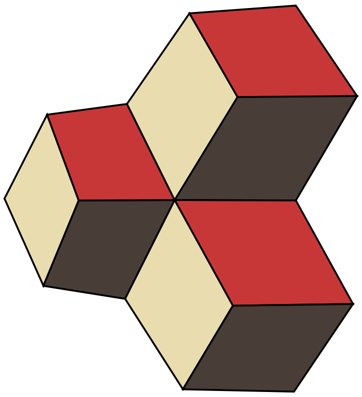
# Lineare Algebra 1



Dr. D. Adams
Institut für Mathematik und Naturwissenschaften (IMN)
donat.adams@fhnw.ch
Büro: 5.1C01

Zürich, 16. Januar 2018

# Inhaltsverzeichnis

# Teil I

# Vektoren

KAPITEL 1

# Begriffe: Vektoren

## 1.1 Notation

Ab 1934 verfasst eine Gruppe von französischen Mathematikern ein Lehrbuch der Mathematik, das “Éléments de mathématique”. Sie publizieren das Buch nicht unter ihrem richtigen Namen sondern unter dem Pseudonym “Nicolas Bourbaki”. Die Verfasser gehören zu einer Strömung innerhalb der Mathematik, die sich *axiomatische Mathematik* nennt. Sie sind der Überzeugung, dass man die Mathematik durchwegs mit eindeutigen Symbolen darstellen kann und soll. Indem man die nicht immer eindeutigen *Worte* vermeidet, gewinnt die Mathematik an Genauigkeit. Einige der Symbole, die die Gruppe eingeführt hat tauchen immer wieder auf.

**Infobox 1.1 Bourbaki-Notation**

- $\Rightarrow$ “hat zur Folge”
  BSP: $4 > 2$ und $2 > 1 \;\Rightarrow\; 4 > 1$
- $\Longleftrightarrow$ “gilt genau dann, wenn”
  BSP: $a + b = c \iff a = c - b$
- $\rightarrow$ Zuweisung
  BSP: $\cos(x) :\; x \;\rightarrow\; \cos(x)$
- $\forall$ “gilt für alle”
  $\forall x > 4 :\; x > 3$
- $\mathbb{N}, \ldots, \mathbb{Q}$ Grundmengen von Zahlen
  - $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ natürliche Zahlen
  - $\mathbb{Z} = \{\ldots - 3, -2, -1, 01, 2, 3, \ldots\}$, ganze Zahlen
  - $\mathbb{Q}$, rationale Zahlen
  - $\mathbb{R}$, reelle Zahlen
  - $\mathbb{C}$, komplexe Zahlen
- $\{\}$ Mengen, wie in $\{0, 1, 2, 3\}$
- $\in$ “ist Element von”
  BSP: $1 \in \{0, 1, 2, 3\}$
- $\notin$ “ist kein Element von”
  BSP: $4 \notin \{0, 1, 2, 3\}$
- $=$ Identität; das gilt für jede Wahl der Variablen
  BSP: $(x + y)\,(x - y) = x^2 - y^2$
- $\stackrel{!}{=}$ definiert Lösungsmenge; Gleichung gilt nur für eine spezielle Wahl der Variablen
  BSP: $x^2 + 10x + 10 \stackrel{!}{=} 0$
- $:=$ Definition
  BSP: $x := 3$ “der freien Variablen $x$ wird der Wert 3 zugewiesen”, ab dann können wir $x$ schreiben oder 3. Das bedeutet das Gleiche.
- $\exists$ “es gibt”
  BSP: $\exists x : x > 5$ (es gibt eine Zahl $x$, so dass $x > 5$).
- $!\exists$ “es gibt genau ein”
  BSP: $existsx : x > 5$ und $x < 7$ (es gibt keine Zahl $x$, so dass $x > 5$ und $x < 7$).
- $\nexists$ “es gibt kein” BSP: $existsx : x > 5$ und $x < 6$ (es gibt keine Zahl $x$, so dass $x > 5$ und $x < 6$).

**Beispiel 1.1 Übersetze die Symbole in einen Satz** **302229**

- $\forall k \in \mathbb{R}$ und $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$: $k\,\vec{0} = \vec{0}$
- Für $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$: $0\,\vec{u} = \vec{0}$
- $k \in \mathbb{R}$ und $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$: $k\,\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$ oder $k = 0$
- $k \in \mathbb{R}$ und $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$: $(-k)\,\vec{u} = k\,(-\vec{u})$

**Lösung:**

- Für alle reellen Zahlen $k$ und für den Nullvektor $\vec{0}$ in $\mathbb{R}^3$ gilt: $k\,\vec{0} = \vec{0}$
- Für die reelle Zahl Null $0 \in \mathbb{R}$ und für (irgend)einen Vektor $\vec{u}$ in $\mathbb{R}^3$ gilt: $0\,\vec{u} = \vec{u}$
- Für eine reelle Zahl $k \in \mathbb{R}$ und einen Vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ gilt: Aus $k\,\vec{u} = \vec{0}$ folgt (eindeutig), dass entweder $\vec{u} = \vec{0}$ oder $k = 0$.
- Für eine reelle Zahl $k \in \mathbb{R}$ und einen Vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $(-k)\,\vec{u} = k\,(-\vec{u})$

In der axiomatischen Mathematik werden Definitionen gemacht. Definitionen nennt man auch Axiome. Sie bedürfen keiner weiterer Begründungen. Die Definitionen werden dann durch Sätze miteinander verknüpft. In diesem Skript sind die Definitionen grün markiert, die Sätze rot. In der modernen Mathematik versucht man mit möglichst wenigen und einfachen Definitionen auszukommen. Ausserdem dürfen die Axiome nicht zu Widersprüchen führen und sich in der Thematik nicht überschneiden sondern nur ergänzen. Im Fachjargon: Die Axiome müssen widerspruchsfrei und unabhängig sein.

## 1.2 Eliminationsverfahren von Gauss I

**Definition 1.1 Kollinear**

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **kollinear**, wenn es eine Zahl $\lambda$ gibt, so dass $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Dann gilt auch

$$\vec{a} - \lambda\vec{b} = \vec{0}$$

**Beispiel 1.2 Spezielle Lage von zwei Vektoren** **014841**

Untersuche ob die Paare von Vektoren kollinear sind (durch Addition von Vielfachen der Vektoren).

1. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \end{pmatrix}$
3. $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. $\vec{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{h} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

5. $\vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{l} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ -36 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$
2. $\vec{c} + \frac{1}{6}\vec{d} = \vec{0}$
3. $\vec{e} + 2\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ also sind $\vec{e}$ und $\vec{f} =$ nicht kollinear.
4. $\vec{g} + 2\vec{h} = \vec{0}$
5. $\vec{k} - \frac{1}{6} \cdot \vec{l} = \vec{0}$

Nehmen wir die Gleichung $\vec{a} - \frac{1}{6} \cdot \vec{b} = \vec{0}$, dann gilt z.B. auch $7 \cdot \vec{a} - 7 \cdot \frac{1}{6} \cdot \vec{b} = \vec{0}$ oder allgemein

$$x_1 \cdot \vec{k} + x_2 \cdot \vec{l} = \vec{0}$$

d.h. wir können beide Vektoren mit einer Vorzahl multiplizieren. Erhalten wir so den Null-Vektor, dann sind sie kollinear.

**Beispiel 1.3 Spezielle Lage von zwei Vektoren** **429102**

Untersuche ob die Paare von Vektoren kollinear sind (durch Addition von Vielfachen der Vektoren).

1. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$
2. $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

1. $4\vec{a} - 3\vec{b} = \vec{0}$
2. $3\vec{c} - 5\vec{d} = \vec{0}$

**Definition 1.2 Linearkombination**

Eine **Linearkombination** der Objekte $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_N\}$ ist die Summe

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_N\vec{a}_N$$

mit $x_i \in \mathbb{R}$

Die Linearkombination lässt sich auch mit dem Summenzeichen schreiben

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \vec{a}_i \ .$$

Wir betrachten nun die spezielle Lage von drei Vektoren. Wie Fig. 1.2 zeigt, gilt für drei Vektoren, die in einer Ebene liegen

$$x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{0} \ .$$

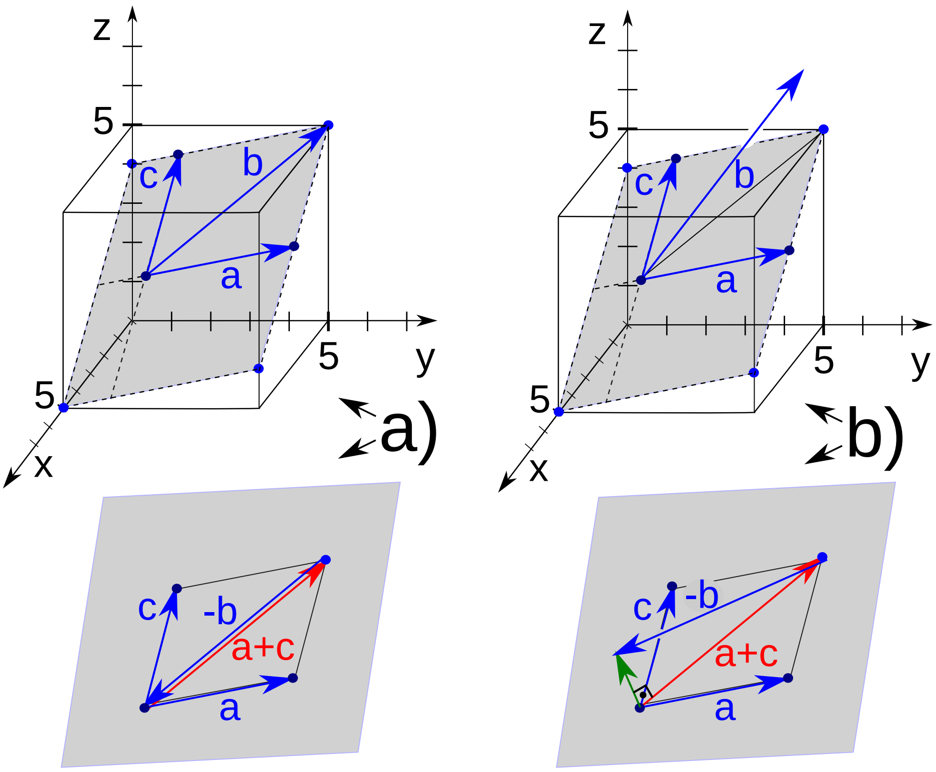



Abbildung 1.1: a) Drei Vektoren, die in einer Ebene liegen, lassen sich immer so addieren, dass der Nullvektor entsteht. b) Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ definieren eine Ebene. Zeigt der Vektor $\vec{b}$ aus dieser Ebene heraus, gibt es keine Linearkombination $x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{0}$ (abgesehen von der Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$).

**Definition 1.3 Komplanar**

Drei Vektoren sind komplanar, falls es eine Linearkombination

$$x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{0}, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

gibt mit $x_i \neq 0$ für mindestens einen Koeffizienten.

Nebenbei: Liegen die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ nicht in einer Ebene, dann ist die einzige Möglichkeit um aus der Summe der Vektoren den Nullvektor zu bekommen wie folgt

$$0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + 0 \cdot \vec{a}_3 = \vec{0}$$

Um herauszufinden, ob Vektoren komplanar sind, wenden wir das Gauss-Eliminationsverfahren an:

**Beispiel 1.4 Gauss-Eliminationsverfahren** **782891**

Bestimme Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\6\\1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\14\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Falls ja: Geben Sie an, welche Linearkombination den Nullvektor ergibt.

**Lösung:**
Wir schreiben die Komponenten der Vektoren in eine Matrix, Zeile für Zeile:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (1 \quad 6 \quad 1)\\ \vec{b} &= (2 \quad 14 \quad 1)\\ \vec{c} &= (1 \quad 2 \quad 3)\end{aligned}$$

Die $x$-, $y$- und $z$-Komponenten stehen jetzt jeweils in einer Spalte untereinander. Indem wir nun die $x$-Komponente bei allen Vektoren eliminieren, entstehen zwei Vektoren, die schon keine $x$-Komponente haben (und deshalb etwas mehr dem gewünschten Endresultat $\vec{0}$ gleichen):

$$\begin{array}{rcrrr} \vec{a} & = & 1 & 6 & 1\\ \vec{b}' = \vec{b} - 2\vec{a} & = & 0 & 2 & -1\\ \vec{c}' = \vec{c} - \vec{a} & = & 0 & -4 & 2\end{array}$$

Mit den neuen Vektoren, führen wir das selbe Verfahren durch, um einen Vektor ohne $y$-Komponente zu erhalten:

$$\begin{array}{rcrrr} \vec{a} & = & 1 & 6 & 1\\ \vec{b}' & = & 0 & 2 & -1\\ \vec{c}'' = \vec{c}' + 2\vec{b}' & = & 0 & 0 & 0\end{array}$$

D.h. es ist also gelungen $\vec{0}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darzustellen. Die Vektoren sind also komplanar.
Die Linearkombination ist

$$\vec{c}'' = \vec{c}' + 2\vec{b}' = (\vec{c} - \vec{a}) + 2(\vec{b} - 2\vec{a}) = -5\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$$

**Beispiel 1.5 Gauss-Eliminationsverfahren** **854654**

Bestimme Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\16\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}-1\\-7\\9\end{pmatrix}$$

Falls ja: Geben Sie an, welche Linearkombination den Nullvektor ergibt.

**Lösung:**
Wir schreiben die Komponenten der Vektoren in eine Matrix, Zeile für Zeile:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (1 \quad 5 \quad 2)\\ \vec{b} &= (3 \quad 16 \quad 1)\\ \vec{c} &= (-1 \quad -7 \quad 9)\end{aligned}$$

Die $x$-, $y$- und $z$-Komponenten stehen jetzt jeweils in einer Spalte untereinander. Indem wir nun die $x$-Komponente bei allen Vektoren eliminieren, entstehen zwei Vektoren, die schon keine $x$-Komponente haben (und deshalb etwas mehr dem gewünschten Endresultat $\vec{0}$ gleichen):

$$\begin{array}{rrrr} \vec{a} & = 1 & 5 & 2 \\ \vec{b}' = \vec{b} - 3\vec{a} & = 0 & 1 & -5 \\ \vec{c}' = \vec{c} + \vec{a} & = 0 & -2 & 11 \end{array}$$

Mit den neuen Vektoren, führen wir das selbe Verfahren durch, um einen Vektor mit ohne $y$-Komponente zu erhalten:

$$\begin{array}{rrrr} \vec{a} & = 1 & 5 & 2 \\ \vec{b}' & = 0 & 1 & -5 \\ \vec{c}'' = \vec{c}' + 2\vec{b}' & = 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Die $z$-Komponente des Vektors $\vec{c}$ kann nicht mehr eliminiert werden. Die Vektoren sind also linear unabhängig.

Lineare Abhängigkeit ist nun die Verallgemeinerung von “kollinear” und “komplanar” für beliebig viele Vektoren.

**Definition 1.4 Lineare Abhängigkeit**

Die Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_N\}$ heisst **linear abhängig** genau dann, wenn die Gleichung

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_N\vec{a}_N = \vec{0}, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

eine Lösung besitzt mit $x_i \neq 0$ für mindestens einen Koeffizienten.

[Papula, Bd. 1 II 2.4] [Goebbels and Ritter, 2011, 3.3.2, p.429]

- Linear abhängige Vektoren haben eine spezielle Lage zueinander. Zwei kollineare Vektoren sind linear abhängig, drei komplanare Vektoren sind linear abhängig. Die spezielle Lage erlaubt, dass man entlang der Vektoren wieder zum Ursprung zurück gelang.
- In 2 Dimensionen sind mehr als 2 Vektoren *immer* linear abhängig. In 3 Dimensionen sind mehr als 3 Vektoren *immer* linear abhängig usw.
- Linear unabhängige Vektoren haben keine spezielle Lage zueinander. Zwei linear unabhängige Vektoren spannen einen Fläche auf, drei linear unabhängige Vektoren spannen ein Volumen auf, vier linear unabhängige Vektoren spannen ein Hyper-Volumen. Wenn man entlang von jedem Vektor geht, kommt man nie wieder zum Ursprung zurück, ausser man setzt alle Schrittlängen auf $0$.

## 1.3 Gleichungen lösen mit dem Gauss-Verfahren

**Beispiel 1.6 Einsetzen in die Dreiecksform** **14841**

Löse das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\left| \begin{array}{rrrcr} 2x & -3y & +5z & = & 12 \\ & 5y & -z & = & 6 \\ & & 7z & = & 28 \end{array} \right|$$

**Lösung:**

- In der letzten Zeile erhalten wir $z = 4$.
- Eingesetzt in die zweite Zeile ergibt dies

$$5y - 4 = 6 \Rightarrow 5y = 10 \Rightarrow y = 2$$

- Schliesslich berechnen wir $x$ mit der ersten Zeile:

$$2x - 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 12 \Rightarrow 2y = -2 \Rightarrow y = -1$$

Die Lösung ist also $\vec{u} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 28 \end{pmatrix}$.

Wir sehen, dass die Dreiecksform eines Gleichungssystems den Vorteil hat, dass man von unten nach oben einsetzen kann. Deshalb ist es nützlich, Gleichungssysteme in diese Form zu bringen. Dies geschieht mit dem Gauss-Verfahren.

**Beispiel 1.7 Dreiecksform** **601555**

Bestimmen sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform mit dem Gaussverfahren.

Löse das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\begin{vmatrix} 2x & -3y & +5z & = & 12 \\ 4x & -y & +9z & = & 30 \\ 8x & -2y & +25z & = & 88 \end{vmatrix}$$

**Lösung:**

Wir benennen die Gleichungen $L_1$, $L_2$ und $L_3$. Wir eliminieren nun die $x$-Komponenten der Gleichungen $L_2$ und $L_3$ mit Hilfe von $L_1$:

$$\begin{bmatrix} L_1' = L_1: & 2x & -3y & +5z & = & 12 \\ L_2' = L_2 - 2L_1: & 0 & +5y & -z & = & 6 \\ L_3' = L_3 - 4L_1: & 0 & +10y & +5z & = & 40 \end{bmatrix}$$

Nun benutzen wir die Gleichung $L_2'$ um noch die $y$-Komponente in der Gleichung $L_3'$ zu eliminieren.

$$\begin{bmatrix} L_1'' = L_1': & 2x & -3y & +5z & = & 12 \\ L_2'' = L_2': & 0 & +5y & -z & = & 6 \\ L_3'' = L_3' - 2L_2': & 0 & +0 & +7z & = & 28 \end{bmatrix}$$

Jetzt kann man von unten nach oben einsetzen und erhält die Lösung:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 28 \end{pmatrix}$$

## 1.4 Der Vektorraum oder: Was ist ein Vektor?

**Definition 1.5 Vektorraum**

Ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist eine Menge $V$ mit einer Addition $+ \colon V \times V \mapsto V$ und einer skalaren Multiplikation $\cdot \colon \mathbb{R} \times V \mapsto V$. Seien $\vec{v}$, $\vec{w}$ beliebige Elemente des Vektorraums, dann muss gelten:

- Die Addition ist kommutativ: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
- Es gibt ein Element $\vec{0}$ (das **neutrale Element der Addition**), das folgendes erfüllt:
$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$
- $\vec{v} + \vec{w}$ und $a \cdot \vec{v}$ liegen ebenfalls in $V$ (Abgeschlossenheit).
- Zu jedem $\vec{v}$ gibt es einen **Gegenvektor**[a] $-\vec{v}$, so dass
$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$
- Die skalare Multiplikation ist assoziativ: $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$
- Die skalare Multiplikation ist distributiv: $a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}$ und $(a+b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$
- Das neutrale Element (1) der Multiplikation in $\mathbb{R}$ ist auch in $V$ ein neutrales Element $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

Dabei sind $a, b$ beliebige Elemente von $\mathbb{R}$.

[a] man spricht auch vom Inversen von $\vec{v}$

**Beispiel 1.8 Die Ebene $\mathbb{R}^2$** **14841**

Zeige, dass die Tupel $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation

$$\begin{aligned} (x,y) + (p,k) &= (x+p, y+k) \\ (x,y) \cdot \lambda &= (x \cdot \lambda, y \cdot \lambda) \end{aligned}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Lösung:**

Abgeschlossenheit mit der Addition:

$$(x,y) + (p,k) = (x+p, y+k)$$

Das Tupel $(x+p, y+k)$ hat wiederum Einträge in $\mathbb{R}$ und ist deshalb im Vektorraum.

$$(x,y) \cdot \lambda = (x \cdot \lambda, y \cdot \lambda)$$

Das Tupel $(x \cdot \lambda, y \cdot \lambda)$ hat wiederum Einträge in $\mathbb{R}$ und ist deshalb im Vektorraum.

**Beispiel 1.9 Die Gerade in $\mathbb{R}^2$** **234208**

Zeige, dass die Tupel $a \cdot (1, 3) \in \mathbb{R}^2$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation. **Lösung:**

Abgeschlossenheit mit der Addition:

$$(a, 3a) + (b, 3b) = (a + b, 3a + 3b) = (a + b) \cdot (1, 3)$$

Das Tupel $(a + b) \cdot (1, 3)$ hat wiederum einen Koeffizienten in $\mathbb{R}$ (es ist $a + b$) und die Richtung $(1, 3)$. Deshalb liegt auch jede Summe von zwei Punkten auf der Geraden.

$$(a, 3a) \cdot \lambda = (a \cdot \lambda, 3a \cdot \lambda) = a \cdot \lambda(1, 3)$$

Das Tupel $a \cdot \lambda(1, 3)$ hat wiederum einen Koeffizienten in $\mathbb{R}$ (es ist $\lambda \cdot a$) und die Richtung $(1, 3)$. Deshalb liegt auch jedes Vielfaches eines Punkes auf der Geraden.

**Beispiel 1.10 Die Gerade in $\mathbb{R}^2$** **234208**

Prüfe, ob die Tupel $(a + 1, 3a) \in \mathbb{R}^2$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation.
**Lösung:**
Wir schreiben zuerst die Punkte auf der Geraden als $(1, 0) + a(1, 3)$ Abgeschlossenheit mit der Addition:

$$(1, 0) + a(1, 3) + (1, 0) + b(1, 3) = (2, 0) + (a + b) \cdot (1, 3)$$

Das Resultat hat nicht die Form $(1, 0) + a(1, 3)$. Also liegt die Summe nicht auf der Geraden und die Gerade bilbet keinen Vektorraum.

**Beispiel 1.11 Die Ebene $\mathbb{R}^3$** **826816**

Wie wir später sehen werden, liegen die Punkte, die man bilden kann mit dem Gesetz

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a+b \end{pmatrix}$$

in einer Ebene (die den Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ einschliesst). Zeige, dass die Tripel in $\begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a+b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation.
**Lösung:**
Abgeschlossenheit mit der Addition:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+d \\ c-d \\ c+d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+b+c+d \\ a-b+c-d \\ a+b+c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c+(b+d) \\ a+c-(b-d) \\ a+c+(b+d) \end{pmatrix} \\ &= (a+c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (b-d) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Tripel $(a+c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (b-d) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist wieder in der selber Form, wie die Ebene und hat Koeffizienten in $\mathbb{R}$ ($a+c$ und $b-d$ liegen in $\mathbb{R}$). Deshalb liegt auch die Summe von je zwei Vektoren in der Ebene.

$$\begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a+b \end{pmatrix} \cdot \lambda = \begin{pmatrix} a\cdot\lambda + b\cdot\lambda \\ a\cdot\lambda - b\cdot\lambda \\ a\cdot\lambda + b\cdot\lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das Tripel $\lambda \cdot a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat die Vorfaktoren in $\mathbb{R}$ und ist in der selben Form, wie die ursprüngliche Ebene. Deshalb liegt auch jedes Vielfaches der Punkte in der Ebene wieder in der Ebene.

**Definition 1.6 Unterraum**

Eine Teilmenge $U \subseteq V$ eines Vektorraums nennt man Unterraum, falls für alle $\vec{u} \in U$ und $\vec{u}' \in U$

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{u}' &\in U \\ a \cdot \vec{u} &\in U \end{aligned}$$

Dabei ist $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl.

**Infobox 1.2 Unterräume in $\mathbb{R}^N$**

Typische Unterräume in $\mathbb{R}^N$ sind Geraden und Ebenen, die $\vec{0}$ beinhalten (sie gehen durch den Ursprung).

**Beispiel 1.12 Die Ebene $\mathbb{R}^2$** **014841**

Bilden die Tupel in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0,\ y > 0$ und $x < 20$ und $y < 30$ einen Vektorraum. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation

$$\begin{aligned} (x, y) + (p, k) &= (x + p, y + k) \\ (x, y) \cdot \lambda &= (x \cdot \lambda, y \cdot \lambda) \end{aligned}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. **Lösung:**

Abgeschlossenheit mit der Addition:

$$(x, y) + (p, k) = (x + p, y + k)$$

Das Tupel $(x + p, y + k)$ ist nicht in jedem Fall im Vektorraum. Betrachte z.B.

$$(20, 30) + (0, 30) = (20, 60)$$

Die Summe liegt nicht im Vektorraum. Also ist der Vektorraum nicht abgeschlossen. Gleichfalls ist

$$(20, 30) \cdot 10 = (200, 300)$$

nicht im Vektorraum. Also ist der Raum auch gegenüber der Multiplikation nicht abgeschlossen.

**Beispiel 1.13 Polynome bis Grad 4** **625994**

Zeige, dass die Polynome mit Grad Null bis 4 einen fünfdimensionalen Vektorraum $P^4$ bilden.

**Lösung:**

Wir betrachten die Polynome $p(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3 + a_4 \cdot t^4$ und $q(t) = b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + b_3 \cdot t^3 + b_4 \cdot t^4$ Die Addition von zwei Polynomen ergibt

$$p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) \cdot t + (a_2 + b_2) \cdot t^2 + (a_3 + b_3) \cdot t^3 + (a_4 + b_4) \cdot t^4$$

Es entsteht so wieder ein Polynom, also ist $+: V \times V \mapsto V$ erfüllt. Für die Multiplikation gilt:

$$\lambda \cdot p(t) = (\lambda \cdot a_0) + (\lambda \cdot a_1) \cdot t + (\lambda \cdot a_2) \cdot t^2 + (\lambda \cdot a_3) \cdot t^3 + (\lambda \cdot a_4) \cdot t^4$$

Auch das ist ein Polynom und $\cdot: \mathbb{R} \times V \mapsto V$ ist erfüllt.

## 1.5 Komponentenweise Notation von Vektoren

Wie wir später sehen werden, benutzt man in der Anwendungen meist eine komponentenweise Notation, d.h. man betreibt Mathematik mit den Komponenten. Bei dieser Notation sind folgende Regeln wichtig:

**Infobox 1.3 Gesetze für die komponentenweise Notation von Vektoren**

Betrachte $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$:

- Die Vektoren werden addiert, indem die Komponenten addiert werden.

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} -3+2 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Die Addition ist kommutativ: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
- Das neutrale Element der Addition ist

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Wir nennen diesen Vektor den Nullvektor.

- Komponentenweise Multiplikation mit einer Zahl:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_N \end{pmatrix} \text{ z.B. } 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Der Gegenvektor zu $\vec{w}$ ist $-\vec{w}$. Wir berechnen ihn, indem wir alle Komponenten mit $(-1)$ multiplizieren:

$$-\vec{w} = (-1) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Der Betrag $|\vec{a}|$ eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ ist (in einer Orthogonalbasis)

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + \ \dots \ + (a_N)^2}$$

  .

- Für den Betrag eines Vektor gilt immer

$$|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$$

Den Betrag eines Vektor nennen wir in der Geometrie auch seine **Länge**. Folgende Begriffe aus der Geometrie sind noch wichtig:

Vektoren können verwendet werden um den Ort eines Punktes anzugeben. Diese Vektoren können nicht verschoben werden (im Gegensatz zu einem allgemeinen Vektor).

**Definition 1.7 Ortsvektor**

Als Ortsvektor eines Punktes bezeichnet man einen Vektor, der vom Ursprung zu diesem Punkt zeigt.

Wir verwenden die Konvention, dass Ortsvektoren mit Grossbuchstaben $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \dots$ und Vektoren (ohne Bindung an einen Ort) mit Kleinbuchstaben $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ geschrieben werden. Ausserdem geben wir Punkte stets anhand von Koordinaten bezüglich einer Basis an. Deshalb identifizieren jeden abstrakten Punkt mit seinem Ortsvektor.

**Definition 1.8 Normierter Vektor**

Der Vektor $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ hat die Länge 1 und heisst deshalb **normiert**.
Achtung: Den Vektor mit $|\vec{a}| = 0$ kann man nicht normieren.

Heute wird die Vektorrechnung oft auf abstrakte Objekte (Signale, Funktionen, etc.) angewandt. Deshalb wird meist mit der Abstrakten Definition des Vektorraums in Definition 5 gearbeitet. Die ursprüngliche geometrische Deutung des Vektorraum — wie sie vollständigkeitshalber im nächsten Abschnitt dargestellt wird — wird selten verwendet.

**Beispiel 1.14 Gesetze für die komponentenweise Notation von Vektoren 490953**

Gib den Nullvektor in $\mathbb{R}^5$ an und bestimme für die angegebenen Vektoren die Komponenten

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Benutze, wann immer möglich, mathematische Gesetzte

1. $\vec{v} + \vec{w}$
2. $5\vec{v}$, $5\vec{w}$ und $5 \cdot (\vec{v} + \vec{w})$
3. $-\vec{v}$
4. $|\vec{v}|$
5. $|\vec{v} \cdot 5|$

**Lösung:**
Der Nullvektor ist

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. $5\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $5\vec{w} = \vec{w} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ und

$$5 \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

3. $-\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. $|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$

5. $|\vec{v} \cdot 5| = \sqrt{3} \cdot 5$. Hier kommt das Gesetz für die Norm zum Zug (einfacher). Es könnte aber auch explizit nachgerechnet werden, dass

$$\sqrt{(5)^2 + 0^2 + (-5)^2 + 0^2 + (5)^2} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$$

**Beispiel 1.15 Normierung** **492646**

Normiere die Vektoren.

1. $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$

3. $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$

4. $\vec{d} = \begin{pmatrix} -20 \\ 99 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

1. $\vec{a}\frac{1}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{1}{5}$

2. $\vec{b}\frac{1}{|\vec{b}|} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \frac{1}{13}$

3. $\vec{c}\frac{1}{|\vec{c}|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} \frac{1}{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$

4. $\vec{d}\frac{1}{|\vec{d}|} = \begin{pmatrix} -20 \\ 99 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{101}$

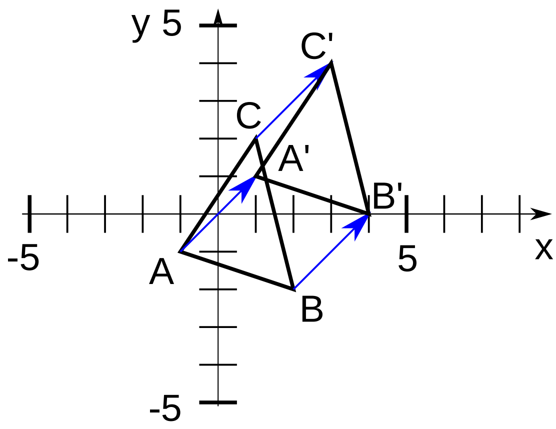
## 1.6 Geometrische Deutung der Vektoren*

**Beispiel 1.16 Verschiebung eines Dreiecks** **326024**

Vektoren entstehen aus einer Verschiebung.
Verschieben Sie das Dreieck

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

so dass die Ecke $\vec{A}$ auf $\vec{A}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu liegen kommt. Führe die Verschiebung grafisch, d.h. mit Lineal und Geodreieck aus. **Lösung:**




Durch die Verschiebung entsteht eine Menge von Pfeilen, die die Ecken des Dreiecks verschieben. Sie haben alle die selbe Länge und die selbe Richtung. All die Pfeile denken wir als ein Objekt, als Vektor. Er hat also keinen Anfangspunkt, sondern nur Länge und Richtung.

**Definition 1.9 Vektor**

Ein **Vektor** ist durch eine Länge (Grösse) und Richtung gegeben.

[Papula, Bd. 1 II 1.1]
Wir verwenden zur Kennzeichnung von Vektoren den Pfeil über dem Namen der Variablen.

**Beispiel 1.17 Verschiebung eines Dreiecks, forts.** **844255**

Berechne den Vektor der Verschiebung mit Zahlen. Führe dann die Verschiebung rechnerisch aus.

**Lösung:**
Der Vektor der Verschiebung ist

$$\vec{v} = \vec{A}' - \vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Ecken kommen also zu liegen auf

$$\begin{aligned}\vec{A}' &= \vec{A}+\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\ \vec{B}' &= \vec{B}+\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}\\ \vec{C}' &= \vec{C}+\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Wie das Beispiel zeigt, kann die Verschiebung durch Berechnung von Koordinaten oder durch eine Konstruktion durchgeführt werden. Das Resultat ist das gleiche.
Dabei haben wir einige Begriffe und Konzepte verwendet, ohne sie ausdrücklich zu benennen. Sie sollen im Nachfolgenden Schritt für Schritt eingeführt werden.

**Beispiel 1.18 Verkettung von Verschiebungen** **145238**

Verschiebe das Dreieck

$$\vec{A} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix}1\\13\end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix}15\\7\end{pmatrix}$$

um den Verschiebungs-Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. Verschiebe dann $\vec{A}', \vec{B}', \vec{C}'$ um den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$. Wie kommen wir direkt zur Verschiebung

$$\vec{A}\vec{B}\vec{C} \to \vec{A}''\vec{B}''\vec{C}'' \text{ ?}$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned}\vec{A}' &= \vec{A}+\vec{v} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\\ \vec{B}' &= \vec{B}+\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\11\end{pmatrix}\\ \vec{C}' &= \vec{C}+\vec{v} = \begin{pmatrix}16\\5\end{pmatrix}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\vec{A}'' &= \vec{A}'+\vec{v} = \begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}\\ \vec{B}'' &= \vec{B}'+\vec{v} = \begin{pmatrix}6\\13\end{pmatrix}\\ \vec{C}'' &= \vec{C}'+\vec{v} = \begin{pmatrix}20\\7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Um die Verschiebung $\vec{A} \to \vec{A}''$ direkt zu berechnen, können die Verschiebungs-Vektoren addiert werden

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$$

So berechnet sich z.B. $\vec{A}''$ zu

$$\vec{A}'' = \vec{A} + \vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Das Ausführen von mehreren Verschiebungen nacheinander entspricht der Vektoraddition.

**Definition 1.10 Vektoradditon**

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden addiert, indem

- $\vec{b}$ parallel verschoben wird, bis sein Anfangspunkt mit dem Endpunkt von $\vec{a}$ zusammenfällt.
- Der Summenvektor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ geht vom Anfangspunkt von $\vec{a}$ bis zum Endpunkt von $\vec{b}$

**Definition 1.11 Gegenvektor = inverser Vektor**

Zu jedem Vektor $\vec{a}$ gibt es einen Gegenvektor $-\vec{a}$. Er besitzt den gleichen Betrag aber die entgegengesetzte Richtung.

**Definition 1.12 Differenz-Vektor**

Der Differenz-Vektor $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ ist die Summe von $\vec{a}$ und $-\vec{b}$

**Definition 1.13 Multiplikation mit einer Zahl**

Durch die Multiplikation von $\vec{a}$ mit einer reellen Zahl $\lambda$ entsteht ein neuer Vektor $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ mit Betrag $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$. $\vec{b}$ ist parallel (Fall $\lambda > 0$) oder antiparallel (Fall $\lambda < 0$) zu $\vec{a}$ gerichtet.

KAPITEL 2

# Trigonometrie

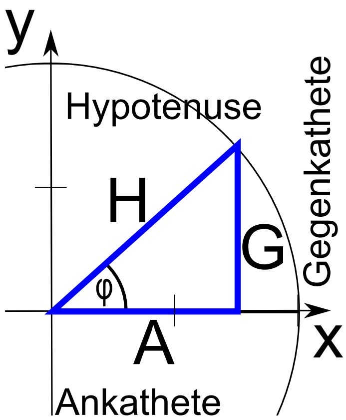
## 2.1 Definition der Trigonometrischen Funktionen

**Definition 2.1 Winkelfunktionen**

$$\sin(\alpha) = \frac{G}{H};\ \cos(\alpha) = \frac{A}{H}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{G}{A};\ \cot(\alpha) = \frac{A}{G}$$

Mit den Abkürzungen A für Ankathete, G für Gegenkathete und H für Hypotenuse.

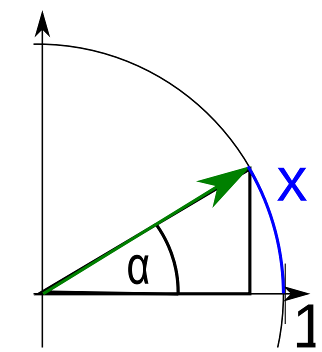



[Papula, Bd. 1 III 9.1]

**Definition 2.2 Bogenmass**

Unter dem Bogenmass $x$ eines Winkels $\alpha$ (in Grad) verstehen wir die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis.

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{\alpha}{360°}$$




Für die Umrechnung von Bogenmass auf Winkel-Grad oder umgekehrt benutzen wir eine Tabelle und den Innen-Winkel eines vollen Kreises in den beiden Masseinheiten.

**Beispiel 2.1 Rechne die Masseinheit um** **245307**

Berechne die Winkel $x = \frac{\pi}{7}$ und $\varphi = 12°$ in beiden Masseinheiten. **Lösung:**

Wir beginnen mit der Feststellung, dass ein voller Kreis in den beiden Masseinheiten $2\pi$ oder 360° entspricht:

| Bogenmass | Winkelgrad |
|---|---|
| $2\pi$ | 360° |
| $\frac{\pi}{7}$ | |

Danach berechnen wir den Quotienten der dritten und zweiten Zeile (in der Spalte wo wir die Einträge schon kennen):

$$f = \frac{\frac{\pi}{7}}{2\pi} = \frac{1}{14} .$$

$f$ kann nun benutzt werden um alle Einträge der dritten Zeile zu berechnen:

$$\alpha = f \cdot 360° = \frac{360°}{14} = 25.71° .$$

Gleich verfahren wir bei der Umrechnung von Winkelgrad in Bogenmass:

| Bogenmass | Winkelgrad |
|---|---|
| $2\pi$ | $360°$ |
| | $12°$ |

Der Quotient der dritten und zweiten Zeile (in der Spalte wo wir die Einträge schon kennen) ist hier

$$f = \frac{12°}{360°} = \frac{1}{30} .$$

$f$ kann nun benutzt werden um alle Einträge der dritten Zeile zu berechnen:

$$x = f \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{30} = 0.209 .$$

**Definition 2.3 Arkustangens-Funktion**

Die Arkustangens-Funktion ordnet den Stücken $x > 0$ und $y$ den Winkel $\varphi$ zu.

$$\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$$

Im 2. und 3. Quadranten (d.h. $x < 0$) rechne $\varphi = 180° + \arctan(y/x)$ oder im Bogenmass $\varphi = \pi + \arctan(y/x)$

**Beispiel 2.2 Neigungswinkel** **084725**

Berechne den Neigungswinkel für ein Gelände mit 5%, 50%, 100% und 200% Neigung. **Lösung:**

Bei einer Neigung von 5% ist das Gelände parallel zum Vektor $\begin{pmatrix} 100 \\ 5 \end{pmatrix}$. Der Neigunswinkel ist also

$$\varphi = \arctan(\frac{5}{100}) = 2.86°$$

Analog

$$\begin{aligned}\varphi_{50} &= \arctan(\tfrac{50}{100}) = 26.57^\circ \\ \varphi_{100} &= \arctan(\tfrac{100}{100}) = 45^\circ \\ \varphi_{200} &= \arctan(\tfrac{200}{100}) = 63.43^\circ\end{aligned}$$

## 2.2 Geraden, Ebenen in Parameterform

### 2.2.1 Geradengleichung

**Beispiel 2.3 Bestimme die Punkte auf der Geraden durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$ 814251**

Gegeben seien die Punkte

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Berechne zunächst zwei weitere Punkte auf der Geraden durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$. Überlege dann, wie man alle Punkte auf der Geraden berechnen kann.

**Lösung:**

Der Vektor der die Punkte $\vec{A}$ und $\vec{B}$ verbindet ist

$$\vec{u} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Um weitere Punkte auf der Geraden zu bestimmen gehen wir von $\vec{A}$ zum Beispiel nur den halben Weg in Richtung von $B$:

$$\vec{P} = \vec{A} + \frac{1}{2} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

oder $\frac{3}{4}$ vom Weg:

$$\vec{Q} = \vec{A} + \frac{3}{4} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Punkte $\vec{P}$ und $\vec{Q}$ liegen sicher auf der Geraden durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$. Es wird ersichlich, dass wir irgendeinen Teil des Weges zwischen Alle Punkte auf der Geraden sind gegeben durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$ gehen können und so stets einen Punkt auf der Geraden bleiben. Wir können das wie folgt schreiben

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$$

Dabei kann $\lambda \in \mathbb{R}$ irgendeinen Wert annehmen - auch negative Werte oder auch $|\lambda| > 1$.

**Definition 2.4 Parameterdarstellung einer Geraden**

Die Parameterdarstellung einer Geraden $g$ ist $g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$

- $\vec{A}$ heisst **Aufpunkt** (oder auch Stütz-Pfeil).
- $\vec{u}$ heisst **Richtungsvektor**

[Papula, Bd. 1 II 4.1]

**Beispiel 2.4 Punkte einer Geraden** **702095**

Die Gerade ist gegeben durch

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Liegen die Punkte auf der Geraden $g$?

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}, \vec{S} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

Wir untersuchen dazu, ob der Verbindungsvektor von $\vec{C}$ zum Aufpunkt kollinear zum Richtungsvektor ist. Wir erhalten

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\vec{c}$ ist ein Vielfaches von $\vec{u}$, deshalb liegt $\vec{C}$ auf der Geraden. Des weiteren liegt $\vec{Q}$ und $\vec{R}$ nicht auf der Geraden dafür aber $\vec{S}$.

In $\mathbb{R}^2$ gibt es die Parameterdarstellung der Geraden und die Darstellung in Koordinatenform (wir werden sie später kennenlernen).
In $\mathbb{R}^3$ und in $\mathbb{R}^N$ mit $N > 3$ gibt es nur die Parameterdarstellung der Geraden.

### 2.2.2 Ebenengleichung

Durch einen festen Punkt (den Aufpunkt) und eine gegebene Richtung (den Richtungsvektor) erhält man eine Gerade. Nimmt man einen zweiten Richtunsvektor hinzu, dann entsteht eine Ebene.

**Definition 2.5 Parameterdarstellung einer Ebene in $\mathbb{R}^3$**

Die Parameterdarstellung einer Ebene in $\mathbb{R}^3$ ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{P} + \lambda \vec{u} + \nu \vec{v}$$

- $\vec{P} \in \mathbb{R}^3$ heisst **Aufpunkt** (oder Stützpfeil)
- $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ heissen **Richtungsvektoren**
- $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$ sind freie Parameter

Die Richtungsvektoren müssen nicht unbedingt senkrecht aufeinander stehen. Sie dürfen aber *nicht kollinear* sein.

**Beispiel 2.5 Bestimme die Ebene in Parameterdarstellung** **787135**

Die Ebene $E$ geht durch die Punkte

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

**Lösung:**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \vec{A} + \lambda \left(\vec{B} - \vec{A}\right) + \nu \left(\vec{C} - \vec{A}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Beispiel 2.6 Liegen die Punkte in der Ebene $E$?** **642893**

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} -22 \\ 28 \\ -22 \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{S} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

Um zu beurteilen, ob $\vec{Q}$ in der Ebene liegt berechnen wir den Verbindungsvektor vom Aufpunkt zu $\vec{Q}$:

$$\vec{q} = \vec{Q} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -24 \\ 28 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Gelingt es nun $\vec{q}$ als Summe der beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ darzustellen, liegt $\vec{Q}$ in der Ebene:

$$\begin{pmatrix} -24 \\ 28 \\ -24 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aus der zwei ersten Komponenten berechnen wir $\lambda$ und $\nu$:

$$\begin{aligned} L_1: \quad -24 &= 2\lambda + 6\nu \\ L_2: \quad 28 &= -4\lambda - 8\nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 + 2L_1: \quad -20 &= 4\nu \\ &\Rightarrow \nu = -5 \ \Rightarrow \ \lambda = 3 \ . \end{aligned}$$

Setzen wir dieses Resultat in die dritte Komponente ein, ergibt sich eine wahre Aussage:

$$-24 = 2 \cdot 3 + 6 \cdot (-5)$$

Der Verbindungsvektor $\vec{q}$ lässt sich also zerlegen in eine Komponente entlang $\vec{u}$ und eine entlang $\vec{v}$. Deshalb liegt $\vec{Q}$ in der Ebene.
Für $\vec{R}$ ergibt sich beim Einsetzen in die dritte Komponente ein Widerspruch. Deshalb liegt $\vec{R}$ nicht in der Ebene dafür aber der Punkt $\vec{S}$ mit $\lambda = 5; \nu = -3$.

## 2.3 Parameterform vs. Geradengleichung

In $\mathbb{R}^2$ kann eine Gerade mit dem Aufpunkt und dem Richtungsvektor dargestellt werden z.B.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder in Form einer Gleichung, der Geradengleichung

$$y = m\,x + c$$

geschrieben werden. Als Vorbereitung auf die späteren Kapitel nummerieren wir die Koordinatenachsen. Dazu schreiben wir $x_1$ und $x_2$ statt $x$ und $y$. Mit dieser Benennung lautet die Koordinatengleichung:

$$x_2 = m\,x_1 + c$$

Um von Parameterform auf die Koordinatenform zu gelangen können wir mit dem Richtungsvektor die Steigung berechnen

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{-3}$$

Ausserdem soll der Aufpunkt auf der Geraden liegen. Deshalb kann man ihn in die unfertige Geradengleichung einsetzen und es muss gelten:

$$2 = -\frac{1}{3}\,10 + c \Rightarrow c = \frac{16}{3}$$

Damit ist auch die Konstante der Geradengleichung bestimmt:

$$x_2 = -\frac{1}{3}\,x_1 + \frac{16}{3} \ .$$

KAPITEL 3

# Skalarprodukt, Orthogonal-Basis

## 3.1 Basis, Komponenten

**Definition 3.1 Basis**

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ heissen Basis des Vektorraums $V$, falls

- sie linear unabhängig sind
- und jeder Vektor in $V$ als Linearkombination von $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ geschrieben werden kann.

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ heissen **Basisvektoren**.

[Goebbels and Ritter, 2011, 3.12,p.433]

**Definition 3.2 Dimension**

Die Anzahl der Basisvektoren eines Vektorraums $V$ heisst **Dimension** von $V$

**Definition 3.3 Koordinate (Komponente)**

Seien die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ eine Basis eines Vektorraums und

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \ \ldots \ + v_n\vec{e}_n \ ,$$

dann nennen wir $(v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_n)$ die **Koordinaten** von $\vec{v}$ (oder auch die **Komponenten** von $\vec{v}$).

Wir werden später zeigen, dass sich jeder Vektor in Komponenten zerlegen lässt, auch bezüglich einer Basis, die weder aus senkrechten noch normierten Basisvektoren besteht.

**Beispiel 3.1 Vektor vs. Komponente** **785039**

Schreiben Sie die Vektoren mit den Komponenten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ in mit den verschiedenen Basen.

1. $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = t$, $\vec{e}_3 = t^2$
2. $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = t^2 - 1$, $\vec{e}_3 = t^2 - t$
4. $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
5. $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = \cos(t)$, $\vec{e}_3 = \sin(t)$

**Lösung:**

1. $1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t - 2 \cdot t^2 = 1 - 2t^2$
2. $1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $1 + 2t - 2t^2$
4. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
5. $1 \cdot 1 + 0 \cdot \cos(t) - 2\sin(t) = 1 - 2\sin(t)$

**Beispiel 3.2 Vektorkomponenten** **128857**

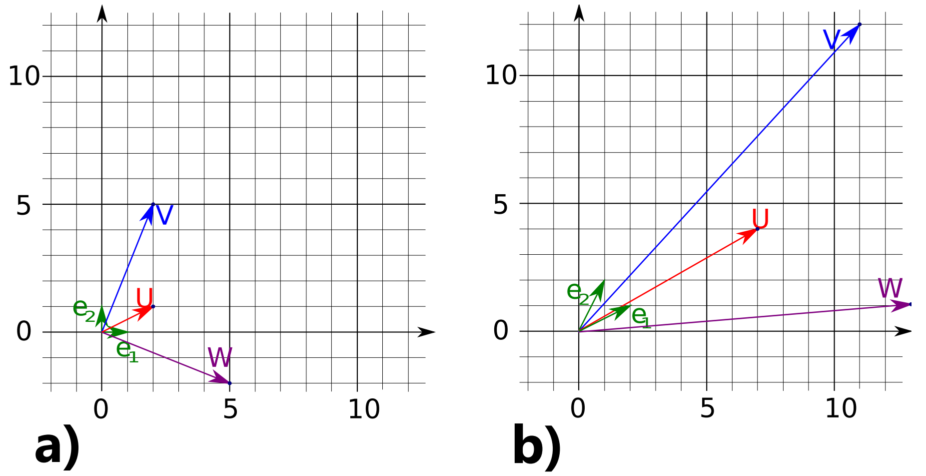
Zeichnen Sie die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$. Die Basis-Vektoren sind

1. $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Komponenten der Vektoren sind in jeder Basis

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{W} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**




**Definition 3.4 Orthogonal-Basis**

Eine Basis $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots \vec{g}_n$ heisst **orthogonal**, wenn die Basisvektoren rechtwinklig zu einander stehen.

**Definition 3.5 Normierte Basis**

Eine Basis heisst **normiert**, wenn die Basisvektoren $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots \vec{g}_n$ die Länge $1$ haben.

**Definition 3.6 Orthonormalbasis**

Ist die Basis sowohl orthogonal wie auch normiert, heisst sie **Orthonormalbasis**.

## 3.2 Skalarprodukt

Dieses Kapitel ist ein schönes Beispiel für die axiomatische Arbeitsweise der modernen Mathematik. Am Anfang steht eine gescheite Definition

**Definition 3.7 Skalarprodukt**

Für $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die den Winkel $\varphi$ einschliessen, ist das Skalarprodukt

$$\vec{a} \odot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

[Papula, Bd. 1 II 2.3]

Daraus werden verschiedene Eigenschaften abgeleitet. Zuerst stellen wir fest, dass

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \vec{b} \odot \vec{a}$$

denn

$$\vec{a} \odot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\varphi) = \vec{b} \odot \vec{a}\ .$$

Danach finden wir

$$(\lambda\,\vec{a}) \odot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \odot \vec{b})$$

Um dies zu zeigen müssen wir den folgenden Ausdruck anschauen:

$$(\lambda\,\vec{a}) \odot \vec{b} = |\lambda\,\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)\ .$$

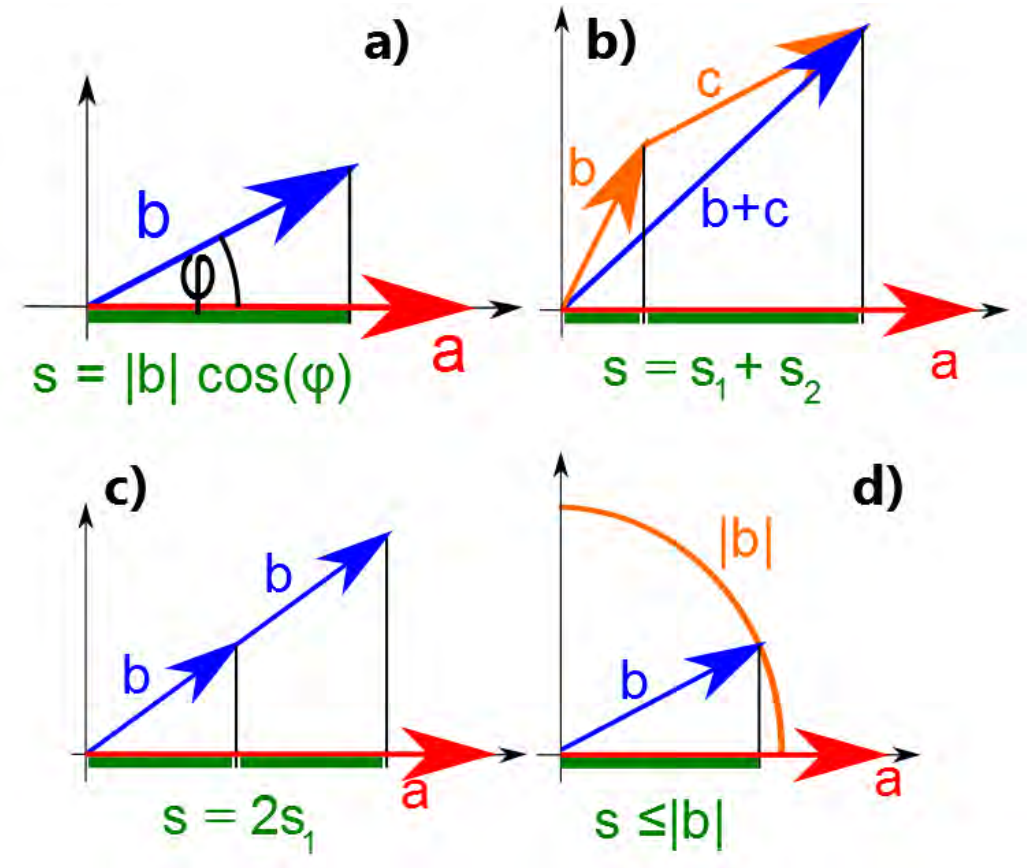



Abbildung 3.1: Die ersten Gesetzmässigkeiten für das Skalarprodukt folgen direkt aus geometrischen Betrachtungen.

Ist $\lambda > 0$ dann wird der Zwischenwinkel bei der Multiplikation mit $\vec{a}$ nicht verändert, also gilt

$$|\lambda\,\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = \lambda \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = \lambda \cdot (\vec{a} \odot \vec{b}) \ .$$

Ist $\lambda < 0$ dann wird durch die Multiplikation der Zwischenwinkel verändert: $\varphi \to \varphi'$, aber es gilt $\cos(\varphi') = -\cos(\varphi)$. Also

$$|\lambda\,\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = -\lambda \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot [-\cos(\varphi)] = \lambda \cdot (\vec{a} \odot \vec{b}) \ .$$

Wir finden also, dass das Skalarprodukt alle (für positive und negative) Faktoren $\lambda$ assoziativ ist.

Der Spezialfall $|a| = 1$ ist nun besonders anschaulich:

## 3.3 Spezialfall $|a| = 1$

Gemäss der Definition ist hier $\vec{a} \odot \vec{b} = |b| \cdot \cos(\varphi)$. Aus der Skizze in Abb. 3.1 a) ist aber ersichtlich, dass $|b| \cdot \cos(\varphi)$ genau die Länge des Schattens (grün) von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ ist. Das merken wir uns. Wir wollen nun $(\vec{b} + \vec{c}) \odot \vec{a}$ berechnen, d.h. den Schatten von $(\vec{b} + \vec{c})$ auf $\vec{a}$. Gemäss Abb. 3.1 b) ist dieser Schatten gleich der Summe der Schatten von $\vec{b}$ und von $\vec{c}$. Also gilt

$$(\vec{b} + \vec{c}) \odot \vec{a} = \vec{b} \odot \vec{a} + \vec{c} \odot \vec{a} \ . \tag{3.1}$$

Jetzt interessieren wir uns für den Schatten von $r \cdot \vec{b}$ auf $\vec{a}$, d.h. der Schatten des Vektors $\vec{b}$, der um den Faktor $r$ gedehnt wurde. Gemäss Abb. 3.1 c) muss dieser Schatten um den selben Faktor gedehnt sein:

$$(r \cdot \vec{b}) \odot \vec{a} = r \cdot (\vec{b} \odot \vec{a}) \ . \tag{3.2}$$

Wie Abb. 3.1 c) zeigt, müssen wir auch zulassen, dass ein Schatten eine “negative Länge” hat, sollte $\lambda$ mal negativ ausfallen. Schliesslich stellen wir noch fest, dass der Schatten (bei einem rechtwinkligen Lichteinfall) nie länger als das reale Objekt sein kann

$$\left|\vec{b} \odot \vec{a}\right| \leq \left|\vec{b}\right| \ . \tag{3.3}$$

## 3.4 Allgemeiner Fall

Wir wollen nun die Gleichungen 3.1 bis 3.3 benutzen um Gesetze für den allgemeinen Fall $|a| \neq 1$ zu finden. Zuerst stellen wir fest, dass aus der Definition des Skalarprodukts folgt

$$\vec{v} \odot \vec{v} = |v| \cdot |v| \cdot \underbrace{\cos(\varphi)}_{=1} = |v|^2$$

Dann stellen wir fest, dass jeder Vektor[1] $\vec{v}$ auf die Länge 1 gebracht werden kann, indem wir ihn durch seine Länge dividieren:

$$\vec{v}' = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} \ .$$

Nun ist Eqn. 3.1 nur gültig, wenn $\vec{a}$ die Länge 1 hat. Deshalb müssen wir darin $\vec{a}$ jeweils mit $\frac{\vec{a}}{|a|}$ ersetzen:

$$(\vec{b} + \vec{c}) \odot \frac{\vec{a}}{|a|} = \vec{b} \odot \frac{\vec{a}}{|a|} + \vec{c} \odot \frac{\vec{a}}{|a|} \ . \tag{3.4}$$

Diese Gleichung kann auf beiden Seiten mit $|a|$ multipliziert werden und wir erhalten

$$(\vec{b} + \vec{c}) \odot \vec{a} = \vec{b} \odot \vec{a} + \vec{c} \odot \vec{a}$$

Daraus ergeben sich die

**Satz 3.1 Gesetze für das Skalarprodukt**

1. $\vec{a} \odot \vec{b} = \vec{b} \odot \vec{a}$, Kommutativ-Gesetz
2. $(r \cdot \vec{b}) \odot \vec{a} = r(\vec{b} \odot \vec{a})$, Assoziativ-Gesetz
3. $(\vec{b} + \vec{c}) \odot \vec{a} = \vec{b} \odot \vec{a} + \vec{c} \odot \vec{a}$, Distributiv-Gesetz
4. $\left|\vec{a} \odot \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|$, Schwarz’sche Ungleichung

[Goebbels and Ritter, 2011, 3.1,p.394] [Papula, Bd. 1 II 3.3]

Für die erste Gleichung wurde verwendet, dass

$$\vec{a} \odot \vec{b} = |a| \cdot |b| \cdot \cos(\varphi) = |b| \cdot |a| \cdot \cos(\varphi) = \vec{b} \odot \vec{a}$$

Bisher haben wir ausschliesslich die abstrakte Schreibweise für Vektoren benutzt. Im Folgenden werden wir herleiten, wie man das Skalarprodukt für Vektoren in Komponenten-Schreibweise berechnet.

[1] Um genau zu sein, jeder Vektor mit Ausnahme von $\vec{0}$

## 3.5 Komponenten-Schreibweise in Orthogonalbasis

Wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in Komponenten-Schreibweise als

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} ,$$

wie berechnen wir dann das Skalarprodukt $\vec{a} \odot \vec{b}$? Die meisten werden wohl antworten

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 \ ,$$

was zwar richtig ist, solange man mit einer Orthonormalbasis arbeitet. Für jede andere Basis ist diese Antwort aber *falsch*. Z.B. nehmen wir die Basis

$$\{\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3\} = \{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_E ,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_E ,\ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_E \} .$$

Mit dem Index $E$ drücken wir aus, dass die Vektoren in der Standardbasis $\mathbf{E} = \{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ gegeben sind. Die Basisvektoren sind normiert aber *nicht orthogonal*. Die Basisvektoren geschrieben in dieser Basis sind

$$\vec{f}_1 = 1 \cdot \vec{f}_1 + 0 \cdot \vec{f}_2 + 0 \cdot \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_F ,\ \vec{f}_2 = 1 \cdot \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_F ,\ \vec{f}_3 = 1 \cdot \vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_F$$

Wenn wir hier naiv die Komponentenschreibweise für das Skalarprodukt benutzen, dann erhielten wir

$$\vec{f}_1 \odot \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_F \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_F = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$$

Das würde ja bedeuten, dass $\vec{f}_1$ senkrecht auf $\vec{f}_2$ steht, aber das ist eben falsch. Die Basisvektoren stehen gerade nicht senkrecht aufeinander.
Wir werden deshalb hier die Berechnung des Skalarprodukts für Vektoren in Komponenten-schreibweise einer Orthonormalbasis herleiten. Für andere Basen kann das Skalarprodukt auf gleiche Weise hergeleitet werden.

**Beispiel 3.3 Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$ für die Basisvektoren** **195709**

Berechnen Sie das Skalarprodukt zwischen den Basisvektoren, d.h. der Schatten von $\vec{e}_1$ auf $\vec{e}_2$, von $\vec{e}_2$ auf $\vec{e}_1$, von $\vec{e}_1$ auf $\vec{e}_1$, von $\vec{e}_2$ auf $\vec{e}_2$?

**Lösung:**

$$\vec{e}_1 \odot \vec{e}_2 = 0 ; \qquad \vec{e}_2 \odot \vec{e}_1 = 0$$
$$\vec{e}_1 \odot \vec{e}_1 = 1 ; \qquad \vec{e}_2 \odot \vec{e}_2 = 1$$

**Beispiel 3.4 Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$ für beliebige Vektoren** **536234**

Berechne das Skalarprodukt zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Schreibe dafür die Vektoren als Summe der Basisvektoren und wenden dann die Gesetze für das Skalarprodukt (Satz 1) an.

**Lösung:**

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) \odot (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2)$$
$$= a_1b_1\vec{e}_1 \odot \vec{e}_1 + a_1b_2\vec{e}_1 \odot \vec{e}_2$$
$$+a_2b_1\vec{e}_2 \odot \vec{e}_1 + a_2b_2\vec{e}_2 \odot \vec{e}_2 = a_1b_1 + a_2b_2$$

**Satz 3.2 Skalarprodukts für Vektoren in Komponenten-Schreibweise einer Orthonormalbasis**

Das Skalarprodukt in einer Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^N$ ist

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_Nb_N$$
$$= \sum_{i=1}^{N} a_ib_i$$

Mit diesem Resultat können wir nun Winkel zwischen Vektoren berechnen. Die Definition des Skalarprodukts aufgelöst nach dem Winkel gibt

$$\frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{|a| \cdot |b|} = \cos(\varphi)$$

oder sogar

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{|a| \cdot |b|}\right) .$$

Anderseits wissen wir nun wie wir das Skalarprodukt und die Längen der Vektoren berechnen. Beachte, dass der Ausdruck $\frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{|a| \cdot |b|}$ gemäss der Schwarz'schen Ungleichung im Bereich $[-1; 1]$ liegt und dass deshalb der Winkel stets eindeutig definiert ist.

**Infobox 3.1 Cos/ArcCos**

Bei der Berechnung des Zwischenwinkels mit Hilfe des Skalarprodukts und $\arccos$ entstehen **keine** Probleme.

**Beispiel 3.5 Berechne das Skalarprodukt und den Zwischenwinkel** 599954

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

- $\vec{a} \odot \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ($\varphi = 60°$)
- $\vec{b} \odot \vec{c} = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ($\varphi = 90°$)

- $\vec{a} \odot \vec{c} = 1$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ($\varphi = 45°$)

## 3.6 Skalarprodukt in nicht orthogonaler Basis*

Wir betrachten das Beispiel der Basis

$$\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_E, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_E, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}_E\}$$

Die Basisvektoren sind normiert aber *nicht orthogonal*. Um das Skalarprodukt in dieser Basis zu berechnen, berechnen wir zuerst das Skalarprodukt zwischen den Basisvektoren. Dafür verwenden wir die Schreibweise der Basisvektoren in der Orthonormalbasis

$$\vec{f_1} \odot \vec{f_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_E \odot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_E = 1 \qquad \vec{f_1} \odot \vec{f_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_E \odot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_E = \frac{1}{2}$$

$$\vec{f_1} \odot \vec{f_3} = \frac{1}{2} \qquad \vec{f_2} \odot \vec{f_2} = 1$$

$$\vec{f_2} \odot \vec{f_3} = \frac{1}{2} \qquad \vec{f_3} \odot \vec{f_3} = 1$$

Nun berechnen wir das Skalarprodukt zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}_F$ und $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}_F$ in dieser Basis und wenden dann die Gesetze für das Skalarprodukt 1 an:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}_F \odot \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}_F &= \left(a_1\vec{f_1} + a_2\vec{f_2} + a_3\vec{f_3}\right) \odot \left(b_1\vec{f_1} + b_2\vec{f_2} + b_3\vec{f_3}\right) \\
&= (a_1\vec{f_1}) \odot (b_1\vec{f_1}) + (a_1\vec{f_1}) \odot (b_2\vec{f_2}) + (a_1\vec{f_1}) \odot (b_3\vec{f_3}) \\
&\quad +(a_2\vec{f_2}) \odot (b_1\vec{f_1}) + (a_2\vec{f_2}) \odot (b_2\vec{f_2}) + (a_2\vec{f_2}) \odot (b_3\vec{f_3}) \\
&\quad +(a_3\vec{f_3}) \odot (b_1\vec{f_1}) + (a_3\vec{f_3}) \odot (b_2\vec{f_2}) + (a_3\vec{f_3}) \odot (b_3\vec{f_3}) \\
&= a_1b_1 + \frac{1}{2}a_1b_2 + \frac{1}{2}a_1b_3 + \frac{1}{2}a_2b_1 + a_2b_2 + \frac{1}{2}a_2b_3 + \frac{1}{2}a_3b_1 + \frac{1}{2}a_3b_2 + a_3b_3 \\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1
\end{aligned}$$

Als Kontrolle berechnen wir das Skalarprodukt zwischen den orthogonal Vektoren $\vec{a} = \vec{f_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_F$ und dem Vektor $\vec{b} = \vec{f_2} + \vec{f_3} - \vec{f_1} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}_F$.

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_F \odot \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}_F = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$$

Tatsächlich ergibt die Rechnung, dass die Vektoren orthogonal aufeinander stehen.

## 3.7 Orthogonale Projektion und Lot

**Satz 3.3 Projektion und Lot**

Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren. Der Vektor $\vec{b}$ lässt sich eindeutig als $\vec{b} = \vec{f} + \vec{h}$ schreiben, wobei $\vec{f}$ parallel zu $\vec{a}$ steht und $\vec{h}$ senkrecht zu $\vec{a}$. Dabei sind $\vec{f}$ und $\vec{h}$ eindeutig festgelegt über:

$$\vec{f} = \left(\vec{b} \odot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad \text{und} \quad \vec{h} = \vec{b} - \vec{f}$$

**Definition 3.8 Projektion und Lot**

$\vec{f}$ heisst die **Projektion** von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ und $\vec{h}$ heisst das **Lot** von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

[Goebbels and Ritter, 2011, 3.1, p.398]
Die "Logik dahinter" ist, dass wir mit dem Ausdruck $\vec{b} \odot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ die Länge des Schattens von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ berechnen. Merke, dass die Länge des Schattens nur dann richtig berechnet wird, wenn auf einen Vektor der Länge 1 — hier auf $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ — projiziert wird. Danach wird die Länge des Schattens mit einem Vektor der Länge 1 — auch das ist $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ — multipliziert. Deshalb hat $\vec{f}$ genau die Länge des Schattens von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ und die Richtung von $\vec{a}$.

**Beispiel 3.6 Zerlege $\vec{b}$ in Projektion und Lot bezüglich $\vec{a}$** **251965**

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

In der Formel für die Projektion kommt der Ausdruck $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ zwei mal vor, deshalb berechnen wir ihn im Voraus

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit vereinfacht sich die Projektion zu

$$\vec{f} = \left(\vec{b} \odot \vec{a}'\right) \cdot \vec{a}' = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \odot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{h} = \vec{b} - \vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

**Satz 3.4 Projektion und Spiegelung (an einer Geraden durch $\vec{0}$).**

Ein Punkt $\vec{P} \in \mathbb{R}^2$ wird durch

$$\vec{P'} = \vec{P} - \vec{P} \odot \vec{n} \cdot \vec{n} \tag{3.5}$$

auf die Gerade $g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ projiziert, wobei

$$\vec{n} = \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} \text{ und } \vec{n}' = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} \text{ oder } \vec{n}' = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} .$$

Durch

$$\vec{P''} = \vec{P} - 2\vec{P} \odot \vec{n} \cdot \vec{n}$$

wird der Punkt $\vec{P}$ an der Geraden gespiegelt.

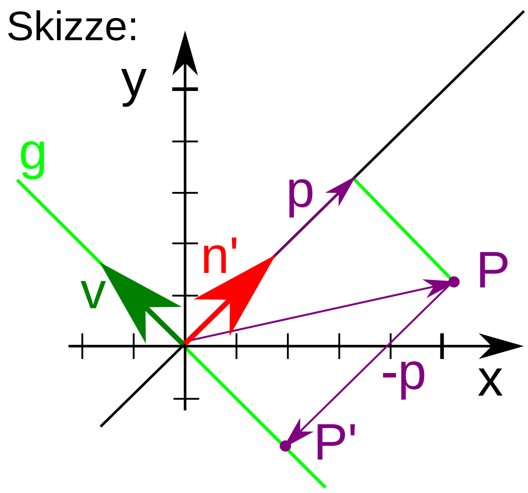



Abbildung 3.2: Illustration der Projektion mit der Benennung $\vec{p} = (\vec{P} \odot \vec{n}) \cdot \vec{n}$.

Beachte, dass eine Gerade die Ebene in zwei Halbebenen zerschneidet. Die Projektion $\vec{P} \odot \vec{n} \cdot \vec{n}$ zeigt stets in die selbe Halbebene wie $\vec{P}$, egal ob $\vec{n}$ in der selben Halbebene liegt wie $\vec{P}$. Deshalb bringt $\vec{P} - \vec{P} \odot \vec{n} \cdot \vec{n}$ den Punkt zurück auf die Gerade (Fig. 3.2), d.h. wir brauchen uns mit dem Vorzeichen in Gleichung 3.5 nicht beschäftigen. Es ist automatisch richtig.

## 3.8 Orthogonal Basis

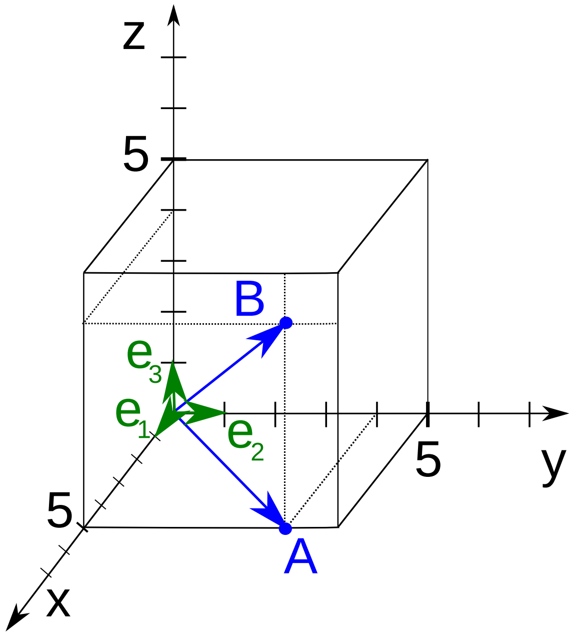
Wir schreiben die Komponenten meist in eine vertikale Liste

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Beachte, dass diese Liste noch kein geometrischer Vektor ist! Um den Vektor $\vec{v}$ zu erhalten müssen die Komponenten mit den Basisvektoren multipliziert und dann addiert werden.

### 3.8.1 Komponenten in einer Basis

**Beispiel 3.7 Drücke $\vec{A}$ und $\vec{B}$ als Linearkombination von $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_3$ aus** **158844**




$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 5\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 5\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$$

**Definition 3.9 Standard-Basis**

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ heissen **Standard-Basis** (auch kartesische Basis, kartesisanisches Koordinatensystem)

Was wir also bis jetzt indutitiv[2] gemacht haben, ist die Zerlegung von Vektoren in Komponenten entlang der Standardbasis. Diese Komponenten werden dann in Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ untereinander notiert.

**Infobox 3.2 Spaltenvektoren vs. Zeilenvektoren**

Papula benutzt Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und keine Zeilenvektoren $(a_x, a_y)$

[Papula, Bd. 1 II 2.1]

[2] d.h. ohne viel nachzudenken

**Beispiel 3.8 Basis-Wechsel (orthonormal)** **585056**

Drücke die Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ in der Basis $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ aus (alle Vektoren sind in der Standard-Basis angegeben).

$$\{\vec{f_1},\, \vec{f_2}\} = \{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\}$$

$$\{\vec{A},\, \vec{B}\} = \{\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-10\end{pmatrix}\}$$

**Lösung:**
Da die Basisvektoren senkrecht aufeinander stehen, können wir die Komponenten mit Projektionen auf die Basisvektoren berechnen:

$$A_{1F} = \vec{A} \odot \vec{f_1} = 0$$

und

$$A_{2F} = \vec{A} \odot \vec{f_2} = 5$$

Der Vektor $\vec{A}$ lautet also in der Basis**F**:

$$\vec{A}_F = \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}_F$$

Das hätten wir uns auch denken können, denn $\vec{A}$ hat die selbe Richtung wie $\vec{f_2}$, ist aber fünf Mal länger.

$$B_{1F} = \vec{A} \odot \vec{f_1} = -5$$

und

$$B_{2F} = \vec{A} \odot \vec{f_2} = 10 \quad \Rightarrow \quad \vec{B}_F = \begin{pmatrix}-5\\10\end{pmatrix}_F$$

**Satz 3.5 Komponenten in einer Orthonormal-Basis**

Bei der Basis-Transformation von der Standard-Basis in die Orthonormal-Basis $\mathbf{F} = \left\{\vec{f_1},\, \vec{f_2},\, \ldots\right\}$ sind die Komponenten gegeben durch:

$$B_{j,F} = \vec{B} \odot \vec{f_j}$$

**Beispiel 3.9 Basis-Wechsel (orthogonal)** **304231**

Drücke die Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ in der Basis $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ aus (alle Vektoren sind in der Standard-Basis angegeben).

$$\{\vec{f_1},\, \vec{f_2}\} = \{\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}\}$$

$$\{\vec{A},\, \vec{B}\} = \{\begin{pmatrix}-60\\-80\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}200\\100\end{pmatrix}\}$$

**Lösung:**
Da die Basisvektoren senkrecht aufeinander stehen, können wir die Komponenten mit Projektionen auf die Basisvektoren berechnen:

$$A'_{1F} = \vec{A} \odot \vec{f}_1 \cdot \frac{1}{|\vec{f}_1|} = \frac{0}{10} 0$$

und

$$A'_{2F} = \vec{A} \odot \vec{f}_2 \cdot \frac{1}{|\vec{f}_2|} = \frac{-1000}{10} = -100$$

Der Vektor $\vec{A}$ kann also mit den Vektoren der Basis wie folgt geschrieben werden:

$$\vec{A} = 0 \cdot \vec{f}_1 \cdot \frac{1}{|\vec{f}_1|} - 100 \cdot \vec{f}_2 \cdot \frac{1}{|\vec{f}_2|} = 0 \cdot \vec{f}_1 - 10\vec{f}_2$$

Also lautet $\vec{A}$ in der Basis $\mathbf{F}$:

$$\vec{A}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}_F$$

Auch das hätten wir uns auch denken können, denn $\vec{A}$ ist kollinear zu $\vec{f}_2$, hat die umgekehrte Richtung und ist zehn Mal länger.

$$B'_{1F} = \vec{B} \odot \vec{f}_1 \cdot \frac{1}{|\vec{f}_1|} = \frac{-1000}{10} = -100$$

und

$$B'_{2F} = \vec{B} \odot \vec{f}_2 \cdot \frac{1}{|\vec{f}_2|} = \frac{2000}{10} 200$$

Wir können also schreiben:

$$\vec{B} = -100 \cdot \vec{f}_1 \cdot \frac{1}{|\vec{f}_1|} + 200 \cdot \vec{f}_2 \cdot \frac{1}{|\vec{f}_2|} = -10 \cdot \vec{f}_1 + 20\vec{f}_2 \quad \Rightarrow \vec{B}_F = \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \end{pmatrix}_F$$

Beachte, dass hier durch die Skalarprodukte wie

$$B'_{1F} = \vec{B} \odot \vec{f}_1 \cdot \frac{1}{|\vec{f}_1|}$$

nicht direkt die Komponenten berechnet werden, sondern die Länge der Projektion. Die Komponenten ergeben sich schliesslich erst, wenn die Normierung der Basisvektoren auf die $B'_{1F}$ transferiert wird:

$$B_{1F} = \frac{B'_{1F}}{|\vec{f}_1|} = \frac{\vec{B} \odot \vec{f}_1}{|\vec{f}_1|^2}$$

**Satz 3.6 Komponenten in einer Orthogonal-Basis**

Bei der Basis-Transformation von der Standard-Basis in die Orthogonal-Basis $\mathbf{F} = \left\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots\right\}$ sind die Komponenten gegeben durch:

$$B_{j,F} = (\vec{B} \odot \vec{f}_j) \cdot \frac{1}{|\vec{f}_j|^2}$$

**Beispiel 3.10 Basis-Wechsel (orthonormal)** **101909**

Drücke die Vektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ in der Basis $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ aus (alle Vektoren sind in der Standard-Basis angegeben).

$$\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\} = \{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}\}$$

$$\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\} = \{\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\10\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\0\\5\end{pmatrix}\}$$

**Lösung:**

Da die Basisvektoren senkrecht aufeinander stehen, können wir die Komponenten mit Projektionen auf die Basisvektoren berechnen:

$$A_{1F} = \vec{A} \odot \vec{f}_1 = 5, \quad A_{2F} = \vec{A} \odot \vec{f}_2 = 0 \text{ und } A_{3F} = \vec{A} \odot \vec{f}_3 = 0$$

Der Vektor $\vec{A}$ lautet also in der Basis**F**:

$$\vec{A}_F = \begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}_F$$

Das hätten wir uns auch denken können, denn $\vec{A}$ hat die selbe Richtung wie $\vec{f}_1$, ist aber fünf Mal länger.

$$B_{1F} = \vec{B} \odot \vec{f}_1 = -5, \quad B_{2F} = \vec{B} \odot \vec{f}_2 = 10 \text{ und } B_{3F} = \vec{B} \odot \vec{f}_3 = 0$$

also

$$\vec{B}_F = \begin{pmatrix}-5\\10\\0\end{pmatrix}_F \quad .$$

Schliesslich

$$C_{1F} = \vec{C} \odot \vec{f}_1 = 10, \quad C_{2F} = \vec{C} \odot \vec{f}_2 = 0 \text{ und } C_{3F} = \vec{C} \odot \vec{f}_3 = 5$$

und also

$$\vec{C}_F = \begin{pmatrix}10\\0\\5\end{pmatrix}_F \quad .$$

**Beispiel 3.11 Basis-Wechsel (orthogonal)** **723703**

Drücke die Vektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ in der Basis $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ aus (alle Vektoren sind in der Standard-Basis angegeben).

$$\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\} = \{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\}$$

$$\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\} = \{ \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -14 \end{pmatrix} \}$$

**Lösung:**

Da die Basisvektoren senkrecht aufeinander stehen, können wir die Komponenten mit Projektionen auf die Basisvektoren berechnen. Für die orthogonalen Vektoren verwenden wir die Normierung der Komponenten wie im Satz vorher:

$$A_{1F} = \vec{A} \odot \vec{f_1} \cdot \frac{1}{|\vec{f_1}|^2} = 0 \quad A_{2F} = \vec{A} \odot \vec{f_2} \cdot \frac{1}{|\vec{f_2}|^2} = 0$$

und

$$A_{3F} = \vec{A} \odot \vec{f_3} \cdot \frac{1}{|\vec{f_3}|^2} = \frac{36}{6} = 6$$

Also lautet $\vec{A}$ in der Basis**F**:

$$\vec{A}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}_F$$

Auch das hätten wir uns auch denken können, denn $\vec{A}$ ist parallel zu $\vec{f_3}$ ist aber sechs Mal länger.

$$B_{1F} = \vec{B} \odot \vec{f_1} \cdot \frac{1}{|\vec{f_1}|^2} = \frac{14}{2} = 7, \; B_{2F} = \vec{B} \odot \vec{f_2} \cdot \frac{1}{|\vec{f_2}|^2} = \frac{12}{3} = 4, \; B_{3F} = \vec{B} \odot \vec{f_3} \cdot \frac{1}{|\vec{f_3}|^2} = \frac{0}{6} = 0$$

Also lautet $\vec{A}$ in der Basis**F**:

$$\vec{B}_F = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}_F$$

Schliesslich berechnen wir

$$C_{1F} = \vec{C} \odot \vec{f_1} \cdot \frac{1}{|\vec{f_1}|^2} = \frac{6}{2} = 3, \; C_{2F} = \vec{C} \odot \vec{f_2} \cdot \frac{1}{|\vec{f_2}|^2} = \frac{0}{3} = 0, \; C_{3F} = \vec{C} \odot \vec{f_3} \cdot \frac{1}{|\vec{f_3}|^2} = \frac{-42}{6} = -7$$

und schreiben

$$\vec{C}_F = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}_F$$

Der Basis-Wechsel für nicht orthogonale Basen ist rechnerisch aufwendig. Wir werden dies später betrachten.

### 3.8.2 Was ist eine Basis?

**Infobox 3.3 Basis von $\mathbb{R}^3$**

Jeder Satz von 3 Vektoren (die nicht in einer Ebene liegen) ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Wir haben gesehen, dass sich jeder Punkt in der Ebene schreiben lässt als die Summe von zwei Vektoren. Wir wollen kurz analysieren, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit dies möglich ist. Wählen wir $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ wie in Abb. 3.3 a), ist die Zerlegung immer möglich. Im Beispiel ist $\vec{A} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Wählen wir $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ wie in Abb. 3.3 b), ist die Zerlegung des Vektors $\vec{B}$ zwar möglich, es gibt sogar mehrere Möglichkeiten für die Zerlegung. Der Vektor $\vec{A}$ hingegen kann nicht dargestellt werden! $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ liegen auf einer Geraden — sie sind kollinear — und mit einer

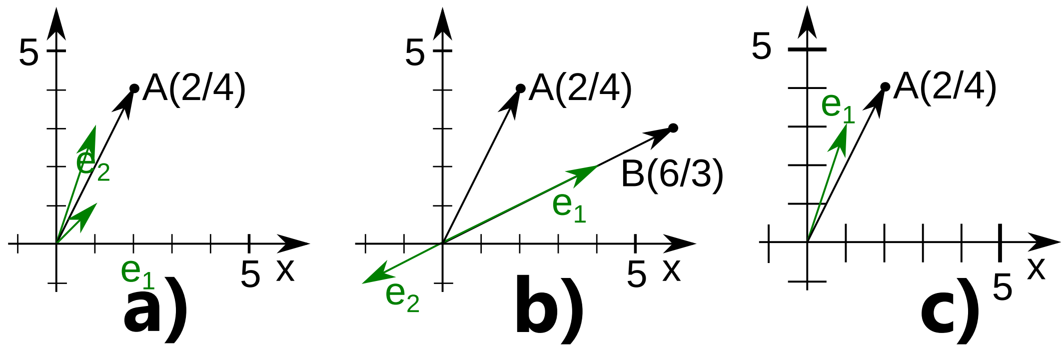



Abbildung 3.3: Die Darstellung eines Punktes in der Ebene als Summe von (zwei) Vektoren.

Addition dieser Vektoren ist es nicht möglich, von dieser Geraden wegzukommen. In Abb. 3.3 c) hingegen ist nur der Vektor $\vec{e}_2$ gegeben. Er reicht nicht um die Ebene abzudecken und um den Vektor $\vec{A}$ zu erreichen.

Mit den Fachbegriffen ausgedrückt, bedeutet dies: Für alle Situationen in Abb. 3.3 gilt, dass wir uns in der Ebene bewegen. Die Ebene $\mathbb{R}^2$ hat zwei Dimensionen, also brauchen wir mindestens zwei Basisvektoren. Deshalb ist der Vektor in Abb. 3.3 c) keine Basis. In Abb. 3.3 b) sind die Basisvektoren linear abhängig. Deshalb bilden sie keine Basis. Nur in Abb. 3.3 a) handelt es sich um eine Basis: Wir haben zwei Basisvektoren die linear unabhängig sind.

KAPITEL 4

# Vektorprodukt

Auch hier gehen wir axiomatisch vor, genau so wie wir es bereits beim Skalarprodukt getan haben. Wir definieren dafür zuerst, welche Eigenschaften wir für das Vektorprodukt wünschen. Erst später kümmern wir uns darum, wie man das Vektorprodukt in einer gegebenen Basis berechnet.

**Definition 4.1 Vektorprodukt**

Für $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^3$, die den Winkel $\varphi$ einschliessen, ist das **Vektorprodukt** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, mit den Eigenschaften:

- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$
- $\vec{c}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem

[Papula, Bd. 1 II 3.4], [Goebbels and Ritter, 2011, p.401]

Wie Abb.4.1 a) zeigt, ist der Betrag des Vektorprodukts gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Mit $|b| \sin(\varphi)$ wird die Komponente (rot) von $\vec{b}$ berechnet, die senkrecht auf $\vec{a}$ steht. Wie Abb.4.1 b) zeigt, kann die Fläche des grossen blauen Parallelogramms auf zwei Arten berechnet werden: entweder direkt als $|\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})|$ oder als Summe der kleinen roten Rechtecke, die sich zu $|\vec{a} \times \vec{b}|$ und $|\vec{a} \times \vec{c}|$ berechnen. Also muss gelten

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Abb.4.1 c) zeigt, dass eine Streckung um den Faktor Zwei, auch zur Verdoppelung des blauen Parallelogramms — d.h. des Skalarprodukts — führt. Dies muss für alle Streckungsfaktoren gelten also folgt

$$\vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \ .$$

Schliesslich zeigt Abb.4.1 d), dass die Fläche des blauen Parallelogramms meistens kleiner — höchstens aber gleich gross — ist, als die des Rechtecks mit dem Seitenlängen $|a|$ und $|b|$. Deshalb gilt für das Vektorprodukt

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \ .$$

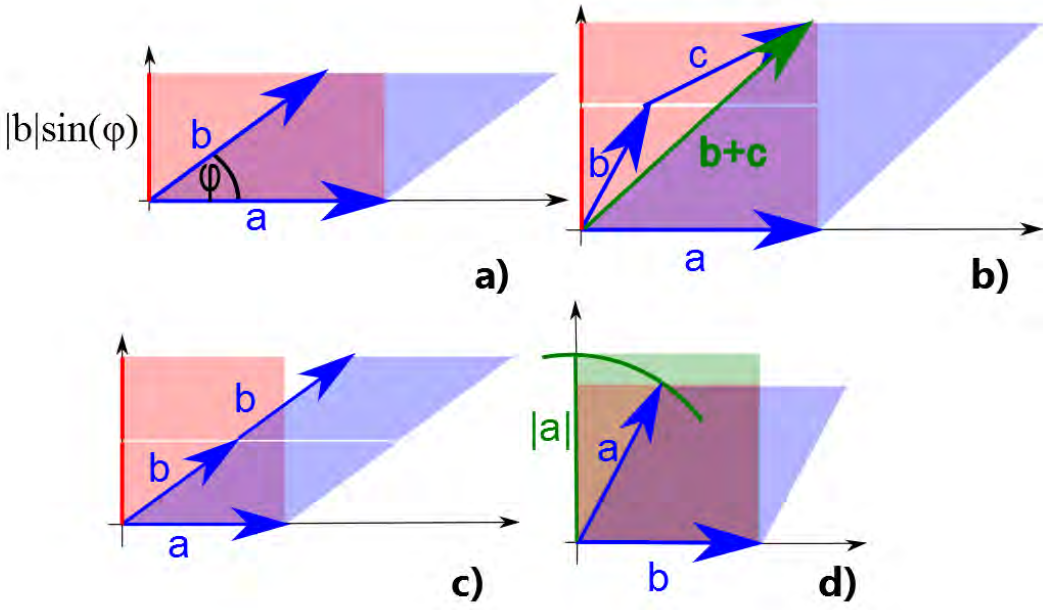



Abbildung 4.1: Die ersten Gesetzmässigkeiten für das Vektorprodukt folgen direkt aus geometrischen betrachtungen.

**Satz 4.1 Gesetze für das Vektorprodukt**

1. Betrag des Vektorprodukts: Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
2. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$, Distributiv-Gesetz
3. $\vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$, Assoziativ-Gesetz
4. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, Anti-Kommutativ-Gesetz
5. $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|$

Das letzte Gesetz lässt sich nachvollziehen, indem Sie zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ festlegen, z.B. $\vec{a}$ nach rechts und $\vec{b}$ nach vorne. Dann zeigt $\vec{a} \times \vec{b}$ mit der Rechten-Hand-Regel nach oben und $\vec{b} \times \vec{a}$ nach unten.

## 4.1 Das Vektorprodukt in einer rechtshändigen Orthonormalbasis

**Beispiel 4.1 Vektorprodukt für Basisvektoren** **745623**

Berechne das Vektorprodukt zwischen allen Basisvektoren in einer rechtshändigen Orthonormalbasis.

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = ?, \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = ?\ \ldots$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = ?, \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = ?\ \ldots$$

**Lösung:**

- $\vec{e}_i \times \vec{e}_i = 0$ ($i \in \{1, 2, 3\}$, gilt für alle Basisvektoren)
- $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$
- $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$
- $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$

**Beispiel 4.2 Vektorprodukt für allgemeine Vektoren** **936044**

Berechne das Vektorprodukt zwischen zwei allgemeinen Vektoren in einer rechtshändigen Orthonormalbasis. Drücke dazu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Basisvektoren aus:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

Berechne dann das Vektorprodukt für die allgemeinen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Übrigens gilt auch $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ **Lösung:**

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \\
&= a_1 \cdot b_1\vec{e_1} \times \vec{e_1} + a_1 \cdot b_2\vec{e_1} \times \vec{e_2} + a_1 \cdot b_3\vec{e_1} \times \vec{e_3} \\
&\quad + a_2 \cdot b_1\vec{e_2} \times \vec{e_1} + a_2 \cdot b_2\vec{e_2} \times \vec{e_2} + a_2 \cdot b_3\vec{e_2} \times \vec{e_3} \\
&\quad + a_3 \cdot b_1\vec{e_3} \times \vec{e_1} + a_3 \cdot b_2\vec{e_3} \times \vec{e_2} + a_3 \cdot b_3\vec{e_3} \times \vec{e_3} \\
&= a_1b_2\vec{e_3} - a_1b_3\vec{e_2} - a_2b_1\vec{e_3} + a_2b_3\vec{e_1} + a_3b_1\vec{e_2} - a_3b_2\vec{e_1} \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e_1} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e_2} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e_3} \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Achtung, dieser Ausdruck gilt nur in einem orthonormalen, rechtshändigen Koordinatensystem! Für andere Koordinatensysteme ergeben sich — wie beim Skalarprodukt — andere Ausdrücke für das Vektorprodukt.

## 4.2 Vektorprodukt konkret berechnen

**Infobox 4.1 Praktische Berechnung des Vektorprodukts**

Zur Berechnung des Vektorprodukts von zwei Vektoren, benutzen wir folgende Vorgehensweise:

- Wir schreiben die Produktvektoren auf
- Wir erstellen ein Skelett aus Minuszeichen (–) und zusätzlich einem Ausdruck $-()$ in der zweiten Zeile
- Wir füllen jede Zeile im Skelett, indem wir die selbe Zeile in den Produktvektoren abdecken und das Kreuz der verbleibenden Einträge ins Skelett einfüllen.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} - \\ -(\,-\,) \\ - \end{pmatrix}}_{\text{Skelett}} \rightarrow \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -(a_1b_3 - a_3b_1) \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

**Beispiel 4.3 Vektorprodukt** **306988**

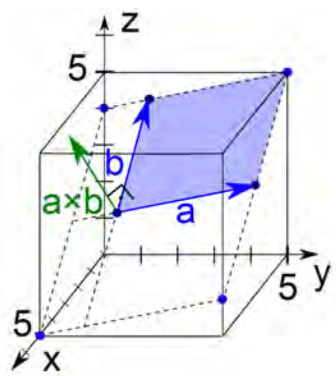
Berechne das Vektorprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

**Lösung:**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \\ -(1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) \\ 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

**Beispiel 4.4 Berechne die Fläche des Parallelogramms aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$** **519844**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$



**Lösung:**
Wir berechnen zuerst das Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ -25 \\ 8 \end{pmatrix} =: \vec{c}$$

Danach benutzen wir, dass der Betrag des Vektorprodukts gleich der Fläche des aufgespannten Parallelogramms ist:

$$|\vec{c}| = 33$$

**Infobox 4.2 "Vektorprodukt" für $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$**

In $\mathbb{R}^2$ lässt sich ein Vektor, der senkrecht auf $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ steht schnell finden:

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} .$$

## 4.3 Spatprodukt

Im Folgenden betrachten wir drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ und den Ausdruck

$$\vec{a} \odot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) .$$

Wir stellen fest, dass das Vektorprodukt $\vec{f} = \vec{b} \times \vec{c}$ senkrecht auf dem Parallelogramm aufgespannt durch $\vec{b} \times \vec{c}$ steht und dass $|\vec{f}|$ gleich der Fläche des Parallelogramm aufgespannt durch $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ist. Durch das Skalarprodukt $\vec{a} \odot \vec{f} = \underbrace{\cos(\varphi) \cdot |\vec{a}|}_{=:a_{\|}} \cdot |\vec{f}|$ wird der Schatten $a_{\|}$ von $\vec{a}$ auf $\vec{f}$ berechnet. Dies ist genau die Höhe des Körpers aufgespannt durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Diese Höhe wird noch mit der Grundfläche $|\vec{f}|$ multipliziert. Zusammenfassend haben wir also

$$\vec{a} \odot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \text{Grundfche} \cdot \text{Hhe} = \text{Volumen}$$

**Definition 4.2 Spatprodukt**

Das Parallelepiped aufgespannt durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ nennen wir **Spat**. Für die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ heisst die Zahl

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] := \vec{a} \odot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$$

das **Spatprodukt**.
Der Betrag des Spatprodukts ist gleich dem Volumen des Spats.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.403] [Papula, Bd. 1 II 3.5]

**Satz 4.2 Gesetze für das Spatprodukt**

- Paarweise Vertauschung :

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}]$$

- Zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$$

Merke also: Das Volumen des Spats ist unabhängig von Reihenfolge in der ich $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufzähle. Nur das Vorzeichen kann eventuell ändern, wenn die Reihenfolge vertauscht wird.

**Beispiel 4.5 Berechne das Volumen des Spats aufgespannt durch $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$** **340107**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

Zuerst berechnen wir das Vektorprodukt

$$\vec{f} := \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Dann berechnen wir das Skalarprodukt

$$\vec{a} \odot \vec{f} = -7$$

Also ist das Volumen $|\vec{a} \odot \vec{f}| = V = 7$.

**Beispiel 4.6 Bestimme, ob die Vektoren linear abhängig sind** **340107**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Benutze dazu das Spatprodukt. **Lösung:**

Liegen die drei Vektoren in einer Ebene, sind sie linear abhängig. Anderseits ist das Volumen des aufgespannten Spates gleich Null. Das nutzen wir aus um die lineare Abhängigkeit zu überprüfen. Zuerst berechnen wir das Vektorprodukt

$$\vec{f} := \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Dann berechnen wir das Skalarprodukt

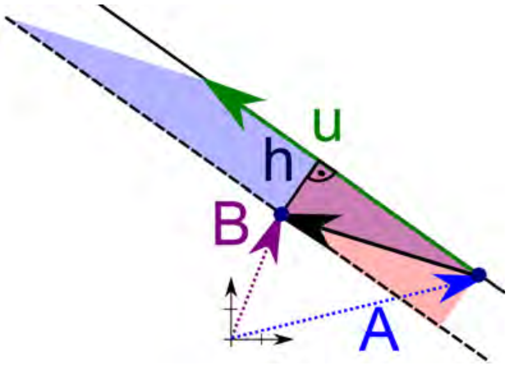
$$\vec{a} \odot \vec{f} = 0$$

Also ist das Volumen $V = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 0$ und die Vektoren sind linear abhängig.

## 4.4 Abstände, Schnittpunkte, Schnittwinkel

**Beispiel 4.7 Abstand Punkt-Gerade im Raum** **094524**

Berechne den Abstand eines Punktes $\vec{B}$ zur Gerade gegeben durch $g : \vec{A} + \lambda\vec{u}$ aus.




Drücke dazu die Fläche des Parallelogramms einmal mit Hilfe des Vektorprodukts aus und einmal mit Hilfe des Abstands aus **Lösung:**

- $F = |\vec{u} \times (\vec{B} - \vec{A})|$
- $F = |\vec{u}| \cdot h$

$$h = \frac{|\vec{u} \times (\vec{B} - \vec{A})|}{|\vec{u}|}$$

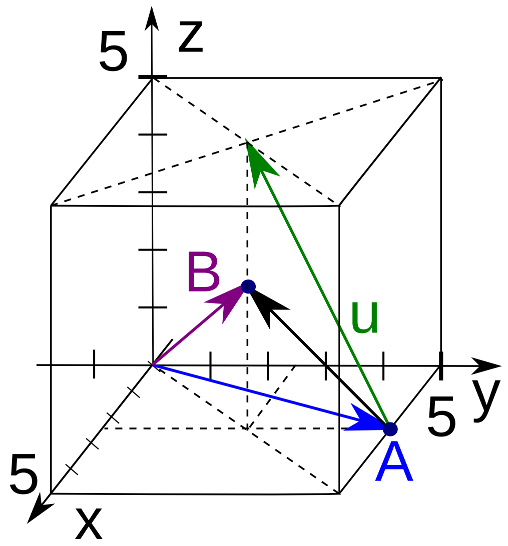
**Satz 4.3 Abstand Punkt Gerade**

Der Abstand eines Punktes $\vec{B}$ von der Geraden $g : \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$ ist $h = \frac{|\vec{u} \times (\vec{B} - \vec{A})|}{|\vec{u}|}$

[Papula, Bd. 1 II 4.1.3]

**Beispiel 4.8 Abstand Punkt-Gerade im Raum** **292982**

Wie gross ist der Abstand zum Raum-Mittelpunkt des Würfels $5 \times 5 \times 5$?



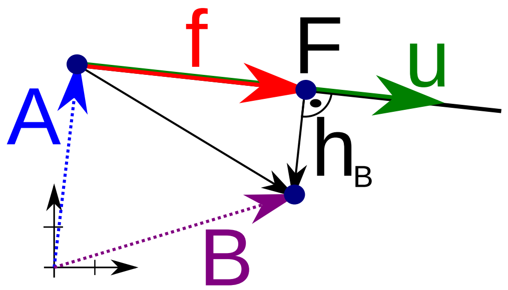

**Lösung:**

Vektoren auslesen: $\vec{A}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}$ , $\vec{B}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$ , $\vec{u}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-10\\5\end{pmatrix}$ Vektoren einsetzen:

$$\begin{aligned}(\vec{B}-\vec{A}) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\-5\\5\end{pmatrix}\\ \vec{u}\times(\vec{B}-\vec{A}) &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}25\\0\\0\end{pmatrix}\\ h=\frac{25\cdot 2}{4\cdot\sqrt{125}} &= \frac{\sqrt{5}}{2}\approx 1.12\end{aligned}$$

Achtung, dieser Satz ist eine Eigenheit von $\mathbb{R}^3$. Er basiert darauf, dass in $\mathbb{R}^3$ das Vektorprodukt existiert. In $\mathbb{R}^N$ mit $N>3$ gibt es keine Vektorprodukt. Deshalb muss dort der Abstand zwischen dem Punkt $\vec{B}$ und der Geraden $g:\vec{A}+\lambda\vec{u}$ über den Fusspunkt $\vec{F}=\vec{A}+\vec{f}$ und das Lot $\vec{h}_B=\vec{B}-\vec{F}$ berechnet werden.

**Beispiel 4.9 Bestimme den Fusspunkt von $\vec{B}$ auf $g$** **14259**




Zerlege dazu $\vec{B}-\vec{A}$ in eine Komponente $\vec{f}$ parallel (∥) und in eine Komponente $\vec{h}_B$ senkrecht (⊥) zu $\vec{u}$. Zur Kontrolle kann die Länge des Verbindungsvektors von Fusspunkt zu $\vec{B}$. Sie sollte gleich lang sein, wie der Abstand, der in der vorherigen Aufgabe berechnet wurde. **Lösung:**

Um den Verbindungsvektor vom Aufpunkt $\vec{A}$ zum Fusspunkt zu berechnen projizieren[a] wir den Verbindungsvektor $\vec{B} - \vec{A}$ auf $\vec{u}$:

$$\vec{f} = \left[(\vec{B} - \vec{A}) \odot \frac{\vec{u}}{|u|}\right] \frac{\vec{u}}{|u|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Fusspunkt befindet sich also bei

$$\vec{F} = \vec{A} + \vec{f} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Das Lot ist

$$\vec{h}_B = \vec{B} - \vec{F} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und die Länge davon

$$\left|\vec{h}_B\right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

in Übereinstimmung mit dem Resultat aus der vorherigen Aufgabe.

[a]wir berechnen die Länge des Schattens

**Beispiel 4.10 Normaleneinheitsvektor** **014259**

Bestimme für die Ebene $\vec{A} + \mu\vec{u} + \nu\vec{v}$ einen Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht und der normiert ist. **Lösung:**

Das Vektorprodukt

$$\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v}$$

steht senkrecht auf der Ebene. Die Reihenfolge $\vec{u} \times \vec{v}$ oder $\vec{v} \times \vec{u}$ spielt dabei keine Rolle. Die Normierung erhalten wir über

$$\vec{n} = \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

**Definition 4.3 Normaleneinheitsvektor**

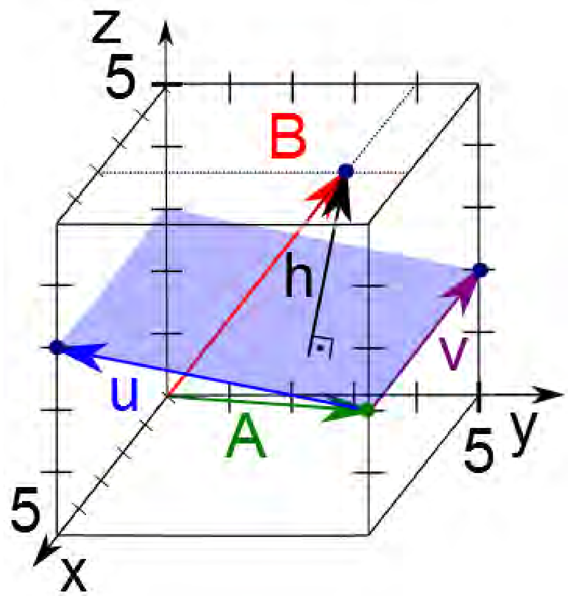
Für die Ebene $\vec{A} + \mu\vec{u} + \nu\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ definieren wir den Normaleneinheitsvektor

$$\vec{n} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|}\ .$$

Im Folgenden werden wir die Notation beibehalten, dass $\vec{n}$ stets normiert ist, während $\vec{n}'$ zwar senkrecht auf der Ebene steht, jedoch keine definierte Länge hat, wie im vorhergehenden Beispiel. Wir nennen $\vec{n}'$ den Normalenvektor.

- Der **Normalenvektor** $\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v}$ steht senkrecht auf Ebene
- Der **Normaleneinheitsvektor** $\vec{n}$ steht senkrecht auf der Ebene *und* hat Länge 1. Er ist normiert.

**Beispiel 4.11 Abstand Punkt-Ebene im Raum** **026648**




Lesen Sie die Punkte $\vec{A}$ und $\vec{B}$ und die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ aus der Grafik aus. Projizieren Sie dann den Verbindungsvektor $\vec{B} - \vec{A}$ auf den Normaleneinheitsvektor der Ebene. Berechnen Sie daraus den Abstand von $\vec{B}$ zur Ebene $E$.

$$E : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \nu \vec{v}$$

**Lösung:**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{h}_B$ ist die Projektion von $\left(\vec{B} - \vec{A}\right)$ auf $\vec{n}$.

$$\begin{aligned} \vec{n}' &= \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -25 \end{pmatrix} \\ \vec{n} &= \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{26}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \\ \vec{B} - \vec{A} &= \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ h_B &= \left(\vec{B} - \vec{A}\right) \odot \vec{n} = -7\sqrt{\frac{2}{13}} \approx -2.75 \end{aligned}$$

Der Abstand ist also 2.75.

**Satz 4.4 Abstand Punkt-Ebene im Raum**

Der Abstand eines Punktes $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ von der Ebene $E: \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ ist $|h|$ und berechnet sich aus

$$h = \left(\vec{x} - \vec{A}\right) \odot \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \left(\vec{x} - \vec{A}\right) \odot \vec{n}$$

[Papula, Bd. 1 II 4.2.4]

Damit kann man zwei Dinge tun:

- Wir können $h(\vec{x})$ benutzen Abstände von Punkten $\vec{x}$ von der Ebene $E$ zu berechnen.
- Wir können mit $\left(\vec{x} - \vec{A}\right) \odot \vec{n} = 0$ implizit alle Punkte in einer Ebene definieren. Oder umgekehrt: Alle Vektoren $\vec{x}$, die $\left(\vec{x} - \vec{A}\right) \odot \vec{n} = 0$ erfüllen liegen in der Ebene.

**Beispiel 4.12 Abstand Punkt-Ebene im Raum** **007592**

Berechnen Sie den Abstand des Punktes $\vec{R}$ von den Ebenen.

1. $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{R} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{R} = \begin{pmatrix} 18 \\ 19 \\ -4 \end{pmatrix}$
3. $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{R} = \begin{pmatrix} 13.8 \\ 20.9 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

1. $h = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$. Der Abstand ist
$$|h| = 2$$
2. $h = \left(\begin{pmatrix} 18 \\ 19 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ -4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -4$. Der Abstand ist
$$|h| = 4$$
3. $h = \left(\begin{pmatrix} 13.8 \\ 20.9 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.8 \\ 20.9 \\ 4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \\ 0 \end{pmatrix} = -3.1$. Der Abstand ist
$$|h| = 3.1$$

**Satz 4.5 Projektion und Spiegelung (an einer Ebene durch $\vec{0}$).**

Ein Punkt $\vec{P} \in \mathbb{R}^3$ wird durch

$$\vec{P}' = \vec{P} - \vec{P} \odot \vec{n} \cdot \vec{n} \tag{4.1}$$

auf die Ebene $E : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mu\vec{u} + \nu\vec{v}$ projiziert, wobei $\vec{n}$ der Normalenvektor der Ebene $E$ ist. Durch

$$\vec{P}'' = \vec{P} - 2(\vec{P} \odot \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

wird der Punkt $\vec{P}$ an der Ebene gespiegelt.

Beachte, dass eine Ebene den Raum $\mathbb{R}^3$ in zwei Halbräume zerschneidet. Die Projektion $(\vec{P} \odot \vec{n}) \cdot \vec{n}$ zeigt stets in den selben Halbraum wie $\vec{P}$, egal ob $\vec{n}$ im selben Halbraum liegt wie $\vec{P}$. Deshalb bringt $\vec{P} - (\vec{P} \odot \vec{n}) \cdot \vec{n}$ den Punkt zurück in die Ebene, d.h. wir müssen uns mit dem Vorzeichen in Gleichung 4.1 nicht beschäftigen. Es ist automatisch richtig.

KAPITEL 5

# Normalenform der Ebene

**Beispiel 5.1 Gleichungen der Ebene im Raum** **173961**

Bestimme für die Ebene $E$

$$E:\ \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v}$$

den Normalenvektor. Drücke dann mathematisch aus, dass der Verbindungsvektor von einem Punkt $\vec{x}$ *in der Ebene* zum Aufpunkt den Abstand Null zur Ebene hat. **Lösung:**

Wir benutzen den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ um den Abstand zu berechnen. Der Verbindungsvektor von einem Punkt in der Ebene zum Aufpunkt ist $(\vec{A} - \vec{x})$. Er soll den Abstand Null haben, also gilt

$$(\vec{A} - \vec{x}) \odot \vec{n} = 0$$

Wir können diesen Ausdruck noch mit $|\vec{n}|$ multiplizieren

$$(\vec{A} - \vec{x}) \odot \vec{n}' = 0$$

**Definition 5.1 Normalenform der Ebene im Raum**

Ebene $E$ ist definiert durch den Normalenvektor $\vec{n}'$ und den Ortsvektor des Aufpunktes $\vec{A}$. Für den allgemeinen Punkt $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in der Ebene gilt $E: (\vec{x} - \vec{A}) \odot \vec{n}' = 0$

**Beispiel 5.2 Gleichungen der Ebene im Raum** **409770**

Bestimme die Normalenform der Ebene $E$

$$E:\ \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechne dazu den Normalenvektor. Vereinfache soweit, dass keine Vektoren mehr in der Normalenform auftreten. **Lösung:**

Der Normalenvektor ist

$$\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Einsetzen von $(\vec{x} - \vec{A})$ ergibt

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} \odot \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

was sich zu $-10x + 4y + 11z - 3 = 0$ vereinfacht.

**Definition 5.2 Koordinatenform der Ebene im Raum**

Eine Ebene ist definiert durch die vier Parameter $n'_1$, $n'_2$, $n'_3$ und $d'$. Für den allgemeinen Punkt $\vec{x}$ in der Ebene gilt $E: \; n'_1 \cdot x + n'_2 \cdot y + n'_3 \cdot z + d' = 0$

Die Koordinatenform ergibt sich z.B. durch das Auswerten der Normalenform. Die Koeffizienten $n'_1$, $n'_2$, $n'_3$ sind die Komponenten des Normalenvektors.

**Beispiel 5.3 Hessesche-Normalenform** **854087**

Wie gross ist der Abstand der Ebene $E$ vom Ursprung?

$$E: \; \vec{x} = \vec{A} + \lambda \vec{u} + \nu \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Werte dann $\left(\vec{x} - \vec{A}\right) \odot \vec{n}$ für $\vec{x} = \vec{0}$ aus. Beachte, dass hier der Normaleneinheitsvektor und nicht der Normalenvektor verwendet wird. Betrachte die Resultate und formuliere eine Vermutung. **Lösung:**

Der Abstand der Ebene vom Ursprung ist $\sqrt{\frac{3}{79}}$. Mit den Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt{237}} \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} \odot \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Am Urpsung ausgewertet ergibt dies $-\sqrt{(3/79)}$. Die Übereinstimmung der beiden Resultate ist kein Zufall. Der Ausdruck

$$\vec{n} \odot (\vec{x} - \vec{A})$$

ist die Projektion des Vektors $(\vec{x} - \vec{A})$ auf den Normalenvektor, d.h. der Abstand zwischen $\vec{x}$ und der Ebene.

**Definition 5.3 Hessesche-Normalenform der Ebene im Raum**

$E: \; \vec{n} \odot (\vec{x} - \vec{A}) = 0$

[Goebbels and Ritter, 2011, p.418] [Papula, Bd. 1 II 4.2.3]

**Definition 5.4 Hessesche-Normalenform der Ebene im Raum, Koordinatenform**

Eine Ebene ist definiert durch die vier Parameter $n_1$, $n_2$, $n_3$ und $d$. Dabei gilt $(n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 = 1$. Für den allgemeinen Punkt $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in der Ebene gilt $E: \ n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z + d = 0$

In der Hesseschen-Normalenform sind die Parameter $n_1$, $n_2$, $n_3$ die Komponenten des Normaleneinheitsvektors und die Konstante $|d|$ ist der Abstand vom Ursprung.

**Beispiel 5.4 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen** **440325**

Berechne die Schnittpunkte der Ebene $E$ mit den Koordinatenachsen

$$E: \ 21x + 70y + 15z - 105 = 0$$

Teile dann die Koordinatenform durch 105. Dadurch wir die Konstante auf $-1$ gesetzt. Vergleich nun die Koordinatenform mit den Schnittpunkten und formuliere deine Vermutung. **Lösung:**

- $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 21x = 105, \ x = \frac{105}{21} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad 70y = 105, \ y = \frac{105}{70} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad 15z = 105, \ z = \frac{105}{15} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

Teilen wir die Koordinatengleichung durch $-d$ — hier ist $d = -105$ entsteht die folgende Form

$$E: \ \frac{1}{5}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{7}z - 1 = 0$$

Die Schnittpunkte mit den jeweiligen Koordinatenachsen können direkt abgelesen werden. z.B. Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$x_0 = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$$

**Definition 5.5 Achsenabschnitts-Form**

$E: \ c_1x + c_2y + c_3z - 1 = 0$

Die Achsenabschnittsform zeichnet sich dadurch aus, dass die Konstante den Wert $-1$ hat. Die Schnittpunkte mit den jeweiligen Koordinatenachsen können direkt abgelesen werden und sind bei $1/c_1, 1/c_2, 1/c_3$ wie Abb. 5.1 zeigt.

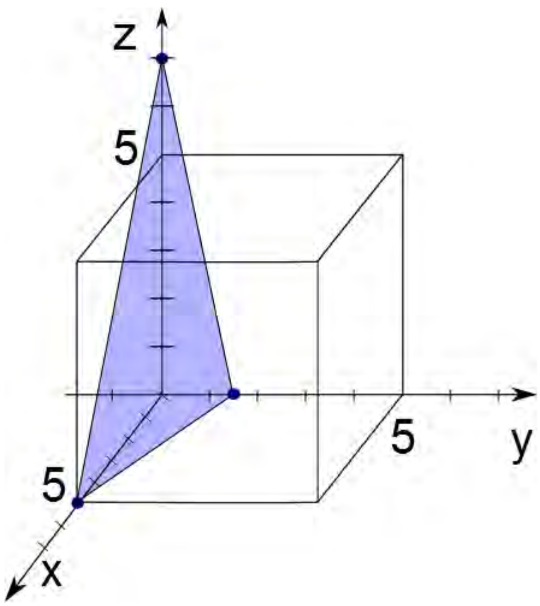



Abbildung 5.1: In der Achsenabschnittsform lassen sich die Schnittpunkte mit den jeweiligen Koordinatenachsen direkt ablesen.

KAPITEL 6

# Darstellung der Ebene im Raum

Wir kennen drei unterschiedliche Darstellungen der Ebene im Raum. Es sind dies die Parameter-Form, die Normalen-Form und die Koordinaten-Form.

Jede Form kann in die beiden anderen überführt werden. Wie dies am effizientesten gemacht wird, wird hier besprochen.

## 6.1 Von der Koordinaten-Form $1x + 2y + 3z - 6 = 0$ zu ...

**Infobox 6.1 Koordinaten-Form zur Parameter-Form**

Es können drei Punkte erzeugt werden. Meist gelingt dies am schnellsten mit den Punkten

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun kann $\vec{P}$ als Aufpunkt gewählt werden und

$$\vec{u} = \vec{Q} - \vec{P} \text{ und } \vec{v} = \vec{R} - \vec{P}$$

als Richtungsvektoren. Die Ebenengleichung ist dann

$$E : \vec{x} = \vec{P} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v}$$

Es kann vorkommen, dass die Ebene parallel zu einer Koordinaten-Achse liegt. Dann müssen die Punkte $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ anders gewählt werden. Ist die Ebene z.B. parallel zur z-Achse, dann könnten dies z.B. die folgenden Punkte sein

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ y' \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Beispiel 6.1 Von der Koordinaten-Form zur Parameterform** **467643**

Berechnen Sie eine Parameterform der Ebene gegeben durch

$$E : 1x + 2y + 3z - 6 = 0$$

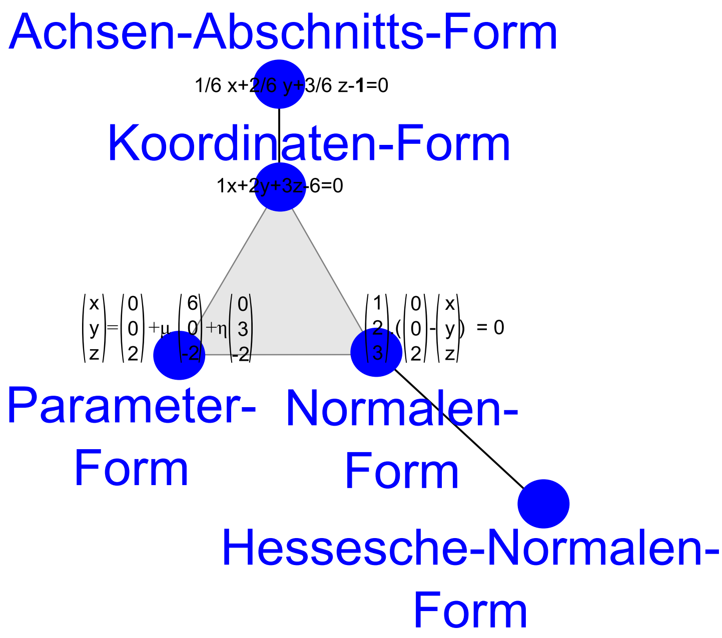



Abbildung 6.1: Die verschiedenen mathematischen Darstellungen der Ebene in $\mathbf{R}^3$.

**Lösung:**

Wir erzeugen drei Punkte

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir wählen $\vec{P}$ als Aufpunkt und berechnen die Richtungsvektoren

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6-0 \\ 0-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0-0 \\ 3-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Infobox 6.2 Koordinaten-Form zur Normalen-Form**

Es kann ein Punkt erzeugt werden, z.B.

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

Die Normale kann aus der Koordinatenform abgelesen werden. Sie besteht aus den Koeffizienten

$$E : n'_1\, x + n'_2\, y + n'_3\, z - d = 0$$

Die Normalenform ist dann

$$E : \begin{pmatrix} n'_1 \\ n'_2 \\ n'_3 \end{pmatrix} \odot \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \vec{P} \right) = 0$$

**Beispiel 6.2 Von der Koordinaten-Form zur Normalen-Form** **211568**

Berechnen Sie eine Normalen-Form der Ebene gegeben durch

$$E : 1x + 2y + 3z - 6 = 0$$

**Lösung:**

Wir erzeugen einen Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und lesen die Normale ab

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \odot \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

## 6.2 Von der Parameter-Form ...

**Infobox 6.3 Von der Parameter-Form zur Koordinaten-Form**

Mit dem Vektorprodukt kann aus dem Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Normalenvektor berechnet werden.

$$\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v}$$

Die Ebene schreibt sich nun als

$$n_1' \, x + n_2' \, y + n_3' \, z + d = 0$$

wobei $d$ die Konstante durch Einsetzen der Koordinaten des Aufpunktes bestimmt wird.

**Beispiel 6.3 Von der Parameter-Form zur Koordinaten-Form** **211568**

Berechnen Sie die Koordinaten-Form der Ebene gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

Wir lesen berechnen die Normale mit dem Vektorprodukt

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Achtung, die Normale kann stets reskaliert werden. D.h. die Länge kann beliebig geändert werden. Hier verkürzen wir den Normalenvektor um den Faktor 6. Dann setzen wir den Aufpunkt ein und bestimmen so die Konstante

$$\begin{aligned} 1x + 2y + 3z + d &= 0 \\ 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + d &= 0 \\ \Rightarrow 1x + 2y + 3z - 6 &= 0 \end{aligned}$$

**Infobox 6.4 Von der Parameter-Form zur Normalen-Form**

Mit dem Vektorprodukt kann aus dem Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Normalenvektor berechnet werden.

$$\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v}$$

Der Aufpunkt und die Normale kann dann direkt in die Normalen-Form eingesetzt werden.

**Beispiel 6.4 Von der Parameter-Form zur Normalen-Form** **995397**

Berechnen Sie die Normalen-Form der Ebene gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

Wir berechnen die Normale $\vec{n}' = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$ und setzen den Aufpunkt und die Normale in die Normalen-Form ein:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \odot \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

## 6.3 Von der Normalen-Form ...

Der Weg von der Normalen-Form zur Koordinaten-Form besteht aus dem Ausmultiplizieren.

**Beispiel 6.5 Von der Normalen-Form zur Koordinaten-Form** **849600**

Berechnen Sie die Koordinaten-Form der Ebene gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \odot \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

**Lösung:**

Wir multiplizieren aus und erhalten

$$1x + 2y + 3z - 6 = 0$$

**Infobox 6.5 Von der Normalen-Form zur Parameter-Form**

Durch Ausmultiplizieren berechnen wir zuerst die Koordinatenform

$$n_1' \, x + n_2' \, y + n_3' \, z + d = 0$$

wobei sowohl die Koeffizienten wie auch die Konstante bekannt sind. Wir erzeugen dann drei Punkte

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \; \vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wählen $\vec{P}$ als Aufpunkt und bestimmen die Richtungsvektoren

$$\vec{u} = \vec{Q} - \vec{P} \text{ und } \vec{v} = \vec{R} - \vec{P}$$

Die Ebenengleichung ist dann

$$E : \vec{x} = \vec{P} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v}$$

**Beispiel 6.6 Von der Normalen-Form zur Parameter-Form** **763463**

Berechnen Sie die Parameter-Form der Ebene gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \odot \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

**Lösung:**

Durch Ausmultiplizieren berechnen wir die Koordinatenform

$$1x + 2y + 3z - 6 = 0$$

Dann erzeugen wir drei Punkte

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \vec{Q} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Parameterform ergibt sich durch die Berechnung der Richtungsvektoren

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6-0 \\ 0-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0-0 \\ 3-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

KAPITEL 7

# Übungen Vektorgeometrie

## 7.1 Koordinatensystem, Vektoraddition, Kollinearität

**1. Koordinatensystem in 3D,** **704458**

Der Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird gespiegelt

(a) an der xy-Ebene
(b) an der xz-Ebene
(c) an der x-Achse
(d) an der z-Achse
(e) am Ursprung
(f) am Punkt $\vec{S} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

(a) $\vec{P'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
(b) $\vec{P'} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
(c) $\vec{P'} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$
(d) $\vec{P'} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
(e) $\vec{P'} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(f) $\vec{v} = \vec{P} - \vec{S} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{P'} = \vec{S} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$

**2. Koordinatensystem in 3D** **998998**

Welche besondere Lage haben diese Punkte?

(a) $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
(b) $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$
(c) $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$
(d) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 4 \end{pmatrix}$
(e) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 3 \\ y \\ z \end{pmatrix}$
(f) $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$
(g) $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
(h) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$

**Lösung:**

(a) $\vec{P}$ liegt auf der x-Achse

(b) $\vec{P}$ liegt in der xy-Ebene

(c) $\vec{P}$ liegt in der xz-Ebene

(d) $\vec{P}$ liegt auf einer Geraden parallel zur y-Achse (mit Abstand 4)

(e) $\vec{P}$ liegt in einer Ebene parallel zur yz-Ebene (mit Abstand 3)

(f) $\vec{P}$ liegt in einer Ebene parallel zur xz-Ebene (mit Abstand 2)

(g) $\vec{P}$ liegt auf einer Geraden parallel zur x-Achse durch den Punkt $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(h) $\vec{P}$ liegt auf der Winkelhalbierenden zwischen y- und z-Achse.

**3. Vektoraddition** **651680**

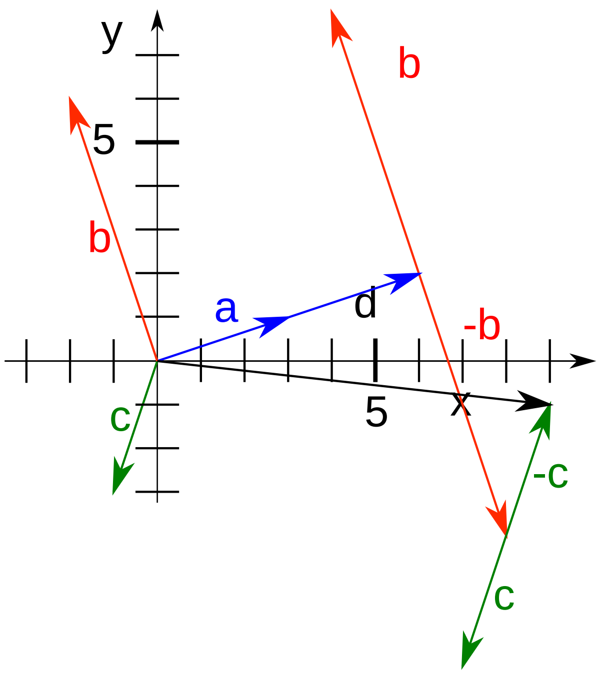
Es sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Berechne den Vektor $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$.

(b) Überprüfe die Richtigkeit der Rechnung mit einer Konstruktion.

**Lösung:**

(a) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}$.




(b)

**4. Vektoraddition** **884360**

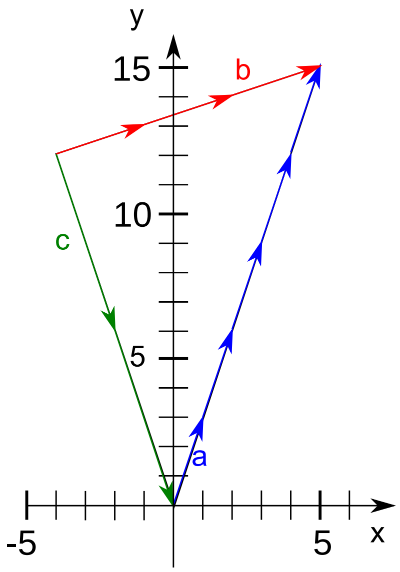
Es sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Berechne den Vektor $\vec{d} = 5\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$.

(b) Überprüfe die Richtigkeit der Rechnung mit einer Konstruktion.

**Lösung:**

(a) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) 


**5. Vektoraddition** **654349**

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ gegeben. Berechne die Komponenten der Vektoren

(a) $\vec{u} = 2\vec{a} - 1.5\vec{b} + 3\vec{c}$

(b) $\vec{v} = 2\vec{a} - 3(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c})$

(c) $\vec{w} = 3(\vec{a} - 4\vec{b}) - 5\vec{c}$

(d) $\vec{x} = 5\vec{a} - 2(\vec{b} + 3\vec{c})$

**Lösung:**

(a) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ -13 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 29 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ (c) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 178 \\ 60 \\ 9 \end{pmatrix}$ (d) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 69 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

**6. Kollinear/Parallel** **631401**

Überprüfe, ob die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -3.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 28 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -18 \\ 36 \\ -63 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2.25 \\ 0.75 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

(a) nicht kollinear

(b) kollinear, $-2\vec{b} = \vec{a}$

(c) kollinear, $-\frac{4}{9}\vec{b} = \vec{a}$

(d) nicht kollinear

**7. Kollinear/Parallel** **588716**

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sollen kollinear sein. Bestimme die fehlenden Komponenten.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -4 \\ z \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ y \\ 8 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

(a) $x = 12, \ z = -32$

(b) $y = 0, \ z = \frac{2}{3}$

(c) $x = -\frac{5}{4}, \ y = \frac{56}{5}$

(d) keine Lösung

**8. Kollinear/Parallel** **745674**

Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(a) $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \end{pmatrix}$ sollen kollinear sein. Bestimme $x$.

(b) $\vec{f} = 3\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ y \end{pmatrix}$ sollen kollinear sein. Bestimme $y$.

**Lösung:**

(a) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ x = \frac{5}{2}$

(b) $\vec{f} = \begin{pmatrix} -7 \\ 21 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ y = 12$

**9. Kollinear/Parallel** **036721**

Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2.5 \end{pmatrix}$.

Die Vektoren $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$ und $\vec{w}$ sollen kollinear sein. Bestimme $x$ und $y$.

**Lösung:**

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 11 \\ -23 \\ -5 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ x = -\frac{11}{2}, \ y = \frac{23}{2}$$

**10. Geraden** **503523**

Liegt der Punkt $\vec{A}$ auf der Geraden durch die Punkte $\vec{B}$ und $\vec{C}$?

(a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} -4 \\ 22 \\ -18 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

Idee zu Lösung: Falls $\vec{A}$ auf der Geraden liegt sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ kollinear.

(a) Wir berechnen den Richtungsvektor der Geraden

$$\vec{v} = \vec{B} - \vec{C} = \begin{pmatrix} 18 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

und einen Vektor, der den Punkt $\vec{A}$ mit der Geraden verbindet

$$\vec{w} = \vec{A} - \vec{C} = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Falls, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ kollinear sind, liegt $\vec{A}$ auf der Geraden. Hier ist aber

$$\begin{pmatrix} 18 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix},$$

also liegt $\vec{A}$ nicht auf der Geraden.

(b) Wir berechnen den Richtungsvektor der Geraden

$$\vec{v} = \vec{B} - \vec{C} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 13 \end{pmatrix}$$

und einen Vektor, der den Punkt $\vec{A}$ mit der Geraden verbindet

$$\vec{w} = \vec{A} - \vec{C} = \begin{pmatrix} 12 \\ -30 \\ 26 \end{pmatrix} .$$

Falls, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ kollinear sind, liegt $\vec{A}$ auf der Geraden. Hier ist

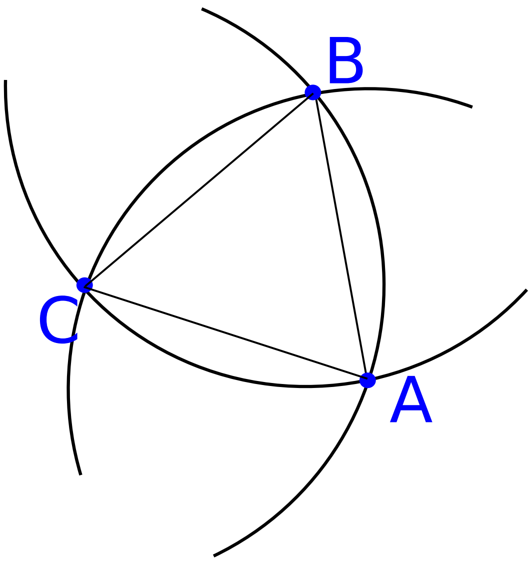
$$\begin{pmatrix} 12 \\ -30 \\ 26 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also liegt $\vec{A}$ auf der Geraden.

## 11. Dreiecke 801407

Zeige, dass die Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{78} \\ 0 \end{pmatrix}$ die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind.

**Lösung:**




Idee zu Lösung: Falls die Punkte auf einem gleichseitigen Dreieck liegen, haben sie alle den selben Abstand von einander.

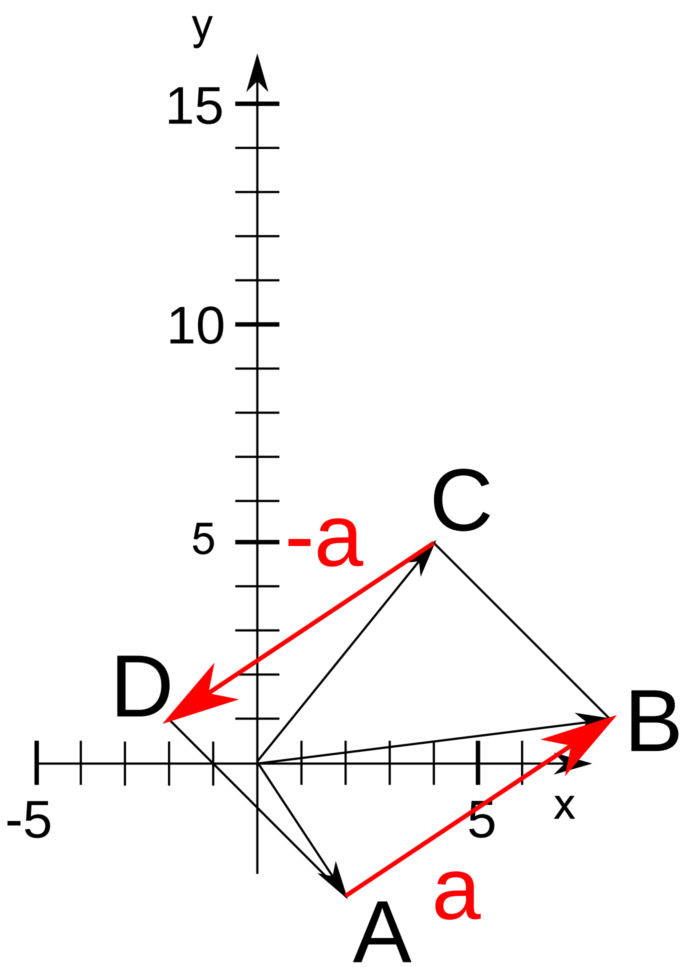
Alle Differenzvektoren haben die Länge $\sqrt{104} \approx 10.198$, z.B.

$$\left|\vec{A} - \vec{C}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5 \\ \sqrt{78} \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{104}$$

**12. Parallelogramm** **668357**

Ergänze die Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ zum Parallelogramm ABCD. Berücksichtige die alphabetische Reihenfolge.

**Lösung:**




Unter Berücksichtigung der alphabetischen Reihenfolge, gibt es nur eine Lösung. Dies ergibt sich aus der Zeichnung. Die Ecke $\vec{D}$ ergibt sich mit

$$\vec{D} = \vec{C} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**13. Parallelogramm** **459912**

Ergänze die Punkte $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ zum Parallelogramm ABCD. Berücksichtige die alphabetische Reihenfolge.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

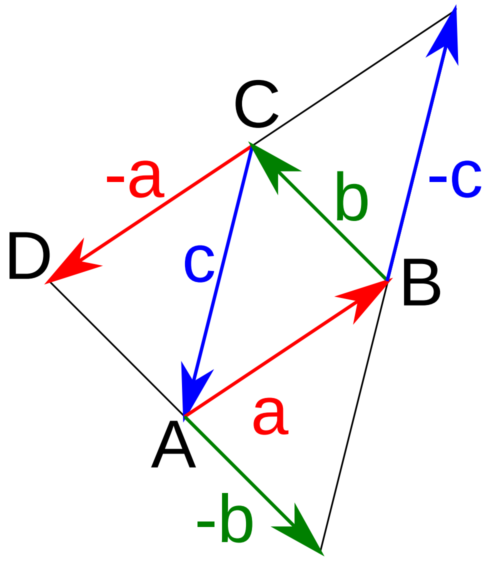
**Lösung:** Unter Berücksichtigung der alphabetischen Reihenfolge, gibt es nur eine Lösung. Dies sehen wir in der Zeichnung in zwei Dimensionen (d.h. in der Ebene des Parallelogramms). Die Ecke $\vec{D}$ ergibt sich mit $\vec{a} = \vec{B} - \vec{A}$ zu

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -11 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{D} = \vec{C} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

14. **Parallelogramm** **464658**

Die Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$ sind die Ecken eines Parallelogramms. Bestimme die Koordinaten der vierten Ecke $\vec{D}$, ohne die alphabetische Reihenfolge zu berücksichtigen. Wie viele Lösungen gibt es?

**Lösung:**




Die drei Punkte definieren drei Verbindungsvektoren, $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Sie können verwendet werden, um das Dreieck zu einem Parallelogramm zu ergänzen. Die drei Lösungen sind:

$$\vec{D} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -12 \end{pmatrix}, \ \vec{D}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}, \ \vec{D}'' = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

15. **Parallelogramm**

Sind $\vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$ die Ecken eines Parallelogramms?

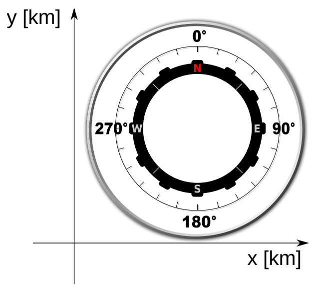
**Lösung:** Ja. Drei Punkte können immer zu einem Parallelogramm ergänzt werden.

## 7.2 Parameterform der Geraden

1. **Kurs eines Schiffes**

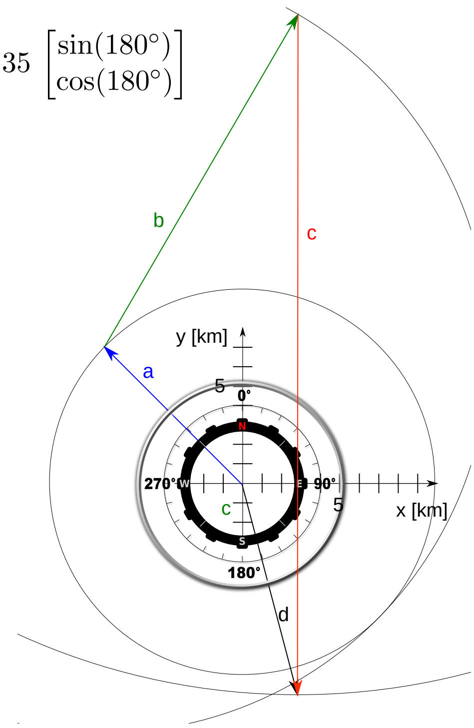
Ein Segelschiff fährt zuerst 10 km in Richtung Nordwesten, dann 20 km in Richtung 30° (Nord-Ost) und schliesslich 35 km in Richtung Süden. Gib die

End-Position der Reise an gemessen vom Ausgangspunkt der Reise. Verifiziere die Rechnung mit einer Konstruktion.




**Lösung:** Rechnung in km:

$$
\begin{aligned}
\vec{d} = &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \\
&= 10 \begin{bmatrix} \sin(315°) \\ \cos(315°) \end{bmatrix} + 20 \begin{bmatrix} \sin(30°) \\ \cos(30°) \end{bmatrix} + 35 \begin{bmatrix} \sin(180°) \\ \cos(180°) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -7.07 \\ 7.07 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 17.32 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -35 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2.93 \\ -10.61 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$




2. **Kurs eines Schiffes** **818717**

Ein Segelschiff fährt zuerst 20.7 km in Richtung 30.6°, dann 45.2 km in Richtung 159°, 11 km in Richtung 210° und schliesslich 40 km in Richtung 328°. Gib die End-Position der Reise an gemessen vom Ausgangspunkt der Reise.

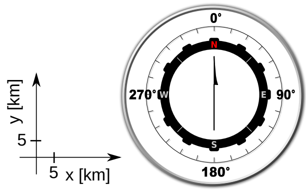
**Lösung:** Rechnung in km:

$$
\begin{aligned}
\vec{f} = &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \\
&= 20.7 \begin{bmatrix} \sin(30.6°) \\ \cos(30.6°) \end{bmatrix} + 45.2 \begin{bmatrix} \sin(159°) \\ \cos(159°) \end{bmatrix} + 11 \begin{bmatrix} \sin(210°) \\ \cos(210°) \end{bmatrix} + 40 \begin{bmatrix} \sin(328°) \\ \cos(328°) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 10.5372 \\ 17.8174 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16.1982 \\ -42.1978 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5.5 \\ -9.52628 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -21.1968 \\ 33.9219 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.0386181 \\ 0.0151691 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Da $|\vec{f}| = 0.04$, bedeutet das, dass er such bis auf 40 m wieder seinem Ausgangspunkt annähert.

3. **UFOs** **686174**

Berechnen Sie den Azimut (Winkel zwischen Norden und dem Objekt im Uhrzeigersinn gemessen) und die Distanz vom Kontrollturm der folgenden UFOs. Beachten Sie die spezielle Lage des Koordinaten-Systems.




| | Pithoi | Angel hair | Utsuro-bune |
|---|---|---|---|
| $x$ [km] | -3.8 | 1.5 | 1.4 |
| $y$ [km] | 4 | -6.2 | 4.7 |

**Lösung:**

Für ein Objekt an der Position $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ist die Distanz

$$d = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$$

und der Azimut

$$\phi = \arctan(\frac{x_1}{x_2}) \; .$$

Die Aviatik und die Nautik benutzen strikt postive Winkel, deshalb muss je nach Resultat noch 360° addiert werden.

| | Pithoi | Angel hair | Utsuro-bune |
|---|---|---|---|
| $\varphi$ [°] | 316.5 | 166.4 | 16.6 |
| $y$ [km] | 5.51 | 6.38 | 4.9 |

4. **Parameterform der Geraden in $\mathbb{R}^n$** **773587**

Welche Punkte erhält man für die angegebenen Parameterwerte $t = -5;\ t = 0$ und $t = -0.1$?

(a) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(c) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ -14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4.8 \\ 0.7 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.9 \\ -0.1 \\ 4.2 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ -11 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.9 \\ -2.2 \\ 3.7 \\ 2.7 \end{pmatrix} \right\}$

5. **Parameterform der Geraden** **132207**

Prüfe, ob der Punkt $X$ auf der Geraden $g$ liegt:

(a) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $g : \vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

(c) $X = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$, $g : \vec{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$

**Lösung:** Liegt der Punkt $\vec{X}$ auf der Geraden, ist der Verbindungsvektor vom Aufpunkt $\vec{A}$ zu $\vec{X}$ kollinear zum Richtunsvektor.

(a) Der Differenzvektor ist

$$\vec{d} = \vec{X} - \vec{A} = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Dieser Vektor ist nicht kollinear zum Richtungsvektor der Geraden und $\vec{X}$ liegt deshalb nicht auf der Geraden.

(b) Der Differenzvektor ist

$$\vec{d} = \vec{X} - \vec{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Dieser Vektor ist kollinear zum Richtungsvektor der Geraden und $\vec{X}$ liegt auf der Geraden.

(c) Der Differenzvektor ist

$$\vec{d} = \vec{X} - \vec{A} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Komponentenweise Division zeigt, ob die Vektoren kollinear sind.

$$\vec{v}/\vec{d} = \left\{ -\frac{3}{5}, -\frac{3}{7}, 1 \right\} .$$

Die Vektoren sind also nicht kollinear und $\vec{X}$ liegt nicht auf der Geraden.

**6. Parameterform der Geraden** **656861**

Gib je zwei verschiedene Parameterdarstellungen der Geraden $g$ durch die Punkte $\vec{A}$ und $\vec{B}$ an.

(a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 12 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

**Lösung:**
Als Aufpunkt kann $\vec{A}$ oder $\vec{B}$ gewählt werden. Als Richtungsvektor kann die Differenz zweier Punkte auf der Geraden gewählt werden, z.B. $\vec{A} - \vec{B}$, $\vec{B} - \vec{A}$ oder auch Vielfache davon wie $\frac{1}{13}\left(\vec{B} - \vec{A}\right)$.

(a) z.B. $g : \vec{x} = \vec{A} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$ oder $g : \vec{x} = \vec{B} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$

(b) z.B. $g : \vec{x} = \vec{A} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder $g : \vec{x} = \vec{B} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

**7. Gerade als Gleichung: Geradengleichung** **48726**

Durch die Gleichung $x_2 = mx_1 + c$ wird eine Gerade im $x_1x_2$-Koordinatensystem beschrieben. Dabei ist $m$ die Steigung und $c$ der $y$-Achsenabschnitt. Gib die Parameterdarstellung der Geraden an für

(a) $m = 3,\ c = 3$

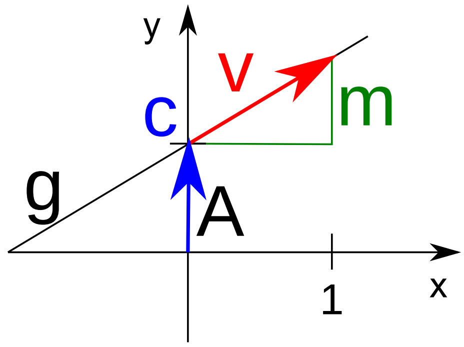
(b) $m = 0,\ c = 2$

(c) $x_1 + x_2 = 3$

(d) $2x_1 + x_2 = 5$

(e) $x_1 = 5$

**Lösung:** Meistens lässt sich die Parameterform aus der Geradengleichung berechnen, nämlich in allen Fällen, wo sowohl $m$ wie auch $c$ gegeben sind. Mit Hilfe der Grafik, führen wir uns die Bedeutung der beiden Parameter vor Augen.




$c$ sagt, bei welcher Höhe die $y$-Achse geschnitten wird. Daraus lässt sich ein Aufpunkt schnell bestimmen: $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$. $m$ sagt, dass die Gerade um $m$ steigt, wenn man einen Schritt in Richtung von $x$ geht. Daraus lässt sich ein Richtungsvektor schnell bestimmen: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

(a) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) Wir lösen nach $x_2$ auf:

$$x_2 = 3 - x_1$$

Daraus bestimmen wir $m = -1$ und $c = 3$, also $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Für die weiteren Aufgaben gehen wir wie folgt vor: Wir können zwei Punkte bestimmen. Das geht oft am einfachsten für die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mit diesen Punkten kann dann die Parameterdarstellung bestimmt werden:

(d) Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Richtungsvektor

$$\vec{u} = 2\left(\vec{B} - \vec{A}\right) = 2 \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} .$$

Also $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$

(e) Hier gibt es keinen Punkt $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$. Dafür können wir z.B. $\vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ wählen. Richtungsvektor

$$\vec{u} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Also $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**8. Von der Parameterform zur Geradengleichung** **94899**

Bestimme die Gleichung $x_2 = m \cdot x_1 + c$ der Geraden $g$:

(a) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

(a) Die Steigung kann mit dem Richtungsvektor bestimmt werden. Es gilt $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{3}$. Um den y-Achsenabschnitt zu bestimmen, setzen wir den Aufpunkt in die halbfertige Geradengleichung ein:

$$2 = 1 \cdot \frac{1}{3} + c$$

also $c = \frac{5}{3}$ und die Geradengleichung lautet

$$x_2 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} x_1 \ .$$

(b) Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5}{1}$. Um den y-Achsenabschnitt zu bestimmen, suchen wir den Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$. Um den y-Achsenabschnitt zu bestimmen, setzen wir den Aufpunkt in die halbfertige Geradengleichung ein:

$$5 = 2 \cdot \frac{-5}{1} + c$$

also $c = 15$ und die Geradengleichung lautet

$$x_2 = -5x_1 + 15 \ .$$

**9. Schnittpunkt von zwei Geraden** **339474**

Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes $S$ der Geraden $g$ und $h$:

(a) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$

(b) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(d) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

(a) $\vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ (z.B. für $t = -1$).

(b) $\vec{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (z.B. für $\lambda = -3$).

(c) $\vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ (z.B. für $t = 0$.).

(d) $\vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 9 \end{pmatrix}$ (z.B. für $t = 0$.).

**Methode** Wir setzen die vektoriellen Ausdrücke gleich und multiplizieren mit dem Parameter aus:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t \\ 9t \end{pmatrix}$$

oder komponentenweise

$$\begin{array}{rcl} 2 + \lambda & = & 5 + 2t \\ 1 - \lambda & = & 9 + 9t \end{array} .$$

Als nächstes wollen wir einen Parameter eliminieren. Hier gelingt dies durch Addition der Gleichungen (links und rechts separat):

$$2 + \lambda + 1 - \lambda = 5 + 2t + 9 + 9t$$

also

$$3 = 14 + 11t \;\Rightarrow\; t = \frac{3 - 14}{11} = -1 \; .$$

Diesen Parameter kann man in die Parameterform von $h$ einsetzen und erhält

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 10. Spurpunkte 132207

Bestimme die Spurpunkte[1] folgender Geraden

(a) $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

(b) $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -14 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 28 \\ 0 \\ -08 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

[1] Spurpunkte sind die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen ($\mathbb{R}^2$) oder mit Ebenen aufgespannt durch jeweils zwei Koordinatenachsen ($\mathbb{R}^3$).

**Methode** :
Die Spurpunkte haben die Koordinaten ($\mathbb{R}^3$)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \\ P_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Um den ersten Spurpunkt zu erhalten setzen wir also

$$\begin{pmatrix} 0 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + \lambda \\ S_2 &= -3 + \lambda \\ S_3 &= 3 - 3\lambda \end{aligned}$$

Die erste Gleichung enhält nur eine Unbekannnte. Aus ihr folgt $\lambda = -1$. Dies können wir in die Parametergleichung einsetzen und erhalten so den Spurpunkt

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Für die weiteren Spurpunkte geht das Verfahren analog.

11. **Schatten/Projektion** **409552**

Stelle die Koordinatengleichung der Projektion der Geraden $g : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ auf die xy-Ebene auf.

**Lösung:**
Die Gerade der Projektion in Parameterform ist

$$g' : \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Daraus ergibt sich $m = \frac{-6}{4}$. Wir berechnen nun den y-Achsen-Abschnitt. Dafür berechen wir den Schnittpunkt von $g'$ mit der $y$-Achse, d.h. es gilt $2 + \lambda \cdot 4 = 0$. Daraus folgt $\lambda = -\frac{1}{2}$ und $g'(\lambda = -\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ also $c = 6$. Die Koordinatengleichung lautet schliesslich:

$$x_2 = -\frac{3}{2} x_1 + 6 .$$

## 7.3 Skalarprodukt

1. **Rechenregeln Skalarprodukt** **790282**

Berechne für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgende Skalarprodukte. Gehe dabei möglichst effizient vor und benutze die Ergebnisse aus den ersten Teilaufgaben um die Resultate späteren zu berechnen.

(a) $\vec{a} \odot \vec{b}$

(b) $\vec{a} \odot \vec{c}$

(c) $\vec{b} \odot \vec{c}$

(d) $\vec{a} \odot \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

(e) $\vec{b} \odot (\vec{a} + \vec{c})$

(f) $\vec{c} \odot \left(\vec{b} + \vec{a}\right)$

(g) $\vec{a} \odot \left(\vec{b} - \vec{c}\right)$

(h) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \odot \left(\vec{b} - \vec{c}\right)$

(i) $\left(\vec{a} \odot \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$

(j) $\left(\vec{b} \odot \vec{c}\right) \cdot \vec{a}$

(k) $(\vec{a} \odot \vec{c}) \cdot \vec{b}$

**Lösung:**

(a) $-2$

(b) $3$

(c) $2$

(d) $1$

(e) $0$

(f) $5$

(g) $-5$

(h) $4$

(i) $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

(k) $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

**2. Rechenregeln Skalarprodukt** **989383**

Drücke mit Hilfe des Skalarprodukts aus,

(a) dass die Vektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$ orthogonal sind.

(b) dass $\vec{q}$ den Betrag 2 hat.

(c) dass $\vec{p}$ ein Einheitsvektor ist.

(d) dass $\vec{p}$ und $\vec{q}$ linear abhängig sind.

**Lösung:**

(a) $\vec{p} \odot \vec{q} = 0$

(b) $\vec{q} \odot \vec{q} = 2^2$

(c) $\vec{p} \odot \vec{p} = 1$

(d) $|\vec{p} \odot \vec{q}| = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}|$

**3. Skalarprodukt, Orthogonalität** **337372**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} u \\ 1 \\ v \end{pmatrix}$$

Bestimme die Parameter $u$ und $v$ so, dass der Vektor $\vec{c}$ zu $\vec{a}$ und auch zu $\vec{b}$ *orthogonal* ist.

**Lösung:**

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} = u + 5 + 2v,\ \vec{b} \odot \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} u \\ 1 \\ v \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} -2u + 14 + v$$

Die Vektoren sollen senkrecht aufeinander stehen also gilt $\vec{a} \odot \vec{b} = 0$ und $\vec{b} \odot \vec{c} = 0$. Die beiden Gleichungen ergeben

$$\begin{aligned} u + 5 + 2v &= 0 \\ -2u + 14 + v &= 0 \end{aligned}$$

Es folgt $u = 4.6$ und $v = -4.8$

**4. Winkel zwischen Vektoren** **853562**

Berechne die Winkel der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ , $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ , $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ , $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ , $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

(a) $\varphi = 99.46°$ (b) $\varphi = 90°$ (c) $\varphi = 65.56°$ (d) $\varphi = 57.12°$

**Vorgehen:**
Wir wissen, dass das Skalarprodukt von zwei Vektoren mit dem eingeschlossenen Winkel zusammenhängt

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \cos(\varphi) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Wir lösen nach $\cos(\varphi)$ auf und berechnen die Ausdrücke (erste Teilaufgabe):

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-6}{4.24264 \cdot 8.60233} = -0.164399$$

Durch Anwenden von $\arccos$ auf beiden Seiten ergibt sich

$$\varphi = \arccos(-0.164399) = 99.4623° \ .$$

### 5. Winkel zwischen Vektoren 451565

Ein Quader ist 8 cm lang, 5 cm breit und 3 cm hoch. A, B, C, D seien die Ecken seiner Grundfläche, M der Schnittpunkt seiner Raumdiagonalen.

(a) Veranschauliche den Quader in einem räumlichen Koordinatensystem.
(b) Berechne die Winkel $\angle$AMB
(c) Berechne die Winkel $\angle$BMC

**Lösung:**

$$\vec{u} = \vec{A} - \vec{M} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \vec{B} - \vec{M} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \vec{C} - \vec{M} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

(a) Siehe Abbildung 7.1.
(b) Winkel $\angle$AMB$= 60.67°$ (Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$).
(c) Winkel $\angle$BMC$= 107.83°$ (Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$).

### 6. Orthogonale Vektoren 573665

Bestimme einen Vektor $\vec{c}$, der zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal ist mit Hilfe des Skalarprodukts

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ , $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ , $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

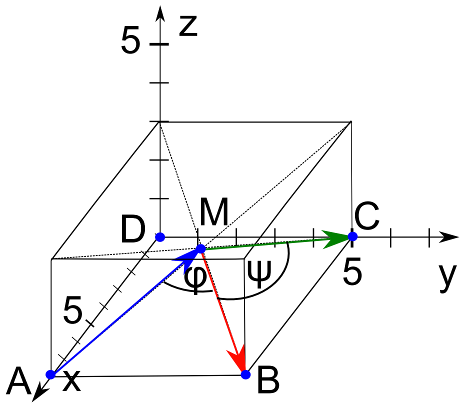



Abbildung 7.1: Zur Aufgabe 5

**Lösung:** a) Wir bestimmen einen Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, der die Bedingungen

$$\vec{u} \odot \vec{a} = 0 \text{ und } \vec{u} \odot \vec{b}$$

erfüllt. Das Gleichungssystem ist

$$\left| \begin{array}{rcl} 1 + 2u_2 + 3u_3 & = & 0 \\ 2 + 3u_2 & = & 0 \end{array} \right| .$$

Daraus folgt $u_2 = 1/2$ und $u_3 = -2/3$, oder ganzzahlig $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Es ist ja hier nur die Richtung von $\vec{u}$ wichtig, deshalb kann er so lange multipliziert werden, bis er ganzzahlig ist.

(b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 17 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

Alternativ können die orthogonal Vektoren mit dem Vektorprodukt berechnet werden.

**7. Abstände** **845423**

(a) Bestimme $x_3$ so, dass $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ von $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ die Entfernung 7 hat.

(b) Bestimme $x_1$ so, dass $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ von $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ die Entfernung 9 hat.

(c) Bestimme $x_x$ so, dass $P = \begin{pmatrix} 4 \\ x_2 \\ -13 \end{pmatrix}$ von $A = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$ die Entfernung 13 hat.

**Lösung:**

(a) $x_3 = -1$ oder $x_3 = 11$

(b) $x_1 = -6$ oder $x_1 = 0$

(c) keine Lösung

## 7.4 Vektorprodukt

**1. Rechenregeln Vektorprodukt** **020196**

Berechne für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Benutzen Sie die Teilresultate der ersten Teilaufgaben für die Berechnung der letzteren.

(a) $\vec{a} \times \vec{b}$

(b) $\vec{a} \times \vec{c}$

(c) $\vec{b} \times \vec{c}$

(d) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

(e) $\vec{a} \times \left(\vec{b} - \vec{c}\right)$

(f) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{b} - \vec{c}\right)$

(g) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$

**Lösung:**

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(e) $\vec{a} \times \left(\vec{b} - \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix}$

(f) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{b} - \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -15 \\ -9 \end{pmatrix}$

(g) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}$

**2. Welche der Mengen von Vektoren bilden eine Basis?** **279728**

Welche eine Orthogonal-Basis, welche eine Orthonormal-Basis von $\mathbb{R}^3$?

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

**Lösung:**

(a) Orthonormal-Basis, denn die drei Vektoren sind orthogonal zueinander, haben alle die Länge 1 und sind linear unabhängig.

(b) Keine Basis, denn die Vektoren sind linear abhängig.

(c) Die Vektoren sind eine Basis, aber sie schliessen einen Winkel vom 60° miteinander ein.

(d) Orthonormal-Basis, denn die drei Vektoren sind orthogonal zueinander, haben alle die Länge 1 und sind linear unabhängig.

**3. Welche der Mengen von Vektoren bilden eine Basis?** **133855**

Welche eine Orthogonal-Basis, welche eine Orthonormal-Basis von $\mathbb{R}^3$?

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

**Lösung:**

(a) Die Vektoren sind eine Orthogonal-Basis, aber der erste hat eine Länge $\neq 1$.

(b) Die Vektoren bilden eine Orthogonal-Basis.

(c) Die Vektoren bilden zwar eine Basis, sie stehen aber weder senkrecht aufeinander, noch sind sie normiert.

**4. Komponenten und Projektion** **176782**

Berechnen Sie die Komponenten des Vektors $\vec{b}$ in der Basis

$$\mathbf{F} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}_E$$

wobei die Komponenten von $\vec{b}$ und von $\mathbf{F}$ in der Standardbasis gegeben sind. Überprüfen Sie Ihr Resultat, indem Sie die Komponenten in der Basis $\mathbf{F}$ mit den Basisvektoren multiplizieren.

**Lösung:**

Die Vektoren $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ und $\vec{f}_3$ bilden eine Orthogonal-Basis, d.h. die Basis ist orthogonal und normiert. Deshalb können die Komponenten entlang der Basisvektoren unabhängig voneinander berechnet werden:

$$b_1 = \vec{b} \odot \frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|} = \vec{b} \odot \vec{f}_1 = 2\sqrt{2}$$

Die weiteren Komponenten berechnen sich gleich:

$$\begin{aligned} b_2 &= \vec{b} \odot \vec{f}_2 = \sqrt{2} \\ b_3 &= \vec{b} \odot \vec{f}_3 = 5 \end{aligned}$$

Also können wir schreiben

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 5 \end{pmatrix}_F$$

Zur Kontrolle kann man berechnen, welchen Punkt man erreicht, wenn man mit den berechneten Komponenten entlang der Basis-Vektoren **F** geht:

$$\vec{b} = 2\sqrt{2} \cdot \vec{f_1} + \sqrt{2} \cdot \vec{f_2} + 5 \cdot \vec{f_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**5. Komponenten und Projektion** **507550**

Berechnen Sie die Komponenten des Vektors $\vec{b}$ in der Orthogonal-Basis **F**, wobei die Komponenten von $\vec{b}$ und von **F** in der Standardbasis gegeben sind.

(a)

$$\mathbf{F} = \left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{F} = \left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(c) Siehe Aufgabe 176782

**Lösung:**

(a)

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_F$$

(b)

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_F$$

**6. Geometrie am Dreieck** **713581**

Berechne für das Dreieck ABC die Koordinaten des Fusspunktes $\vec{F_C}$ und die Höhe $h_C$.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Siehe auch Skizze Abbildung 7.2.

**Lösung:**

Wir berechnen die Projektion $\vec{f}$ und das Lot $\vec{h}_C$, des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{c}$:

$$f = \vec{b} \odot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{9}{5}$$

also

$$\vec{f} = f \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{9}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \cdot = \frac{9}{25} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

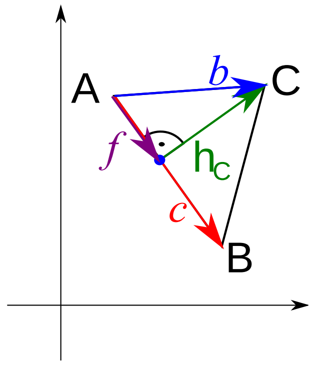



Abbildung 7.2: Zur Aufgabe 6

und

$$\vec{h}_C = \vec{b} - \vec{f} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}-52\\-50\\39\end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich die Höhe $h_c$ des Dreiecks und der Fusspunkt

$$h_C = \left|\vec{h}_C\right| = \sqrt{269/25} \approx 3.28024$$

und

$$\vec{F}_C = \vec{A} + \vec{f} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}136\\48\\-9\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix}127\\50\\11\end{pmatrix}$$

**Wichtig:** Die Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{c}$ ist

$$\vec{f} = \frac{\vec{b} \odot \vec{c}}{|\vec{c}|} \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{\vec{b} \odot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} \cdot \vec{c}\,.$$

Die Richtung von $\vec{f}$ hängt nur von der Richtung von $\vec{b}$ aber nicht von der Richtung von $\vec{c}$!
Wird $\vec{c}$ in umgekehrter Richtung gewählt — von $\vec{B}$ zu $\vec{A}$ — dann hätte $\vec{f}$ immer noch die selbe Richtung:

$$\frac{\vec{b} \odot (-\vec{c})}{|(-\vec{c})|^2} \cdot (-\vec{c}) = \vec{f}$$

Hätten wir aber $\vec{b}$ in umgekehrter Richtung gewählt — von $\vec{C}$ zu $\vec{A}$ — dann hätte $\vec{f}$ die entgegegesetzte Richtung:

$$\frac{-\vec{b} \odot \vec{c}}{|\vec{c}|^2} \cdot \vec{c} = -\vec{f}$$

**7. Lot** **381963**

Fällen Sie das Lot vom Punkt $\vec{C}$ auf die Gerade $g$ und berechnen Sie den Abstand des Punktes $\vec{C}$ zur Geraden $g$:

(a) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

(b) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

**Lösung:** a) Skizze wie in Abbildung 7.2, wir stellen uns einfach vor, $\vec{A}$ sei der Aufpunkt, und $\vec{c}$ der Richtungsvektor der Geraden.

$$f = \vec{b} \odot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = 2\sqrt{5} \approx 4.47$$

also

$$\vec{f} = f \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = 2\sqrt{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{h}_C = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\left|\vec{h}_C\right| = 2\sqrt{5} \approx 4.47.$
b) $2\sqrt{10} \approx 6.32$

## 8. Abstand 797792

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $\vec{C}$ von der Geraden $g$:

(a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

**Lösung:** a) Es wird ausschliesslich der Abstand gesucht. Wir können ihn — wie so oft — als Projektion des Verbindungsvektors zwischen Punkt $\vec{C}$ und $g$ den Vektor $\vec{n}$, der senkrecht auf der Geraden steht, berechnen:

$$h = \left|\vec{n} \odot (\vec{C} - \vec{A})\right| \ .$$

Der Vektor $\vec{n}$ lässt sich schnell berechnen. Wir nehmenden Richtungsvektor, tauschen die Komponenten und multiplizieren eine Komponente mit $-1$:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}'$$

Durch die Normierung erhalten wir

$$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{n}'|}\vec{n}' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Also ist der Abstand

$$h = \left|\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = |\frac{-10}{\sqrt{5}}| = 2\sqrt{5} \approx 4.47$$

.
b) $2\sqrt{10} \approx 6.32$

## 9. Spiegelung an Geraden durch Ursprung 659289

Spiegeln Sie das Dreieck $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ an der Geraden

$$g: \vec{x} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

Wir nennen den den Richtungsvektor der Geraden $\vec{v}$.
Die Idee ist, dass wir den Ortsvektor der Punkte, die wir spiegeln wollen, z.B. $\vec{B}$, zerlegen in eine Komponente, parallel zu $g$ und senkrecht zu $g$:

$$\vec{B} = \vec{B}_p + \vec{B}_s$$

Ist $\vec{B}_s$ bekannt, können wir spiegeln:

$$\vec{B}' = \vec{B} - 2 \cdot \vec{B}_s \; .$$

$\vec{A}$ liegt auf der Geraden also gilt

$$\vec{A}' = \vec{A} \; .$$

Für die anderen Punkte berechnen die einen Vektor der Senkrecht auf der Geraden steht durch Vertauschen der Komponenten des Richtunsvektors und Ändern eines Vorzeichens:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{n}' \; .$$

Die senkrechten Komponenten ergeben sich durch Projektion auf diese Vektor:

$$\vec{B}_s = \vec{B} \odot \vec{n}' \frac{1}{|\vec{n}'|} = \vec{B} \odot \vec{n}' \frac{1}{|\vec{n}'|} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}$$

und genau gleich

$$\vec{C}_s = -2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}$$

Der gespiegelte Punkt ist also bei

$$\vec{B}' = \vec{B} - 2\vec{B}_s = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

und

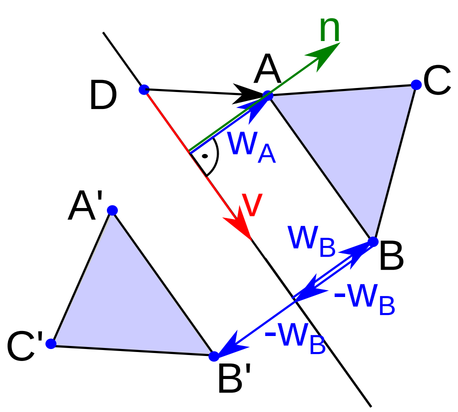
$$\vec{C}' = \vec{C} - 2\vec{C}_s = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 18 \\ 26 \end{pmatrix}$$

## 10. Spiegelung 109810

Spiegeln Sie das Dreieck $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ an der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**




Wir nennen den Aufpunkt der Geraden $\vec{D}$ und den Richtungsvektor $\vec{v}$.
Die Idee ist — in der Grafik wird dies beim Punkt $\vec{B}$ gezeigt — dass wir einen Vektor berechnen, $g$ und den Punkt $\vec{B}$ verbindet und der senkrecht auf $g$ steht.

Wir nennen diesen Vektor $\vec{w}_B$. Ist der bekannt, kann der Spiegelpunkt berechnet werden als

$$\vec{B}' = \vec{B}' - 2\vec{w}_B \ .$$

Wie wird $\vec{w}_B$ berechnet? Die Methode wird anhand von Punkt $\vec{A}$ gezeigt: Wir berechnen den Vektor $\vec{n}$, der senkrecht auf $g$ steht und normiert ist. Dafür nehmen wir den Richtungsvektor, tauschen die Komponenten und multiplizieren eine Komponente mit $-1$:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{n}'$$

Durch die Normierung erhalten wir

$$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{n}'|}\vec{n}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \ .$$

Die Projektion auf diesen Vektor ergibt

$$\vec{w}_A = \vec{n} \odot \left(\vec{A} - \vec{D}\right) \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Der gespiegelte Punkt ist also bei

$$\vec{A}' = \vec{A} - 2\vec{w}_A = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Weitere (Zwischen-) Resultate:

$$\vec{w}_B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \vec{w}_C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

. Die gespiegelten Punkte ergeben sich zu

$$\vec{B}' = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}, \ \vec{C}' = \begin{pmatrix} 15 \\ -7 \end{pmatrix} \ .$$

**11. Lot auf Ebene** **386301**

Fällen Sie das Lot vom Punkt $\vec{C}$ auf die Ebene $E$ und berechnen Sie den Abstand des Punktes $\vec{C}$ zur Ebene $E$.
Kontrollieren Sie ihre Resultat, indem Sie den Abstand des Fusspunkes $\vec{F}$ von der Ebene $E$ berechnen.

(a) $\vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$E : \vec{x} = \vec{A} + \mu\vec{u} + \nu\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) $\vec{C} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

**Lösung:** Das Vektorprodukt der Richtungsvektoren der Ebene ergibt einen Normalenvektor der Ebene: $\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$. Der Verbindungsvektor $\vec{a} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ (gerichtet von der Ebene zum Punkt $\vec{C}$) kann nun auf diesen Vektor projiziert werden:

$$h = \vec{a} \odot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} = \frac{-7}{7} = -1$$

$|h| = 1$ ist der Abstand. Der Fusspunkt ergibt sich aus

$$\vec{F} = \vec{C} - h \cdot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 \\ 38 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Kontrolle: Der Fusspunkt hat den Abstand 0 von der Ebene:

$$(\vec{F} - \vec{A}) \odot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 52 \\ 29 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \frac{1}{7} = 0$$

b) Mit den selben Definitionen wie in der vorherigen Teilaufgaben erhalten wir:

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{n} = \vec{n}' \frac{1}{|\vec{n}'|} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} \frac{1}{15}$$

Der Abstand ist

$$h = \vec{a} \odot \vec{n} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} \frac{1}{15} = 15$$

und der Fusspunkt ist bei

$$\vec{F} = \vec{C} - h \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} - 15 \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} \frac{1}{15} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Kontrolle: Der Fusspunkt hat den Abstand 0 von der Ebene:

$$(\vec{F} - \vec{A}) \odot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} \frac{1}{15} = 0$$

**12. Spiegelung an Ebene durch den Ursprung** **542603**

Spiegeln Sie den Punkt $\vec{P}$ an der Ebene durch den Ursprung mit dem Normalenvektor $\vec{n}'$.

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \vec{n}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**Lösung:** Der Ortsvektor von $\vec{P}$ kann zerlegt werden in eine Komponente parallel zu $\vec{n}'$ (Projektion) und eine senkrecht zu $\vec{n}'$ (Lot).

$$\vec{P} = \vec{P}_p + \vec{P}_s$$

Die parallele Komponente ergibt sich mit der Projektion

$$\vec{P}_p = (\vec{P} \odot \vec{n}') \cdot \frac{1}{|\vec{n}'|} \cdot \frac{1}{|\vec{n}'|} \cdot \vec{n}' = 10 \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \ .$$

Der gespiegelte Punkt ist nun bei

$$\vec{P}' = \vec{P} - 2\vec{P}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -11 \\ 25 \\ -2 \end{pmatrix}$$

### 13. Spiegelung* 379940

Spiegeln Sie die Gerade $g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -7 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}$ an der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Lösung:** Am einfachsten lassen sich Punkte an der Ebenen spiegeln. Wir können danach die Geradengleichung aus zwei Punkten wieder rekonstruieren. Wir wählen hierfür $\vec{A}$ und $\vec{B} = \vec{A} + \begin{pmatrix} -7 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Die Verbindungsvektoren von der Ebene zu diesen Punkten sind:

$$\vec{w}_A = \left[(\vec{A} - \vec{C}) \odot \vec{n}\right] \cdot \vec{n} = \left[ \left( \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 32 \end{pmatrix} \frac{1}{9}$$

und für $\vec{B}$:

$$\vec{w}_B = \left[(\vec{B} - \vec{C}) \odot \vec{n}\right] \cdot \vec{n} = \left[ \left( \begin{pmatrix} -10 \\ 22 \\ 8 \end{pmatrix} \right) \odot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 40 \end{pmatrix} \frac{1}{9}$$

Die gespiegelten Punkte sind also

$$\vec{A}' = \vec{A} - 2\vec{w}_A = \begin{pmatrix} 25 \\ 61 \\ -46 \end{pmatrix} \frac{1}{9}$$

und

$$\vec{B}' = \vec{B} - 2\vec{w}_B = \begin{pmatrix} -34 \\ 200 \\ -35 \end{pmatrix} \frac{1}{9}$$

Der neue Richtungsvektor ist $\vec{B}' - \vec{A}' = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -59 \\ 139 \\ 11 \end{pmatrix}$ und

$$g': \ \vec{x} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 25 \\ 61 \\ -46 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -59 \\ 139 \\ 11 \end{pmatrix} \ .$$

Es gibt viele Darstellungen dieser Geraden $g'$. Allen ist gemeinsam, dass sie $E$ bei $\begin{pmatrix} 29 \\ -55 \\ -10 \end{pmatrix}$ schneiden und mit $E$ den Winkel 3.21° einschliessen.

## 7.5 Abstände, Ebenengleichung

1. **Abstand Punkt-Gerade** **961497**

Berechne den Abstand des Punktes $\vec{B}$ von der Geraden $g$.

(a) $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, und $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

(a) Wir bezeichnen den Richtungsvektor der Geraden mit $\vec{u}$ und den Aufpunkt mit $\vec{A}$. $h = \frac{|(\vec{B}-\vec{A})\times\vec{u}|}{|\vec{u}|} = \sqrt{\frac{157}{13}} \approx 3.48$. Die Zwischenresultate sind:

$$\vec{d} := \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \vec{d} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) $h = \sqrt{\frac{93}{29}} \approx 1.79$. Die Zwischenresultate sind:

$$\vec{d} := \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{d} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. **Abstand Punkt-Ebene** **212208**

Berechne den Abstand des Punktes $\vec{B}$ von der Ebene $E$.

(a) $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, und $E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und $E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

(a) Wir bezeichnen die Richtungsvektoren der Ebene mit $\vec{u}$ und $\vec{v}$, den Normaleneinheitsvektor mit $\vec{n}$ und den Aufpunkt mit $\vec{A}$.

$$h = \left|\left(\vec{B} - \vec{A}\right) \odot \vec{n}\right| = 7\sqrt{\frac{2}{11}} \approx 2.98 \,.$$

Die Zwischenresultate sind:

$$\vec{d} := \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \left|\vec{n}'\right| = \sqrt{22}$$

(b) $h = \left|\left(\vec{B} - \vec{A}\right) \odot \vec{n}\right| = \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2.89$. Die Zwischenresultate sind:

$$\vec{d} := \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \left|\vec{n}'\right| = \sqrt{3}$$

**3. Ebenengleichung in Parameterform** **363870**

Eine Ebene $E$ enthält die Punkte $\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}),\ \vec{Q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{R} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechne die

(a) Ebenengleichung in Parameterform.
(b) Normalenform der Ebene.
(c) Koordinatengleichung der Ebene.
(d) Ebenengleichung in Achsenabschnittsform. Gib die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen an.
(e) Ebenengleichung in der Hesse'schen Normalenform. Gib den Abstand zum Ursprung des Koodinatensystems an.

**Lösung:**

(a) Parameterform :

$$E:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{P} + \nu(\vec{Q} - \vec{P}) + \mu(\vec{R} - \vec{P})$$

$$E:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und $\nu, \mu \in \mathbb{R}$

(b) Normalenform :

$$E:\ [\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \vec{P}s] \odot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$$

$$E:\ [\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}] \odot \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

(c) Koordinatengleichung von $E:\ -9x - 4y + z + 25 = 0$

(d) Ebenengleichung in Achsenabschnittsform entsteht aus der Koodinatengleichung durch die Division durch $-25$:

$$\frac{9x}{25} + \frac{4y}{25} - \frac{z}{25} - 1 = 0$$

und die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sind bei

$$\vec{S}_x = \begin{pmatrix} \frac{25}{9} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{S}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{25}{4} \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{S}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \end{pmatrix}$$

(e) Ebenengleichung in der Hesse'schen Normalenform :

$$E:\ -\frac{9x}{7\sqrt{2}} - \frac{4y}{7\sqrt{2}} + \frac{z}{7\sqrt{2}} + \frac{25}{7\sqrt{2}} = 0$$

Die Konstante $\frac{25}{7\sqrt{2}}$ ist gleich dem Abstand zum Ursprung.

Kontrolle: Die Punkte $\vec{P}, \vec{Q}$ und $\vec{R}$ eingesetzt in eine der vier letzten Ausdrücken ergeben eine wahre Aussage, z.B. $\vec{P}$ in der Koordinatengleichung

$$-9 \cdot (2) - 4 \cdot (1) + (-3) + 25 = 0$$

**4. Abstand Punkt-Ebene** **343437**

Berechne den Abstand der Punkte

(a) $\vec{Q} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-8\\0\\-4\end{pmatrix}$

(b) $\vec{R} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-18\\10\\-9\end{pmatrix}$

(c) $\vec{S} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-6\end{pmatrix}$

(d) $\vec{T} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$

von der Ebene, die gegeben ist durch die Punkte

$$\vec{A} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix},\ \vec{B} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \text{ und } \vec{C} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Benutzen Sie dafür die Projektion auf den Normaleneinheitsvektor (a-b) und die Hesse'sche Normalenform (c-d).

**Lösung:**

Die Richtungsvektoren der Ebene sind z.B. $\vec{u} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \vec{A} - \vec{C} = \begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}$. Damit ergibt sich der Normalenvektor zu $\vec{n}' = \vec{v} \times \vec{u} = \begin{pmatrix}-4\\0\\-2\end{pmatrix}$ und normiert $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}$.

(a) $d = \vec{n} \odot \left(\vec{Q} - \vec{A}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}-18/5\\-1\\11/5\end{pmatrix} = \sqrt{5}$

(b) $d = \vec{n}' \odot \left(\vec{R} - \vec{A}\right) = \begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}-28/5\\1\\6/5\end{pmatrix} = 2\sqrt{5}$

(c) Die Hesse'sche Normalenform ist $\vec{n} \odot \vec{x} - \vec{n} \odot \vec{A} = 0$ also $-\frac{2x}{\sqrt{5}} - \frac{z}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$. Einsetzen von $\vec{C}$ ergibt $d = \sqrt{5}$.

(d) Einsetzen von $\vec{T}$ ergibt

$$d = -\frac{2 \cdot 2}{\sqrt{5}} - \frac{-3}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{-4+3+1}{\sqrt{5}} = 0$$

Dieser Punkt liegt also in der Ebene $E$

**5. Schnittgerade zweier Ebenen** 923584

Die Ebenen $E_1$ und $E_2$ schneiden sich in einer Geraden $g$. Bestimme eine Parameterdarstellung von $g$:

(a) $E_1: x_1 - x_2 + 2x_3 - 1 = 0$
$E_2: 6x_1 + x_2 - x_3 = 5$

(b) $E_1: 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 7$
$E_2: -x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 0$

(c) $E_1: 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 1$
$E_2: 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 17$

(d) $E_1: x_1 + 5x_3 = 8$
$E_2: x_1 + x_2 + x_3 = 1$

**Lösung:**

a) Der Richtungsvektor der Schnittgeraden zweier Ebenen steht senkrecht auf den Normalenvektoren beider Ebenen. Ein Richtungsvektor ergibt sich daher aus dem Vektorprodukt der beiden Normalenvektoren. Der Normalen-Vektoren der Ebenen lassen sich aus der Koordinatengleichung herauslesen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Der Aufpunkt muss gleichzeitig beide Ebenengleichungen erfüllen. Hierbei kann eine Koordinate z.B. $z = 0$ vorgegeben werden.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - 1 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Der Aufpunkt ist also bei $\begin{pmatrix} 6/7 \\ -1/7 \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Parametergleichung der Schnittgeraden ist.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ -1/7 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 7/20 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -25 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix}$

(c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -79/9 \\ 65/9 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 47 \\ -25 \\ 9 \end{pmatrix}$

(d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

**6. Durchstosspunkt** **187679**

Bestimme den Durchstosspunkt der Geraden $g$ durch die Ebene $E: 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 7 = 0$.

(a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

(b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

a) Wir setzen die Komponenten der Parametergleichung der Geraden in die Gleichung der Ebenen ein:

$$3 \cdot (1 + s) + 5 \cdot (3s) - 2 \cdot (9 + 5s) + 7 = 0$$

vereinfacht: $-15 + 8s + 7 = 0$ mit der Lösung $s = 1$. Der Durchstosspunkt ist also bei

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Bigg|_{s=1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix} .$$

b) $s = -\frac{31}{14}$ und $\vec{x} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 36 \\ -48 \\ -17 \end{pmatrix}$

**7. Ebenengleichung** **483154**

Wähle die Variablen $a$, $b$, $c$ so, dass die Ebenen

$$E_1: \ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7 = 0 \ E_2: \ a \cdot x_1 + b \cdot x_2 - x_3 - c = 0$$

(a) gleich sind

(b) parallel, aber nicht gleich sind

(c) nicht parallel sind.

**Lösung:**

(a) Die Ebenen sind gleich, wenn die Gleichung für $E_1$ ein Vielfaches von der Gleichung für $E_2$ ist.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7 &= 0 \\ \lambda a x_1 + \lambda b x_2 - \lambda x_3 - \lambda c &= 0 \end{aligned}$$

Für die 3. Komponente ergibt sich daraus $2 = -\lambda$, also $\lambda = -2$. Der Koeffizentenvergleich gibt

$$\begin{aligned} 2 &= (-2) \cdot a \\ 3 &= (-2) \cdot b \\ -7 &= (-2) \cdot (-c) \end{aligned}$$

und somit $a = -1,\ b = -\frac{3}{2},\ c = -\frac{7}{2}$.

(b) Die Ebenen sind parallel, wenn zwar ihr Normalenvektor gleich ist (wähle $a = -1,\ b = -\frac{3}{2}$ aus der vorherigen Teilaufgabe), wenn aber die Konstante verschieden ist, wähle z.B. $c = 10$.

(c) Für $a \neq -1,\ b \neq -\frac{3}{2}$ sind die Ebenen nicht parallel.

**8. Spat** **642501**

Die 6 Ebenen (jeweils 2 sind parallel)

$$\begin{array}{lll} E_1:\ x_1 = 0 & E_2:\ x_2 - x_3 = 0 & E_3:\ x_1 + 5x_3 = 0 \\ E_1':\ x_1 = 5 & E_2':\ x_2 - x_3 - 8 = 0 & E_3':\ x_1 + 5x_3 = 20 \end{array}$$

begrenzen einen Spat, dessen eine Ecke im Ursprung liegt. Bestimme drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, welche diesen Spat vom Ursprung aus aufspannen. (Hinweis: Man benötigt die Schnittpunkte der Ebenen.)

**Lösung:**

Das Spat wird durch die Vektoren $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ aufgespannt, die jeweils die Schnittpunkte der folgenden Ebenen sind:

$$\begin{array}{ll} \vec{P}: & E_1' \wedge E_2 \wedge E_3 \\ \vec{Q}: & E_2' \wedge E_3 \wedge E_1 \\ \vec{R}: & E_3' \wedge E_1 \wedge E_2 \end{array}$$

Die Punkte $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ ergeben sich also aus der Lösung der 3 Gleichungssysteme:

$$\left|\begin{array}{rcl} P_1 &=& 5 \\ P_2 - P_3 &=& 0 \\ P_1 + 5P_2 &=& 0 \end{array}\right| \left|\begin{array}{rcl} Q_2 - Q_3 &=& 8 \\ Q_1 &=& 0 \\ Q_1 + 5Q_3 &=& 0 \end{array}\right| \left|\begin{array}{rcl} R_1 + 5R_3 &=& 20 \\ R_2 - R_3 &=& 0 \\ R_1 &=& 0 \end{array}\right|$$

und sind $\vec{P} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

**9. Gerade und Ebene** **211220**

Welche Lage haben Gerade $g$ und Ebene $E$ zueinander? Bestimmen Sie Abstand, Schnittpunkt und Schnittwinkel.

(a) $g$ geht durch $\vec{P} = \begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{Q} = \begin{pmatrix}8\\2\\4\end{pmatrix}$ und $E$ durch $\vec{R} = \begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix}$ und der Normalenvektor ist $\vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$

(b) $g$ geht durch

$$\vec{P} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \text{ und } \vec{Q} = \begin{pmatrix}5\\6\\18\end{pmatrix} .$$

und $E$ durch

$$\vec{R} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}, \vec{S} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} \text{ und } \vec{T} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} .$$

**Lösung:**

a) Der Winkel zwischen dem Normalenvektor von $E$ und dem Richtungsvektor von $g$ ist 80.73° also schliessen $E$ und $g$ den Winkel $\varphi = 90° - 80.73° = 9.27$ ein. Wird die Geradengleichung $g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ in die Ebenengleichung $E: (\begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}) \odot \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} = 0$ eingesetzt, ergibt sich *eine* Gleichung mit einem Parameter:

$$-9 + 2s = 0 ,$$

mit der Lösung $s = \frac{9}{2}$. Der Schnittpunkt ist also bei $\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix} + \frac{9}{2}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}37/2\\11/2\\11\end{pmatrix}$

Da die Ebene die Gerade schneidet, gibt es keinen Abstand zwischen ihnen. b) Eine Parameter-Darstellung der Gerade ist

$$g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\6\\15\end{pmatrix} = \vec{P} + s \cdot (\vec{Q} - \vec{P}) .$$

Die Darstellung der Ebene $E$ ist

$$E: (\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \vec{R}) \odot \vec{n}' = \begin{pmatrix}x-1\\y+2\\z+2\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}3\\6\\15\end{pmatrix} = 0$$

da

$$\vec{n}' = (\vec{S} - \vec{R}) \times (\vec{T} - \vec{R}) = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\15\end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor schliesst mit dem Richtungsvektor der Ebene den Winkel

$$\varphi' = \arccos(\frac{\vec{v} \odot \vec{n}'}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}'|}) = 112.79°$$

ein also ist der Schnittwinkel $\varphi = 112.79° - 90° = 22.79$.

Den Schnittpunkt finden wir durch Einsetzen der Geradengleichung in die Gleichung der Ebene:

$$\begin{pmatrix}(2+3s)-1\\(6s)+2\\(3+15s)+2\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}3\\6\\15\end{pmatrix} = 0$$

d.h. $-3 - 9 \cdot s = 0$ und $s = -\frac{1}{3}$. Der Schnittpunkt ist also bei

$$\vec{S} = g\big|_{s=-\frac{1}{3}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{3}) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

# Teil II

# Lineare Algebra

KAPITEL 8

# Eliminationsverfahren von Gauss II

Lineare Gleichungsysteme sind ein wichtiges Thema in der linearen Algebra. Wie wir sehen werden, können viele Aufgaben auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems zurückgeführt werden.

## 8.1 Lineare Gleichungen

**Definition 8.1 Lineare Gleichung**

Eine **lineare Gleichung** in den Unbekannten $x_1, x_2, \dots, x_n$ ist eine Gleichung, die sich in der Standard-Form

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = b$$

schreiben lässt, mit den Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ und der Konstanten $b$.
Eine **Lösung der linearen Gleichung** ist die Liste

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

die eingesetzt in die lineare Gleichung die wahre Aussage

$$a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \ldots + a_n \cdot u_n = b$$

ergibt.
Wir rechnen in $\mathbb{R}$, also $a_1, a_2, \ldots a_n,\ b\ \in \mathbb{R}$

In der Definition haben wir die Unbekannten $x_1, x_2, \dots, x_n$ genannt. Wenn wir diese Indices vermeiden wollen schreiben wir stattdessen $x, y, z$ und beschränken uns auf drei Dimensionen.

**Beispiel 8.1 Lösung einer linearen Gleichung**

Sind $\vec{u} = \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ Lösungen der folgenden linearen Gleichung?

$$x + 2y - 3z = 6$$

**Lösung:**

Wir setzen die Liste (den Vektor) $\vec{u}$ in die Gleichung ein und erhalten nacheinander

$$\begin{array}{rcl} 5 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 & = & 6 \\ 5 + 4 - 3 & = & 6 \\ 6 & = & 6 \end{array}$$

Die letzte Zeile ist eine wahre Aussage, also ist $\vec{u}$ eine Lösung.
Wir setzen danach die Liste $\vec{v}$ in die Gleichung ein und erhalten nacheinander

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 & = & 6 \\ 1 + 4 - 9 & = & 6 \\ -4 & = & 6 \end{array}\right|$$

Die letzte Zeile ist eine falsche Aussage, also ist $\vec{v}$ keine Lösung.

**Definition 8.2 Lineares Gleichungssystem, LGS** **969291**

Ein **lineares Gleichungssystem** ist eine Liste von linearen Gleichung in den selben Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Wir systematisieren die Schreibweise noch weiter:

$$\left|\begin{array}{ccccc} a_{11} \cdot x_1 & +a_{12} \cdot x_2 & + \ldots & +a_{1n} \cdot x_n = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & +a_{22} \cdot x_2 & + \ldots & +a_{2n} \cdot x_n = & b_2 \\ & \ldots & & & \\ a_{m1} \cdot x_1 & +a_{m2} \cdot x_2 & + \ldots & +a_{mn} \cdot x_n = & b_m \end{array}\right|$$

Dabei bezeichnet $m$ die Anzahl der linearen Gleichungen. Die Koeffizienten $a_{ij}$ haben jetzt zwei Indices. Der erste Index $i$ bezeichnet die Nummer der Gleichung, der zweite bezeichnet die Unbekannte, zu der der Koeffizient gehört. Ebenfalls bezeichnet $b_i$, die Konstante in der $i$-ten Gleichung.

Ausserdem wird ein lineares Gleichungssystem **quadratisch** genannt, wenn es gleich viele Gleichungen wie Unbekannte hat $m = n$.
Ein lineares Gleichungssystem heisst **homogen**, falls

$$\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

Andernfalls heisst es **inhomogen**.

**Beispiel 8.2 Lösung eines linearen Gleichungssystems** **500997**

Betrachte das System

$$\left| \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +4\cdot x_3 & +3\cdot x_4 = & 5 \\ 2\cdot x_1 & +3\cdot x_2 & +x_3 & -2\cdot x_4 = & 1 \\ x_1 & +2\cdot x_2 & -5\cdot x_3 & +4\cdot x_4 = & 3 \end{array} \right| .$$

Sind

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und } \vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems?

**Lösung:**

Wir setzen $\vec{u}$ in das Gleichungssystem ein und erhalten nacheinander

$$\left| \begin{array}{ccc} -10+5+4+6 & = & 5 \\ -10+15+1-4 & = & 1 \\ -10+10-5+8 & = & 3 \end{array} \right| \quad \text{oder} \quad \left| \begin{array}{ccc} 5 & = & 5 \\ -8 & = & 1 \\ 3 & = & 3 \end{array} \right|$$

Für die zweite Gleichung erhalten wir eine falsche Aussage, deshalb ist $\vec{u}$ keine Lösungen des linearen Gleichungssystems.

Ebenfalls stetzen $\vec{v}$ in das Gleichungssystem ein und erhalten nacheinander

$$\begin{array}{ccc} -8+6+4+3 & = & 5 \\ -16+18+1-2 & = & 1 \\ -8+12-5+4 & = & 3 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{ccc} 5 & = & 5 \\ 1 & = & 1 \\ 3 & = & 3 \end{array}$$

Alle Zeilen enthalten wahre Aussagen, deshalb ist $\vec{v}$ eine Lösungen des linearen Gleichungssystems.

**Beispiel 8.3 Linear-Kombinationen von Gleichungen** **969391**

Wir benennen die Gleichungen aus dem vorherigen Beispiel mit $L_1, L_2$ und $L_3$. Ist $\vec{v}$ eine Lösung der linearen Gleichung

$$L_2 - L_1 - L_3\ ?$$

**Lösung:**

Wir berechnen zuerst die lineare Gleichung $L_2 - L_1 - L_3$:

$$\left| \begin{array}{rccccc} 1\cdot L_2: & 2x_1 & +3x_2 & +1x_3 & -2x_4 = & 1 \\ -1\cdot L_1: & -x_1 & -x_2 & -4x_3 & -3x_4 = & -5 \\ -1\cdot L_3: & -x_1 & -2x_2 & +5x_3 & -4x_4 = & -3 \\ \hline L': & 0\cdot x_1 & +0\cdot x_2 & +2x_3 & -9x_4 = & -7 \end{array} \right|$$

Wenn wir nun $\vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $L'$ einsetzen, erhalten wir nacheinander

$$2 \cdot (1) - 9 \cdot (1) = -7 \quad \text{oder} \quad 25 = 25$$

Wir folgern daraus, dass durch die Linearkombination von linearen Gleichungen die Lösungsmenge nicht verändert wird.

## 8.2 Lösungsverfahren mit elementaren Zeilenoperationen

**Definition 8.3 Elementare Zeilenoperationen**

Die elementaren Zeilenoperationen sind

- Vertauschung von zwei Gleichungen: $L_i \leftrightarrow L_j$
- Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl $k \neq 0$: $L_i \to L_i \cdot k$
- Addition der Gleichungen $L_i$ und $L_j \cdot k$: $L_i \to L_i + L_j \cdot k$

[Papula, Bd. 2 I 5.2]

**Satz 8.1 Elementare Zeilenoperationen**

Elementare Zeilenoperationen verändern die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ nicht.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.464]

Das Gauss'sche Eliminations-Verfahren wendet die elementaren Zeilenoperationen nacheinander an, um das lineare Gleichungssystem in die **Zeilenstufenform** (meist sogar **Dreiecks-Form**) zu bringen. Daraus kann die Lösung des Gleichungssystems einfach bestimmt werden. Dazu das folgende Beispiel:

**Beispiel 8.4 Einsetzen in die Dreiecksform** **959281**

Löse das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\left| \begin{array}{ccccc} 2x_1 & -3x_2 & +5x_3 & -2x_4 & = & 9 \\ & 5x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & 1 \\ & & 7x_3 & -x_4 & = & 3 \\ & & & 2x_4 & = & 8 \end{array} \right|$$

**Lösung:**

1. In der letzten Zeile erhalten wir $x_4 = 4$.
2. Das setzen wir in die dritte Zeile ein und erhalten die Gleichung mit einer Unbekannten:
$$7x_3 - 4 = 3 \text{ also } 7x_3 = 7 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1$$
3. Jetzt setzen wir $x_3 = 1$ und $x_4 = 4$ in die zweite Gleichung ein und erhalten

wieder eine Gleichung mit nur einer Unbekannten:

$$5x_2 - 1 + 12 = 1 \text{ oder } 5x_2 + 11 = 1 \text{ oder } 5x_2 = -10 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2$$

4. Schliesslich setzen wir $x_2 = -2,\ x_3 = 1$ und $x_4 = 4,$ in die erste Gleichung ein und lösen nach der ersten Unbekannten auf:

$$2x_1 + 6 + 5 - 8 = 9 \text{ oder } 2x_1 + 3 = 9 \text{ oder } 2x_1 = 6 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3$$

Die Lösung ist also $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Die Dreiecksform zeichnet sich dadurch aus, dass genau so viele Gleichungen vorliegen wie Unbekannte. Gibt es weniger Gleichungen als Unbekannte, sprechen wir von der **Zeilenstufenform**. Die Dreiecksform ist also ein Spezialfall der Zeilenstufenform mit Anzahl Unbekannte gleich Anzahl Gleichung, $n = m$.

**Beispiel 8.5 Einsetzen in der Zeilenstufenform** **577593**

Lösen Sie das nachfolgende Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben:

$$\left| \begin{array}{cccccccc} 2x_1 & +6x_2 & -x_3 & +4x_4 & -2x_5 & = & 15 \\ & & x_3 & +2x_4 & +2x_5 & = & 5 \\ & & & 3x_4 & -9x_5 & = & 6 \end{array} \right| .$$

**Lösung:**

Die Variablen, die auf jeder Zeile zuvorderst stehen ($x_1, x_3$ und $x_4$), nennen wir **Pivot-Variablen**, die anderen nennen wir **freie Variablen** ($x_2$ und $x_5$). Die Benennung wird in den folgenden Lösungsschritten klar. Wir lösen jetzt in parametrischer Form: Wir benennen die freien Variablen mit Parametern

$$x_2 = \mu,\ x_5 = \nu\ .$$

Die restlichen Variablen bestimmen wir nun wie beim Einsetzen in Dreieckform, nur dass hier noch zusätzlich die Parameter $\mu$ und $\nu$ auftreten:

1. In der letzten Gleichung ergibt sich

$$3x_4 - 9\nu = 6 \quad \text{oder} \quad 3x_4 = 6 + 9b \quad \Rightarrow \quad x_4 = 2 + 3\nu$$

2. Wir setzen $x_4 = 2 + 3\nu$ und $x_5 = \nu$ in die zweite Gleichung ein und lösen nach $x_3$ auf:

$$2x_3 + 2(2 + 3\nu) + 3\nu = 5 \quad \text{oder} \quad x_3 + 4 + 8\nu = 5 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1 - 8\nu$$

3. Wir setzen $x_3 = 1 - 8\nu,\ x_4 = 2 + 3\nu$ und $x_5 = \nu$ in die erste Gleichung ein und lösen nach $x_1$ auf:

$$2x_1 + 6\mu - (1 - 8\nu) + 4(2 + 3\nu) - 2\nu = 15 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4 - 3\mu - 9\nu$$

Die Lösung ist also $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4-3\mu-9\nu \\ \mu \\ 1-8\nu \\ 2+3\nu \\ \nu \end{pmatrix}$. Dies kann auch geschrieben werden als

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

und $\mu$ und $\nu$ sind Zahlen aus $\mathbb{R}$.
Übrigens, ist Ihnen aufgefallen, dass die Lösung die Form einer Ebene in Parameterform hat? Es gibt einen Aufpunkt und zwei Richtungsvektoren. Da wir uns in fünf und nicht in drei Dimensionen bewegen, nennen wir die Lösungsmenge eine **Hyperebene**.

Das Lösen von linearen Gleichungen mit dem **Gauss-Eliminations-Verfahren** setzt sich nun aus den beiden Teil-Verfahren zusammen:

- Elimination: Durch elementare Zeilenoperationen wird das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform gebracht.
- Rücksubstitution: Durch Einsetzen von unten nach oben werden die Unbekannten bestimmt.

**Infobox 8.1 Zeilenstufenform vs. Trapezform**

In [Papula, Bd. 2 I 4.4] werden die elementare Zeilenoperationen "äquivalente Umformungen" genannt. Ausserdem wird die Zeilenstufenform da "Trapezform" genannt.

Übrigens, beim Überführen eines Gleichungssystems in Zeilenstufenform verwendet man eine Kombination von zwei Schritten, nämlich man ersetzt die Gleichung $L_i$ mit $L_i + kL_j$: $L_i \to L_i + L_j \cdot k$, d.h. man führt die Multiplikation einer Gleichung gleichzeitig mit der Addition von Gleichungen aus.

Beachte, dass das Verfahren vorzeitig abgebrochen werden kann, wenn ein Widerspruch erzeugt wird. Dann hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung. Wie die elementaren Zeilenoperationen eingesetzt werden um auf Zeilenstufenform zu kommen, zeigt das nächste Beispiel

**Beispiel 8.6 Zeilenstufenform durch elementare Zeilenoperationen 577593**

Lösen Sie das nachfolgende Gleichungssystem mit dem Gaussverfahren

$$\left| \begin{array}{cccc} x & -3y & -2z & = & 6 \\ 2x & -4y & -3z & = & 8 \\ -3x & +6y & +8z & = & -5 \end{array} \right| .$$

**Lösung:**
Elimination:

$$\left| \begin{array}{rcccccc} L_1' = L_1 : & x & -3y & -2z & = & 6 \\ L_2' = L_2 - 2L_1 : & 0 & 2y & z & = & -4 \\ L_3' = L_3 + 3L_1 : & 0 & -3y & +2z & = & 13 \end{array} \right|$$

also

$$\left|\begin{array}{rcccrcr} L_1'' = L_1': & x & -3y & -2z & = & 6 \\ L_2'' = \frac{1}{2}\cdot L_2': & & 1y & +\frac{1}{2}z & = & -2 \\ L_3'' = L_3' + 3L_2'': & & 0 & +\frac{7}{2}z & = & 7 \end{array}\right|$$

Einsetzen:

- Aus der Gleichung $L_3''$ folgt, dass $z = 2$.
- Wir setzen das in Gleichung $L_2''$ ein und erhalten

$$1y + 1 = -2 \quad \Rightarrow \quad y = -3$$

- Wir setzen $z = 2$ und $y = -3$ in die erste Gleichung $L_1''$ ein

$$x + 9 - 4 = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Die Lösung ist also die Liste (oder der Vektor) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Beachte, dass beim Gaussverfahren zuerst von oben nach unten gearbeitet wird (Elimination) und dann strikt von unten nach oben (Einsetzen). Dies erlaubt die Übersicht zu behalten und wir vermeiden linear abhängige Linearkombinationen (siehe unten).

**Infobox 8.2 Elimination beim Gaussverfahren**

Bei der Elimination wird *eine* Zeile bestimmt, mit der eliminiert wird (sie darf zu anderen Zeilen addiert werden).
Diese Zeile muss unverändert in das nächste Gleichungssystem übernommen werden.
So werden linear abhängige Linearkombinationen der Gleichungen vermieden.

Die Probleme, die entstehen, wenn man sich nicht an diese Regel hält, zeigt das folgende Beispiel:

**Beispiel 8.7 Linear abhängige Linearkombinationen von Gleichungen 942087**

Für das Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{rrcr} x & -3y & = & 6 \\ 2x & -4y & = & 10 \end{array}\right| .$$

wird das folgende Vorgehen vorgeschlagen:

$$\left|\begin{array}{rcrcr} L_1' = L_1 - \frac{1}{2}L_2: & 0 & -1y & = & 1 \\ L_2' = L_2 - 2L_1: & 0 & +2y & = & -2 \end{array}\right|$$

also

$$\left|\begin{array}{rcrcr} L_1'' = L_1': & 0 & -1y & = & 1 \\ L_2'' = L_2' + 2L_1': & 0 & +0 & = & 0 \end{array}\right|$$

$x$ ist vermeintlich ein freier Parameter. Wir setzen $x = \mu$. Ausserdem folgt aus der ersten Zeile, dass $y = -1$ ist. Die Lösungen sind also $\vec{u} = \begin{pmatrix} \mu \\ -1 \end{pmatrix}$. Dies ist offensichtlich eine falsche Lösung, denn die richtige Lösung besteht aus einem einzigen Schnittpunkt $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Was wurde beim Lösen falsch gemacht?

**Lösung:**

Beim ersten Eliminationsschritt wurde nicht eingehalten, die Zeile mit der Eliminiert wird nicht verändert werden darf.
Wenn wir nun untersuchen, welche Gleichungen wir im zweiten Eliminationsschritt erhalten sind dies:

$$\left| \begin{array}{lcr} L_1'' & = & L_1' = L_1 - \frac{1}{2}L_2 \\ L_2'' & = & L_2' + 2L_1' = (L_2 - 2L_1) + 2(L_1 - \frac{1}{2}L_2) = 0 \end{array} \right| .$$

Wir sehen also, dass die erste Gleichung eine Linearkombination von $L_1$ und $L_2$ ist. Das ist in Ordnung. Aber die zweite Gleichung wurde durch eine $0$ ersetzt. Dies ist auf den ersten Blick nicht ersichtlich, sondern erscheint erst in der Analyse.

In der Fachsprache nennt man die Gleichungen $L_1'$ und $L_2'$ linear abhängige Linearkombinationen, weil die Vektoren gebildet aus den Koeffizienten

$$L_1' = 1L_1 - \frac{1}{2}L_2 \Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und

$$L_2' = -2L_1 + 1L_2 \Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind. Diese linear abhängige Linearkombinationen werden bei der Elimination vermieden, indem die Zeile mit der eliminiert wird, unverändert beibehalten wird.

## 8.3 Existenz und Form der Lösung

Beim letzten Schritt der Elimination können ausserdem in der letzten Zeile drei Situationen auftreten:

**Satz 8.2 Formen von linearen Gleichungssystemen**

Das lineare Gleichungssystem $a \cdot x = b$ kann drei Formen annehmen

1. Es liegt die Form $a \cdot x = b$ mit $a \neq 0$ vor. Es gibt eine Lösung $x = \frac{b}{a}$.
2. Es liegt die Form $0 \cdot x = b$ mit $b \neq 0$ vor. Es gibt keine Lösung.
3. Es liegt die Form $0 \cdot x = 0$ vor. Dann gibt es unendlich viele Lösungen $x = \mu$ mit $\mu \in \mathbb{R}$.

**Definition 8.4 Inkonsistente lineare Gleichungen**

Die lineare Gleichung $0 \cdot x = b$ mit $b \neq 0$ nennen wir **inkonsistent** (Fall 2 in Satz 2). Alle anderen Fälle der linearen Gleichungen heissen **konsistent** (Fall 1 und 3 in Satz 2).

Ist eine Gleichung inkonsistent, ist auch das zugehörige Gleichungssystem inkonsistent. Beachte auch, dass für konsistente Gleichungssysteme (Fall 1 und 3

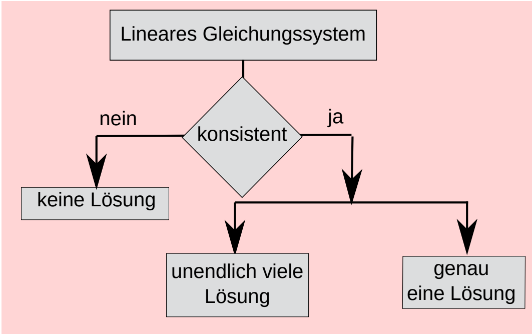



Abbildung 8.1: Mögliche Situationen für die Lösung eines linearen Gleichungssystems. [Papula, Bd. 2 I 5.4]

in Satz 2) wieder zwei Unterscheidungen gemacht werden: Es gibt den Fall mit *einer* Lösung oder mit *unendlich vielen* Lösungen. Deshalb ergibt sich das Schema für linear Gleichungssysteme, wie es in Abb.8.3 gegeben ist. Ob genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen (d.h. freie Variablen) vorliegen, entscheidet man indem das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform bringt und freie Variablen sucht. Gibt es freie Variablen, gibt es unendlich viele Lösungen, sonst gibt es genau eine Lösung.

Um den Schreibaufwand zu verringern, können bei den Umformungen im Gaussverfahren die Unbekannten und die Gleichheitszeichen weggelassen werden. Wir schreiben dann das lineare Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{lllll} a_{11}\cdot x_1 & +a_{12}\cdot x_2 & +\ldots & +a_{1n}\cdot x_n = & b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 & +a_{22}\cdot x_2 & +\ldots & +a_{2n}\cdot x_n = & b_2 \\ & \ldots & & & \\ a_{m1}\cdot x_1 & +a_{m2}\cdot x_2 & +\ldots & +a_{mn}\cdot x_n = & b_m \end{array}\right| .$$

als

**Definition 8.5 Erweiterte Koeffizienten-Matrix**

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] .$$

**Beispiel 8.8 Erweiterte Koeffizienten-Matrix** **958139**

Schreibe das lineare Gleichungssystem als **erweiterte Koeffizienten-Matrix** und löse es mit dem Gauss-Verfahren:

$$\left|\begin{array}{llll} x & +y & +z = & -6 \\ x & +2y & +3z = & -10 \\ 2x & +3y & +6z = & -18 \end{array}\right|$$

**Lösung:**

Die elementaren Zeilen-Operationen werden jetzt auf die Zeilen in der Matrix angewendet:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -10 \\ 2 & 3 & 6 & -18 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & -6 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

Durch Einsetzen erhalten wir $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

## 8.4 Lineare Gleichungsysteme anschaulich

Die drei Fälle bei linearen Gleichungssystemen (inkonsistent, konsistent mit einer Lösung, konsistent mit unendlich vielen Lösungen) lassen sich in drei Dimensionen $\mathbb{R}^3$ veranschaulichen. Damit schlagen wir auch eine Brücke zur Vektorgeometrie. Wir stellen fest, dass die lineare Gleichung $a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot z = b$ einer Ebene in $\mathbb{R}^3$ entspricht. Beim Aufstellen von linearen Gleichungssystemen suchen wir Punkte, die alle Gleichungen erfüllen, d.h. die Schnittmenge der Ebenen. Die folgenden Beispiele erläutern die möglichen Situationen.

### 8.4.1 Ebenen, die nicht durch $\vec{0}$ gehen.

Wir nennen diese Probleme, **inhomogene** lineare Gleichungssysteme.

**Beispiel 8.9 Schnittmengen von Ebenen in $\mathbb{R}^3$** **331889**

Berechne die Schnittmenge der zwei Ebenen

$$\left| \begin{array}{rcr} x + 3y - z & = & -1 \\ 2x + z & = & 2 \end{array} \right| .$$

Benutze die Schreibeweise mit der erweiterten Koeffizienten-Matrix.

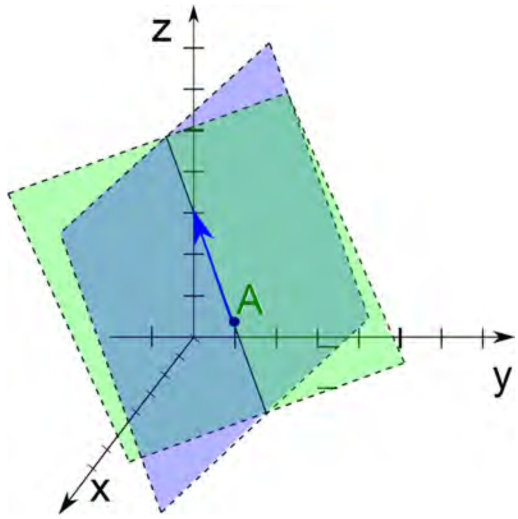
**Lösung:**
Die erweiterte Koeffizienten-Matrix lautet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \text{also} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

$z$ erscheint als freie Variable. Wir setzen $z = \lambda$. Durch Einsetzen von unten nach oben erhalten wir die Lösung

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es handelt sich hier um eine konsistentes lineares Gleichungssystem. Da wir aber weniger Gleichungen als Variablen haben, gibt es eine freie Variable.




**Beispiel 8.10 Ebenen in $\mathbb{R}^3$, eine Lösung** **514280**

Berechne die Schnittmenge der drei Ebenen

$$\left|\begin{array}{rcr} x+3y-z & = & -1 \\ 2y+z & = & 2 \\ x+3y-2z & = & 1 \end{array}\right| .$$

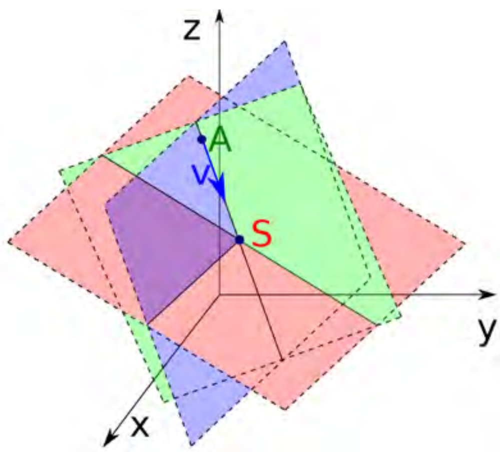
Benutze die Schreibeweise mit der erweiterten Koeffizienten-Matrix.

**Lösung:**

Die erweiterte Koeffizienten-Matrix lautet

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \text{ also } \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \vec{S} := \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Es handelt sich bei $\vec{S}$ um den Schnittpunkt von drei windschiefen Ebenen. Wenn also das lineare Gleichungssystem konsistent ist und genau eine Lösung besitzt, entspricht das dem Schneiden von windschiefen Ebenen. — Oder anders ausgedrückt: Zwei der Ebenen schneiden sich in einer Geraden. Diese Gerade schneidet die dritte Ebene in einem Punkt, wie in der Grafik veranschaulicht. Die Schnittgerade hat einen Aufpunkt $\vec{A}$ und den Richtungsvektor $\vec{v}$ und schneidet die dritte Ebene im Punkt $\vec{S}$.



**Beispiel 8.11 Ebenen in $\mathbb{R}^3$, unendlich viele Lösungen** **928151**

Berechne die Schnittmenge der drei Ebenen

$$\left|\begin{array}{rcr} x+3y-z & = & -1 \\ 2x+z & = & -3 \\ 3x+3y & = & -4 \end{array}\right| .$$

Benutze dafür die Schreibweise als erweiterte Koeffizienten-Matrix.

**Lösung:**

Die erweiterte Koeffizienten-Matrix lautet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 0 & -4 \end{array}\right] \text{ also } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

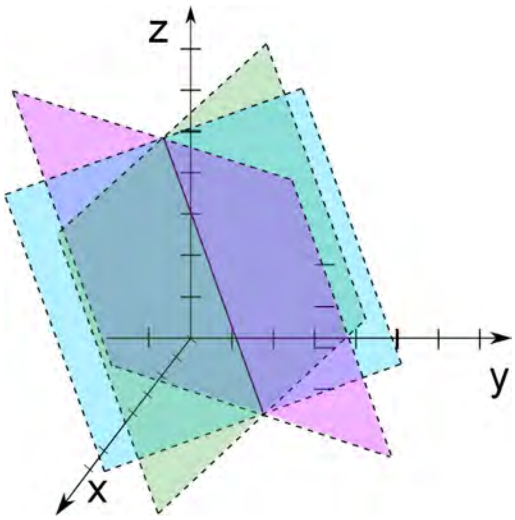
und weiter

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ also } \vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - \frac{\mu}{2} \\ \frac{1}{6} + \frac{\mu}{2} \\ \mu \end{pmatrix}$$

Es handelt sich bei $\vec{u}$ um eine Schnittmenge von zwei Ebenen, also um eine Schnittgerade. Sie liegt zufällig in der dritten Ebene. Dies wird noch besser ersichtlich, wenn wir den Aufpunkt und den Richtungsvektor separat schreiben. Ausserdem strecken wir den Richtungsvektor mit um den Faktor 2, so vermeiden wir Brüche

$$\vec{u} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Der Fall des konsistenten linearen Gleichungssystems mit unendlich vielen Lösungen entspricht also dem Fall, wo die Lösungsmenge ausgedehnt ist und nicht nur aus einem Punkt besteht.




**Beispiel 8.12 Ebenen in $\mathbb{R}^3$, inkonsistentes LGS** **192620**

Berechne die Schnittmenge der drei Ebenen

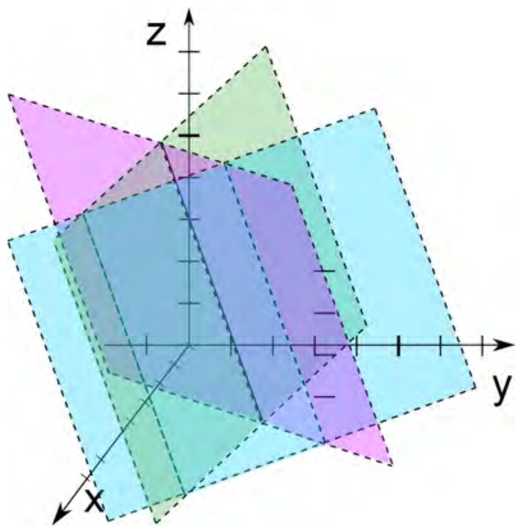
$$\left|\begin{array}{rcr} x+3y-z & = & -1 \\ 2x+z & = & -3 \\ 3x+3y & = & 0 \end{array}\right| .$$

Benutze die Schreibeweise mit der erweiterten Koeffizienten-Matrix.

**Lösung:**
Die erweiterte Koeffizienten-Matrix lautet

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ also } \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & 3 & 3 \end{array}\right] \text{ also } \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

Es handelt sich hier um eine inkonsistentes lineares Gleichungssystem. Geometrisch bedeutet dies, dass zwei Ebenen sich in einer Geraden schneiden, dass aber die dritte Ebene parallel zu dieser Geraden steht. So ergibt sich kein Schnittpunkt.




### 8.4.2 Ebenen, die durch $\vec{0}$ gehen.

Wir nennen diese Probleme **homogene** lineare Gleichungssysteme.

**Beispiel 8.13 Ebenen in $\mathbb{R}^3$** **185060**

Berechne die Schnittmenge der drei Ebenen

$$\left|\begin{array}{lrcr} L_1: & -12y+6z & = & 0 \\ L_2: & 2x+6y-2z & = & 0 \\ L_3: & 4x-12y+8z & = & 0 \end{array}\right| .$$

Benutze dafür die Schreibweise als erweiterte Koeffizienten-Matrix.

**Lösung:**
Es macht keinen Sinn in der Koeffizienten-Matrix die Nullen der Inhomomogenität $\vec{b}=\vec{0}$ mitzunehmen. Bei den Zeilenumformungen werden dort stehts Nullen

stehen. Also schreiben wir die nur die Koeffizienten-Matrix auf:

$$\left|\begin{array}{lccc} L_1' = L_2/2: & 1 & 3 & -1 \\ L_2' = L_3/4: & 1 & -3 & 2 \\ L_2' = L_1/6: & 0 & -2 & 1 \end{array}\right| \text{ also } \left|\begin{array}{lccc} L_1'' = L_1': & 1 & 3 & -1 \\ L_2'' = L_2' - L_1': & 0 & -6 & 3 \\ L_3'' = L_3': 0 & -2 & 1 & \end{array}\right|$$

und weiter

$$\left|\begin{array}{lccc} L_1''' = L_1'': & 1 & 3 & -1 \\ L_2''' = L_2'': & 0 & -6 & 3 \\ L_3''' = 3L_3'' - L_2'': & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Wir erinnern uns daran, dass auf der rechten Seite des Gleichheitszeitchens Nullen stehen. Deshalb haben wir also $x_1$ und $x_2$ als Pivot-Variable und $x_3 = \lambda$ als freie Variable.
Einsetzen ergibt:

$$x_2 = \lambda/2, \;\rightarrow\; x_1 = -\lambda/2$$

Wir strecken den Richtungsvektor um den Faktor 2, so vermeiden wir Brüche

$$\vec{u} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Die Ebenen, die alle den Abstand 0 vom Ursprung haben (ihre Konstante ist 0) schneiden sich im Ursprung, d.h. der Aufpunkt der Schnittgeraden ist $\vec{0}$ und der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

**Infobox 8.3 Die triviale Lösung eines homogenen LGS**

Ein homogenes LGS hat stets die Lösung $\vec{0}$.

Aus der geometrischen Anschauung ist dies klar: Die Konstanten der Ebenen sind 0, d.h. alle Ebenen gehen durch den Ursprung und schneiden sich da also. In den Anwendungen interessiert uns aber diese Lösung oft nicht.

**Beispiel 8.14 Ebenen in $\mathbb{R}^3$** **807042**

Berechne die Schnittmenge der drei Ebenen

$$\left|\begin{array}{lrcl} L_1: & -2y + 4z & = & 0 \\ L_2: & 4x + 16y + 21z & = & 0 \\ L_3: & 2x + 10y + 6z & = & 0 \end{array}\right| .$$

Benutze dafür die Schreibweise als erweiterte Koeffizienten-Matrix.

**Lösung:**
Es macht keinen Sinn in der Koeffizienten-Matrix die Nullen der Inhomomogenität $\vec{b} = \vec{0}$ mitzunehmen. Bei den Zeilenumformungen werden dort stehts Nullen stehen. Also schreiben wir die nur die Koeffizienten-Matrix auf:

$$\left|\begin{array}{lccc} L_1' = L_3/2: & 1 & 5 & 3 \\ L_2' = L_2: & 4 & 16 & 21 \\ L_2' = L_1/2: & 0 & -1 & 2 \end{array}\right| \text{ also } \left|\begin{array}{lccc} L_1'' = L_1': & 1 & 3 & -1 \\ L_2'' = L_2' - 4L_1': & 0 & -4 & 9 \\ L_3'' = L_3': 0 & -1 & 2 & \end{array}\right|$$

und weiter

$$\left|\begin{array}{lrrr} L_1''' = L_1'' : & 1 & 5 & 3 \\ L_2''' = L_2'' : & 0 & -4 & 9 \\ L_3''' = 4L_3'' - L_2'' : & 0 & 0 & -1 \end{array}\right|$$

Die unterste Gleichung $-x_3 = 0$ führt auf $\vec{u} = \vec{0}$, d.h. ohne Spezielle Lage schneiden sich die Ebenen, die durch den Ursprung gehen nur im Ursprung.

Abgesehen von der trivialen Lösung gilt:

**Infobox 8.4 Lösungsmenge eines homogenen LGS**

Ein homogenes LGS hat nur dann weitere Lösungen, falls die Ebenen eine spezielle Lage haben.
In diesen Fällen sind die Normalenvektoren der Ebenen linear abhängig.

# KAPITEL 9

# Matrixalgebra

Im vorherigen Kapitel haben wir die erweiterte Koeffizienten-Matrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

kennen gelernt. Wir haben schon festgestellt, dass die Darstellung von linearen Gleichungssystemen in dieser Form praktisch ist, weil sie uns viel Schreibarbeit erspart und anderseits, weil sie übersichtlich ist und damit Fehler bei den Umformungen verhindert. Deshalb werden wir erforschen welche weiteren Probleme wir mit Hilfe von Matrizen lösen können.
Um das Wichtigste vorwegzunehmen: Wir werden finden, dass alle Fragestellungen, die lineare Gleichungssysteme beinhalten mit Matrizen geschrieben werden sollen. Und wir werden viele Fragestellungen so formulieren, dass wir darin lineare Gleichungssysteme erkennen.

**Definition 9.1 Matrix**

Eine Matrix ist ein rechteckige Tabelle mit Zahlen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Die **Zeilen** der Matrix sind die $m$ horrizontalen Listen

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \ (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \ \dots, \ (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

und die **Spalten** sind die $n$ vertikalen Listen

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Oft werden wir die Matrix einfach mit einem Grossbuchstaben[1] schreiben $\mathbf{A} = [a_{ij}]$. Die Elemente $a_{ij}$ stehen in der $i$-ten Zeile und in der $j$-ten Spalte.
Eine Matrix mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten nennen wir eine $m$ mal $n$ Matrix und schreiben dafür entweder $m \times n$ oder $\mathbb{R}^{m \times n}$ um noch anzugeben, aus welchem Zahlenbereich die Einträge gewählt werden (hier aus der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$).

**Definition 9.2 Spaltenvektor und Zeilenvektor**

Eine Matrix mit einer Spalte nennen wir **Spaltenvektor**, eine Matrix mit einer Zeile nennen wir **Zeilenvektor**. Für die $m$ mal $n$ Matrix $\mathbf{A}$ schreiben wir die Spaltenvektoren auch als

$$\mathbf{A} = \left[\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n\right]$$

und die Zeilenvektoren

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1; \mathbf{A}_2; \ldots; \mathbf{A}_n] \ .$$

Da wir für Zeilen verwenden wir meistens $\mathbf{A}_i$ und für Spalten $\vec{A}_i$.

Eine Matrix mit lauter Nullen nennen wir **Nullmatrix** und notieren dafür $\mathbf{0}$.

**Beispiel 9.1 Zeilen und Spalten** **600133**

Bestimme die Zeilen und Spalten der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

**Lösung:**

Die Zeilen sind

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Die Spalten sind

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Es gibt zwei Zeilen und drei Spalten, also ist dies eine $2 \times 3$ Matrix.

## 9.1 Addition und skalare Multiplikation von Matrizen

Matrizen können addiert werden und mit einer Zahl multipliziert werden.

**Beispiel 9.2 Zeilen und Spalten** **333379**

Bestimmen für die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

die folgenden Matrizen

$$\mathbf{A} + \mathbf{B},\ 3\mathbf{A} \text{ und } 3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$$

**Lösung:**

[1] in Fettschrift

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}+\mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 1+4 & -2+6 & 3+8 \\ 0+1 & 4+(-3) & 5+(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 11 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\
3\cdot\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot(-2) & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 4 & 3\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 12 & 15 \end{pmatrix} \\
3\mathbf{A}-2\mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 12 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & -12 & -16 \\ -2 & +6 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -18 & -7 \\ -2 & 18 & 29 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Beachte, dass wir für $3\mathbf{A}-2\mathbf{B}$ am einfachsten $3\mathbf{A}+(-2)\cdot\mathbf{B}$ berechnen und dann die Addition durchführen.

**Definition 9.3 Addition und skalare Multiplikation von Matrizen**

Matrizen werden addiert indem alle Einträge addiert werden:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}+\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ & \dots & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Eine Matrix wird mit einer Zahl multipliziert indem alle Einträge mit dieser Zahl multipliziert werden:

$$
\lambda\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda\cdot a_{11} & \lambda\cdot a_{12} & \dots & \lambda\cdot a_{1n} \\ \lambda\cdot a_{21} & \lambda\cdot a_{22} & \dots & \lambda\cdot a_{2n} \\ & \dots & & \\ \lambda\cdot a_{m1} & \lambda\cdot a_{m2} & \dots & \lambda\cdot a_{mn} \end{bmatrix}
$$

So kann auch die negative Matrix $-\mathbf{A}$ definiert werden. Wir brauchen sie um zu erklären, was die Subtraktion von Matrizen ist, denn bisher haben wir nur die Addition besprochen:

$$
-\mathbf{A} = (-1)\cdot\mathbf{A} \;\Rightarrow \mathbf{A}-\mathbf{B} = \mathbf{A}+(-\mathbf{B})\,.
$$

Die Subtraktion ist also die Addition der negativen Matrix, so wie wir das auch bei den Vektoren definiert haben.

**Satz 9.1 Addition und skalare Multiplikation von Matrizen**

Für die $m \times n$-Matrizen gelten folgende Gesetzte:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} &= \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \\
\mathbf{A}+\mathbf{0} &= \mathbf{0}+\mathbf{A}=\mathbf{A} \\
\mathbf{A}+(-\mathbf{A}) &= (-\mathbf{A})+\mathbf{A}=\mathbf{0} \\
\mathbf{A}+\mathbf{B} &= \mathbf{B}+\mathbf{A} \\
\lambda\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \lambda\cdot\mathbf{A}+\lambda\cdot\mathbf{B} \\
(\lambda+\mu)\cdot\mathbf{A} &= \lambda\cdot\mathbf{A}+\mu\cdot\mathbf{A} \\
(\lambda\cdot\mu)\cdot\mathbf{A} &= \lambda\cdot(\mu\cdot\mathbf{A}) \\
1\cdot\mathbf{A} &= \mathbf{A}
\end{aligned}$$

dabei ist **0** ist Nullmatrix.
In Worten: Die erste Zeile bedeutet, dass die Matrix-Addition assoziativ ist, die vierte, dass die Matrix-Addition kommutativ ist und die fünfte, dass die Multiplikation mit einem Skalar distributiv ist.

### 9.1.1 Das Summenzeichen

**Beispiel 9.3 Summenzeichen** **370849**

Schreibe mit dem Summenzeichen und summiere

1. $2+4+6+8$
2. $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$
3. $1+2+3+4+5+6+7+8+\ldots+99+100$
4. $3\cdot1+3\cdot2+3\cdot3+3\cdot4+3\cdot5+3\cdot6+3\cdot7+3\cdot8+3\cdot9+3\cdot10$

**Lösung:**

1. Wir schreiben $\sum_{i=2}^{4} 2i$ und berechnen den Wert zu $20$.
2. Wir schreiben $\sum_{i=1}^{10} i$. Den Wert berechnet sich am Einfachsten, wenn wir jeweils zwei Werte addieren

$$(1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6)=\sum_{i=1}^{5} i+(11-i)=\sum_{i=1}^{5} 11=5\cdot11=55$$

3. Wir schreiben $\sum_{i=1}^{100} i$. Wieder berechnen wir den Wert durch Gruppierung:

$$\begin{aligned}
&(1+100)+(2+99)+(3+98)+(4+97)+\ldots \\
=\ &\sum_{i=1}^{50} i+(101-i)=\sum_{i=1}^{50} 101=50\cdot101=5050
\end{aligned}$$

4. Wir schreiben $\sum_{i=1}^{10} 3 \cdot i$. Den Wert berechnet sich am Einfachsten, wenn wir den gemeinsamen Faktor herausnehmen:

$$\begin{aligned} & 3 \cdot \big[(1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6)\big] \\ = \; & 3 \cdot \sum_{i=1}^{5} i + (11-i) = 3 \cdot \sum_{i=1}^{5} 11 = 3 \cdot 5 \cdot 11 = 165 \end{aligned}$$

Übrigens die griechischen Schriftzeichen für s und S sind $\sigma$ und $\Sigma$. Das $\Sigma$ wird wegen dem Anfangsbuchstaben für die **S**umme benutzt. Und das Integralzeichen $\int$ ist ein langezogenes $S$, das ebenfalls für Summe steht.

**Infobox 9.1 Regeln für das Summenzeichen**

Die Summe ist assoziativ

$$\sum_i \lambda \cdot a_i = \lambda \cdot \sum_i a_i$$

d.h. gemeinsame Faktoren können ausgeklammert werden. Es gilt aber auch

$$\sum_i a_i + b_i = \sum_i a_i + \sum_i b_i$$

Schliesslich ergibt die Summe über 1 n

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n \text{ deshalb } \sum_{i=1}^{n} \lambda = \lambda \cdot n \,.$$

## 9.2 Matrix Multiplikation

Die Multiplikation für Matrizen ist etwas schwieriger als die Addition. Wir definieren zuerst die Multiplikation einer Zeile mit einer Spalte

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \odot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 +, \ldots, + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

Achtung, diese Multiplikation funktioniert nur, wenn Zeile und Spalte gleich viele Einträge haben!

**Beispiel 9.4 Multiplikation Zeilen und Spalten** **362627**

Berechne die Produkte

$$\begin{pmatrix}7, & -4, & 5\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}6, & -1, & 8, & 3\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}4\\-9\\-2\\5\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}7, & -4, & 5\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}4\\-9\\-2\\5\end{pmatrix} =$$

**Lösung:**

$$\begin{pmatrix}7, & -4, & 5\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} = 7 \cdot 3 + (-4) \cdot 2 + 5 \cdot (-1) = 21 - 8 - 5 = 8$$

$$\begin{pmatrix}6, & -1, & 8, & 3\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}4\\-9\\-2\\5\end{pmatrix} = 24 + 9 - 16 + 15 = 32$$

nicht definiert

**Definition 9.4 Matrix-Multiplikation**

Aus der Multiplikation der Matrizen $\mathbf{A} = [a_{ik}]$ und $\mathbf{B} = [b_{kj}]$ ergibt sich eine Matrix $\mathbf{C} = [c_{ij}]$. Die Elemente der Matrix $\mathbf{C}$ berechnen sich aus der $i$-ten Zeile von $\mathbf{A}$ und der $j$-ten Spalte von $\mathbf{B}$ über

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots + a_{ip} \cdot b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Wir schreiben auch

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

Die Multiplikation ist nur definiert für Matrizen mit den Dimensionen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times m}$, d.h. die Anzahl Spalten von $\mathbf{A}$ muss gleich der Anzahl Zeilen von $\mathbf{B}$ sein.

Meistens wird das Multiplikationszeichen '$\odot$' weggelassen und wir schreiben einfach $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$.

**Beispiel 9.5 Matrixmultiplikation** **758383**

Berechne das Produkt

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & -1\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}2 & 0 & -4\\5 & -2 & 6\end{pmatrix} =$$

**Lösung:**

Die Zeilen der Matrix $\mathbf{A}$ sind

$$\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & -1\end{pmatrix}$$

und die Spalten der Matrix $\mathbf{B}$ sind

$$\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich Elemente von $\mathbf{C}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\odot\mathbf{B} &= \begin{bmatrix}(1\,3)\odot\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} & (1\,3)\odot\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} & (1\,3)\odot\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}\\ (2\,-1)\odot\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} & (2\,-1)\odot\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} & (2\,-1)\odot\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}17 & -6 & 14\\ -1 & 2 & -14\end{bmatrix}\end{aligned}$$

**Infobox 9.2 Dimension der Produktematrix**

Die Produktmatrix $\mathbf{C}$ von $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times p}$ und $\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{p\times m}$

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB}$$

hat die Dimensionen $n\times m$ oder $\mathbf{C}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ D.h. das Produkt $\mathbf{C}$ hat so viele Zeilen wie $\mathbf{A}$ und so viele Spalten wie $\mathbf{B}$.

**Satz 9.2 Gesetze für die Matrixmultiplikation**

Für die Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\odot\mathbf{B})\odot\mathbf{C} &= \mathbf{A}\odot(\mathbf{B}\odot\mathbf{C})\\ \mathbf{A}\odot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) &= \mathbf{A}\odot\mathbf{B}+\mathbf{A}\odot\mathbf{C}\\ (\mathbf{A}+\mathbf{B})\odot\mathbf{C} &= \mathbf{A}\odot\mathbf{C}+\mathbf{B}\odot\mathbf{C}\\ \lambda\cdot(\mathbf{B}\odot\mathbf{A}) &= (\lambda\cdot\mathbf{B})\odot\mathbf{A}=\mathbf{B}\odot(\lambda\cdot\mathbf{A})\end{aligned}$$

Dies gilt solange die Summen und Produkte der Matrizen definiert sind.

Aber Achtung, die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ: $\mathbf{A}\odot\mathbf{B}\neq\mathbf{B}\odot\mathbf{A}$! Es gilt nur in Ausnahmefällen, dass die Matrizen miteinander kommutieren.

**Definition 9.5 Transponierte Matrix**

Die Transponierte der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ist

$$\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ & \dots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Die Elemente der transponierten Matrix $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ sind

$$(a^\mathsf{T})_{ij} = a_{ji} \ ,$$

d.h. die Indices werden vertauscht.

**Beispiel 9.6 Transponierte** **758383**

Bestimme die Transponierte der folgenden Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

**Lösung:**

$$\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

**Definition 9.6 Quadratische Matrizen**

Eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ hat gleich viele Spalten wie Zeilen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

**Definition 9.7 Diagonalmatrix**

Eine quadratische Matrix heisst Diagonalmatrix, falls alle Elemente ausserhalb der Diagonalen gleich 0 sind

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Wir schreiben auch $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$, wobei $a_{ii}$, die Diagonalelemente sind.

**Definition 9.8 Einheitsmatrix**

Eine Diagonalmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

heisst Einheitsmatrix.

**Definition 9.9 Symmetrisch und antisymmetrische Matrizen**

Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heiss **symmetrisch**, falls

$$\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$$

oder **antisymmetrisch** falls

$$\mathbf{A}^\mathsf{T} = -\mathbf{A}$$

**Beispiel 9.7 Symmetrische/Antisymmetrische Matrizen** **340726**

Bestimme im Vorigen Beispiel die symmetrischen und die antisymmetrischen Matrizen. **Lösung:**

$\mathbf{C}$ ist symmetrisch, denn es gilt

$$\mathbf{C}^\mathsf{T} = \mathbf{C} \, .$$

$\mathbf{B}$ ist antisymmetrisch, denn es gilt

$$\mathbf{B}^\mathsf{T} = -\mathbf{B} \, .$$

**Satz 9.3 Gesetze für die Transponierte**

- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T} + \mathbf{B}^\mathsf{T}$
- $(\mathbf{A}\mathbf{B})^\mathsf{T} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}$
- $(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathbf{A}$

KAPITEL 10

# Lineare Abbildungen

**Definition 10.1 Lineare Abbildung**

Eine Abbildung $L : V \to W, \vec{v} \mapsto L(\vec{v})$ heisst **linear** genau dann, wenn für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$ und $\lambda$ gilt:

- **Homogenität**: $L(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot L(\vec{v})$
- **Additivität**: $L(\vec{v} + \vec{w}) = L(\vec{v}) + L(\vec{w})$

Dabei sind sind $V$ und $W$ Vektorräume, z.B $\mathbf{R}^n$ und $\mathbf{R}^m$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist ein Skalar.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.454]

**Beispiel 10.1 Ist die Matrixmultiplikation eine lineare Abbildung? 591417**

In diesem Beispiel betrachten wir die Abbildung

$$L(\vec{v}) := \mathbf{M} \odot \vec{a} =: \vec{b}$$

mit der Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Durch die Multiplikation der Matrix mit einem Vektor haben wir also eine Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, denn $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$. Untersuchen Sie, ob diese Abbildung linear ist, d.h. ob gilt

$$\begin{aligned} L(\lambda \cdot \vec{v}) &= \lambda \cdot L(\vec{v}) \\ L(\vec{v} + \vec{w}) &= L(\vec{v}) + L(\vec{w}) \end{aligned}$$

also

$$\mathbf{M} \odot (\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot (\mathbf{M} \odot \vec{v}) .$$

und

$$\mathbf{M} \odot (\vec{v} + \vec{w}) = \mathbf{M} \odot \vec{v} + \mathbf{M} \odot \vec{w}$$

Betrachten Sie in diesem Beispiel vorläufig nur die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \lambda = 3$$

**Lösung:**

Wir berechnen die vier Vektoren auf jeder Seite der Gleichungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \odot (3 \cdot \vec{v}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix} \\
3 \cdot (\mathbf{M} \odot \vec{v}) &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \end{pmatrix} \\
\mathbf{M} \odot (\vec{v} + \vec{w}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{M} \odot \vec{v} + \mathbf{M} \odot \vec{w} &= \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Wir finden also, dass in diesem Beispiel gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} \odot (\lambda \cdot \vec{v}) &= \lambda \cdot (\mathbf{M} \odot \vec{v}) \\
\mathbf{M} \odot (\vec{v} + \vec{w}) &= \mathbf{M} \odot \vec{v} + \mathbf{M} \odot \vec{w}
\end{aligned}$$

Wir vermuten deshalb, dass dies wahrscheinlich für alle Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gilt.

Die lineare Abbildung in der obigen Definition ist ein ziemlich abstraktes Objekt. Wir werden später sehen, dass es viele Beispiele gibt für lineare Abbildungen — manchmal bei Themen, wo wir es nicht vermutet hätten. Der nachfolgende Satz besagt, dass die Matrix-Multiplikation ein Beispiel für eine lineare Abbildung ist.

**Satz 10.1 Matrix-Vektor-Multiplikation als lineare Abbildung**

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten. Die Abbildung

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

mit $L(\vec{v}) := \mathbf{A} \odot \vec{v}$ **ist linear.**

[Goebbels and Ritter, 2011, p.456]

Wir hätten die Abbildung auch mit dem Ausdruck

$$\vec{v} \mapsto L(\vec{v}) := \mathbf{A} \odot \vec{v}$$

definieren können. Wie bei allen Abbildungen nennen wir $L(\vec{v})$ das Bild von $\vec{v}$.

**Beispiel 10.2 Welche der Abbildungen sind linear?** **0257223**

Bestimme jeweils, ob die Abbildung homogen und additiv ist.

1. $L(\vec{v}) = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ und $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$
2. $L(\vec{v}) = v_1$ und $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$
3. $L(\vec{v}) = (v_1)^2$ und $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$
4. $L(\vec{v}) = v_1 + 1$ und $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$
5. $L(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 3v_1 - 4v_2 \\ v_1 + 5v_2 \end{pmatrix}$ und $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$

**Lösung:**

1. homogen und additiv ⇒ linear
2. homogen und additiv ⇒ linear
3. nicht homogen und nicht additiv ⇒ nicht linear
4. nicht homogen und nicht additiv ⇒ nicht linear
5. homogen und additiv ⇒ linear

**Beispiel 10.3 Überprüfe, ob die Abbildung $L$ linear ist.** **410717**

$$L(\vec{v}) = \frac{1}{101}\begin{pmatrix} v_1 - 10v_2 \\ -10v_1 + 100v_2 \end{pmatrix}$$

und $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Bestimme danach die Matrix M, für die gilt

$$L(\vec{v}) = \mathbf{M} \odot \vec{v}\,.$$

**Lösung:**

**Homogenität:**

$$L(\lambda \cdot \vec{v}) = \frac{1}{101}\begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 - 10\lambda \cdot v_2 \\ -10\lambda \cdot v_1 + 100\lambda \cdot v_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \frac{1}{101}\begin{pmatrix} v_1 - 10v_2 \\ -10v_1 + 100v_2 \end{pmatrix}$$

Die Homogenität ist also erfüllt.
**Additivität:**

$$\begin{aligned} L(\vec{v} + \vec{w}) &= \frac{1}{101}\begin{pmatrix} (v_1 + w_1) - 10(v_2 + w_2) \\ -10(v_1 + w_1) + 100(v_2 + w_2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{101}\left\{\begin{pmatrix} v_1 - 10v_2 \\ -10v_1 + 100v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 - 10w_2 \\ -10w_1 + 100w_2 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Die zugehörige Matrix lässt sich mit den Bildern der Basisvektoren bestimmen.

$$L(\vec{e}_1) = L(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \frac{1}{101}\begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$L(\vec{e}_2) = L(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \frac{1}{101}\begin{pmatrix} -10 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Die Matrix der Abbildung $L$ ist also

$$\mathbf{A} = \left(\tfrac{1}{101}\begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{101}\begin{pmatrix} -10 \\ 100 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{101}\begin{pmatrix} 1 & -10 \\ -10 & 100 \end{pmatrix}$$

## 10.1 Darstellung als Matrix

**Satz 10.2 Darstellung einer linearen Abbildung als Matrix**

Zu jeder linearen Abbildung
$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
gibt es genau eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, so dass
$$L(\vec{x}) = \mathbf{A} \odot \vec{x}\,.$$

[Goebbels and Ritter, 2011, p.457]
Der Satz bedeutet, dass es zu jeder linearen Abbildung eine Matrix gibt, die erlaubt das Bild zu berechnen mit Hilfe der Matrix **A** und der Matrixmultiplikation
$$L(\vec{x}) = \mathbf{A} \odot \vec{x}\,.$$

**Infobox 10.1 Matrix der Darstellung**

Zur linearen Abbildung $L$ und der Basis $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots$ gehört die Matrix
$$\mathbf{A} = [L(\vec{e}_1),\ L(\vec{e}_2),\ \ldots]\ .$$
Sie enthält also in den Spalten die Bilder der Basisvektoren.

**Beispiel 10.4 Bestimme die Matrix der Projektion auf die Gerade $g : y = -10x$. 051137**

**Lösung:**
Die Gerade lautet in Parameterform
$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix}$$
Wir bestimmen dazu die Bilder der Basisvektoren $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Für die Projektion brauchen wir den normierten Richtungsvektor der Geraden $g$
$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{101}} \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix}\ .$$
Wir führen die Projektionen durch
$$P(\vec{e}_1) = (\vec{e}_1 \odot \vec{n})\,\vec{n} = 1 \cdot \vec{n} = \vec{n} = \frac{1}{101} \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix}$$
und
$$P(\vec{e}_2) = (\vec{e}_2 \odot \vec{n})\,\vec{n} = -10 \cdot \vec{n} = \frac{1}{101} \begin{pmatrix} -10 \\ 100 \end{pmatrix}$$
Die Matrix der Projektion ist also
$$\mathbf{P} = \left[\tfrac{1}{101}\begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{101}\begin{pmatrix} -10 \\ 100 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{101}\begin{bmatrix} 1 & -10 \\ -10 & 100 \end{bmatrix}$$

## 10.2 Eigenschaften linearer Abbildungen

Wir können den nachfolgenden Satz benutzen, um lineare Abbildungen schnell zu erkennen.

**Satz 10.3 Eigenschaften linearer Abbildungen**

Gegeben sei eine lineare Abbildung $L : V \to W$, die Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

1. Der Nullvektor $\vec{0}$ in $V$ wird auf den Nullvektor $\vec{0}$ in $W$ abgebildet:

$$L\left(\vec{0}\right) = \vec{0}\,.$$

   Es kann aber weitere Vektoren $\vec{x} \neq 0$ mit $L\left(\vec{x}\right) = \vec{0}$ geben.

2. Das Bild einer Linearkombination von Vektoren ist gleich der Linearkombination der Bildvektoren, oder

$$L(\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2) = \lambda_1 \cdot L(\vec{x}_1) + \lambda_2 \cdot L(\vec{x}_2)$$

[Goebbels and Ritter, 2011, p.454]
Finden wir aber $L(\vec{0}) \neq \vec{0}$, dann ist die Abbildung sicher nicht linear.

**Beispiel 10.5 Bestimme die Matrix der Abbildung, falls sie linear ist. 155513**

1. $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definiert durch $L(x, y) = (x + y, x)$
2. $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch $L(x, y) = 1$
3. $D : \mathbb{P}(n) \mapsto \mathbb{P}(n)$ definiert durch $D(p(x)) = \frac{d}{dx}p(x)$. $\mathbb{P}$ sind alle Polynome von Grad $n$

**Lösung:**

1. homogen und additiv (linear), $\text{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. nicht linear, denn $L(0, 0) = 1$.
3. Homogenität:

$$D\big(\lambda \cdot p(x)\big) = \frac{d}{dx}\lambda \cdot p(x) = \lambda \cdot \frac{d}{dx}p(x) = \lambda \cdot D\big(p(x)\big)$$

   Additivität:

$$D\big(p(x) + q(x)\big) = \frac{d}{dx}\big(p(x) + q(x)\big) = \frac{d}{dx}p(x) + \frac{d}{dx}q(x) = D\big(p(x)\big) + D\big(q(x)\big)$$

   Die Abbildung erfüllt beide Kriterien, also ist sie linear. Wir bestimmen die Matrix für $\mathbb{P}(2)$, d.h. alle Polynome bis zweiten Grades. Eine mögliche Basis ist $\vec{e}_1 = 1, \vec{e}_2 = x, \vec{e}_3 = x^2$. In dieser Basis ist

$$\begin{aligned} D(\vec{e}_1) &= \frac{d}{dx} 1 = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ D(\vec{e}_2) &= \frac{d}{dx} x = 1 = 1 \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ D(\vec{e}_3) &= \frac{d}{dx} x^2 = 2x = 2 \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese Bilder schreiben wir in die Spalten der Matrix $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 10.3 Summe, Vielfaches und Verkettung von linearen Abbildungen

**Satz 10.4 Summe und skalares Vielfaches von linearen Abbildungen**

Seien $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x}$ lineare Abbildungen mit zugehörigen $(m \times n)$-Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.

1. Die Summe $L + S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \vec{x} \mapsto L(\vec{x}) + S(\vec{x})$ ist eine lineare Abbildung, und die zugehörige $(m \times n)$-Matrix lautet $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.
2. Mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das skalare Vielfache von $\lambda \cdot L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \vec{x} \mapsto \lambda \cdot L(\vec{x})$ eine lineare Abbildung mit zugehöriger $(m \times n)$-Matrix $\lambda \cdot \mathbf{A}$.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.459]

**Beispiel 10.6 Verkettung linearer Abbildungen** **370598**

- Konstruieren Sie das Dreieck $ABC$
- Spiegeln Sie es an der $x$-Achse $A'B'C'$.
- Strecken Sie dann das Bild um den Faktor 2 in $x$-Richtung.
- Berechnen Sie das Bild von $ABC$ unter der Abbildung $\mathbf{S} \odot \mathbf{M}$

$$\vec{A''} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B''} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{C''} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

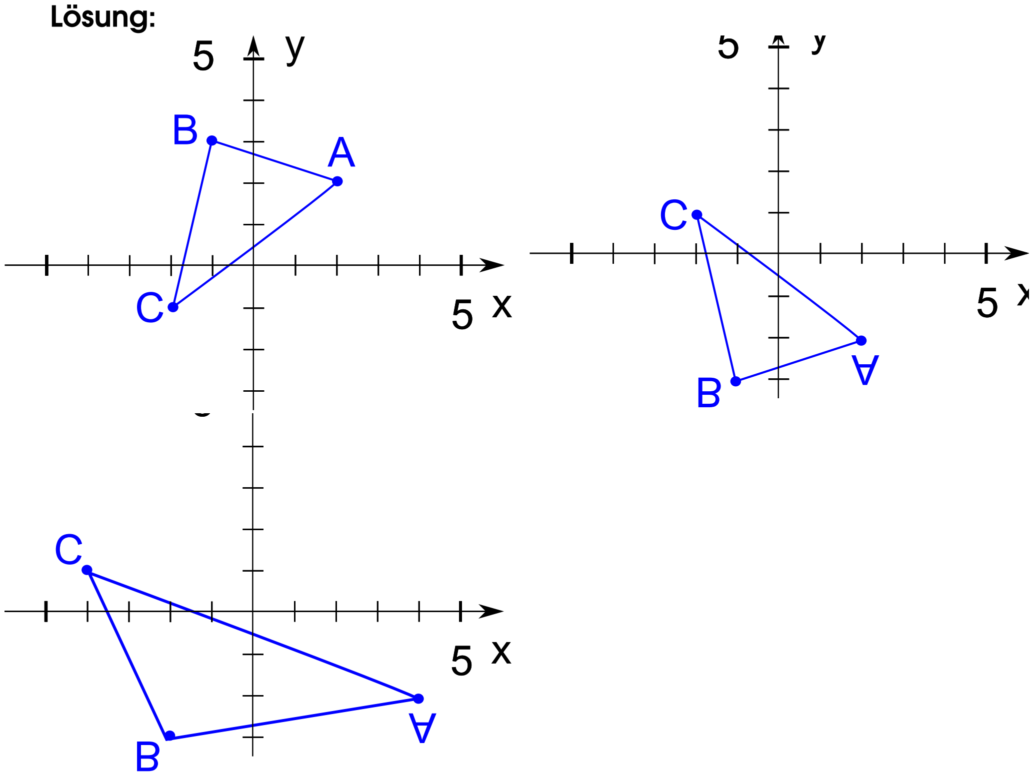
**Transformationen:** Spiegelung $x$-Achse: $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Streckung um Faktor 2 in $x$-Richtung: $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Punkte:**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:




**Infobox 10.2 Ausführen von Transformationtionen nacheinander**

Das Ausführen von Transformationtionen nacheinander entspricht dem **Multiplizieren von Matrizen**.
Die Abbildung S $\odot$ M bedeutet, **zuerst** M und dann S.

**Satz 10.5 Verkettung linearer Abbildungen**

Seien $L : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$ mit zugehöriger $(n \times l)$-Matrix $\mathbf{A}$ und $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ebenfalls linear mit $(m \times n)$-Matrizen $\mathbf{B}$. Dann ist die Verkettung oder Verschachtelung $S \circ L : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x} \mapsto S\left(L\left(\vec{x}\right)\right)$, eine lineare Abbildung, und die zugehörige $(m \times l)$-Matrix lautet $\mathbf{C} = \mathbf{B} \odot \mathbf{A}$.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.459]

**Infobox 10.3 Verkettung von Abbildungen**

$S \circ L$ bedeutet: zuerst $L$ ausführen, dann $S$
$S \circ L$ heisst auch **Verschachtelung**

**Beispiel 10.7 Verkettung linearer Abbildungen** 844538

Zeichen Sie, dass die Operatoren $L(p(x)) = x \cdot p(x)$ und $D(p(x)) = \frac{d}{dx}p(x) = p(x)'$ linear sind.
Zeigen Sie anhand des Polynoms $p(x) = 4 + 3x + 2x^2 + x^3$, dass

$$L\left(D(p(x))\right) = D\left(L(p(x))\right)$$

nicht gilt.

**Lösung:**

Linearität der Operatoren:

$$\begin{aligned} L(\lambda \cdot p(x)) &= x \cdot \lambda \cdot p(x) = \lambda \cdot L(\lambda \cdot p(x)) \\ L(p(x)+q(x)) &= x \cdot \big(p(x)+q(x)\big) = x \cdot p(x) + x \cdot q(x) = L(p(x)) + L(q(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\lambda \cdot p(x)) &= \frac{d}{dx}\lambda \cdot p(x) = \lambda \cdot \frac{d}{dx}p(x) = \lambda \cdot D(\lambda \cdot p(x)) \\ D(p(x)+q(x)) &= \frac{d}{dx}\big(p(x)+q(x)\big) = \frac{d}{dx}p(x) + \frac{d}{dx}q(x) = D(p(x)) + L(q(x)) \end{aligned}$$

Vertauschbarkeit:

$$L\big(D(p(x))\big) = 3x + 4x^2 + 3x^3$$
$$D\big(L(p(x))\big) = 4 + 6x + 6x^2 + 4x^3$$

Die Ausdrücke sind verschieden also gilt

$$L\left(D(p(x))\right) \neq D\left(L(p(x))\right)$$

# KAPITEL 11

# Matlab

## 11.1 Grundoperationen

**Infobox 11.1 Grundoperationen und Konstanten $\pi$, $e$**

| | |
|---|---|
| `+` | Plus |
| `-` | Minus |
| `*` | Skalare-Multiplikation und Matrix-Multiplikation |
| `/` | Skalare-Division (und Matrix-Division) |
| `^` | Skalare-Potenz (und Matrix-Potenz) |
| `sqrt(x)` | Quadratwurzel $\sqrt{x}$ |
| `.*` | Multiplikation elementweise |
| `./` | Division elementweise |
| `.^` | Potenz elementweise |
| `pi` | $\pi$ |
| `exp(1)` | Eulersche Konstante $e$ |

**Infobox 11.2 Betrag, Logarithmen und trigonometrische Funktionen**

| | |
|---|---|
| `abs(x)` | Betrag einer Zahl $\lvert x \rvert$ |
| `sign(x)` | Vorzeichen einer Zahl $\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ |
| `log(x)` | Logarithmus zur Basis $e$ |
| `log10(x)` | Logarithmus zur Basis $10$ |

Trigonometrische Funktionen mit Bogenmass

| | |
|---|---|
| `cos(x)` | Cosinus, $x$ ist z.B. `pi/2` |
| `sin(x)` | Sinus |
| `tan(x)` | Tangens |
| `acos(x)` | Arkuscosinus = $\cos^{-1}(x)$ |
| `asin(x)` | Arkussinus = $\sin^{-1}(x)$ |
| `atan(x)` | Arkustangens = $\tan^{-1}(x)$ |

Trigonometrische Funktionen mit Winkelmass

| | |
|---|---|
| `cosd(x)` | Cosinus, $x$ ist z.B. 90 Grad |
| `sind(x)` | Sinus |
| `tand(x)` | Tangens |

## 11.2 Vektoren & Matrizen

Matlab wurde ursprüglich für die Matrizen-Rechnung entworfen. Deshalb ist vieles für die Matrizen-Rechnung optimiert und ausgelegt. Die Eingabe einer Matrix erfolgt Zeile für Zeile getrennt durch ein Semikolon `;`. Die Elemente einer Matrix können durch Kommas `,` oder durch Leerzeichen getrennt werden:

```
A=[1,3,5;1,0,2;-1,7,1]
B=[ -1 1 -1; 1 -1 1; 1 1 -1]
```

**Infobox 11.3 Grundoperationen für Vektoren**

| | |
|---|---|
| `x*y` | Skalarprodukt der Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ |
| `norm(x)` | Länge des Vektors $\vec{x}$ |
| `cross(x,y)` | Vektorprodukt der Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ |
| `size(x)` | Dimension (=Anzahl der Einträge) des Vektors $\vec{x}$ |

**Infobox 11.4 Spezielle Matrizen**

| | |
|---|---|
| `eye(3)` | Einheitsmatrix, Matrix mit lauter Einsen |
| `ones(3,1)` | Matrix mit lauter Einsen, 3 Zeilen, 1 Spalte |
| `ones(1,3)*0` | Nullmatrix, 1 Zeile, 3 Spalten |
| `diag([10 9])` | Diagonalmatrix mit den Elementen $10$ und $9$ auf der Diagonalen |

Wir können auf einzelne Elemente einer Matrix zugreifen über, z.B. auf das dritte Element aus der ersten Zeile von `A`:

```
A(1,3)
```

Wir können Einträge einzeln überschreiben:

```
A(1,3)=8
```

Wir können auf ganze Spalten mit dem Doppelpunkt `:` an erster Stellezugreifen, z.B. auf die zweite Spalte

```
A(:,2)
ans =3
     0
     7
```

oder auch auf Zeilen mit dem Doppelpunkt `:` an zweiter Stelle, z.B hier auf die erste Zeile

```
A(1,:)
ans = 1 3 6
```

**Infobox 11.5 Matrix Funktionen**

| | |
|---|---|
| `transpose(A)` | Matrix transponieren |
| `A'` | Matrix komplex konjugieren[a]. |
| `inv(A)` | inverse Matrix |
| `det(A)` | die Determinante einer Matrix |
| `rref(A)` | Bringt Matrix in 'Zeilenstufenform'[b]. |
| `rank(A)` | Rang der Matrix `A` |
| `size(A)` | Dimensionen (=Anzahl Zeilen und Spalten) von **A** |

[a] Solange `A` nur reelle Einträge hat gilt `transpose(A)=A'` .
[b] Reduced row echelon form (echelon=Staffel).

## 11.3 Symbolisches Rechnen

Die Matrix-Funktionen wendet man an um lineare Probleme zu lösen. Es können aber auch nicht lineare Gleichungssysteme gelöst werden. Dazu benutzt man die symbolischen Rechenfunktionen von Matlab. Bisher haben wir zwar Variablen benutzt, aber wir haben darin nur Zahlen gespeichert. Beim `symbolischen Rechnen`, können wir den Wert einer Variablen vorerst offen lassen.
Zuerst sagt man Matlab, dass man ein Variable als symbolische Variable benutzen will. Hier wollen wir x symbolisch benutzen

```
>> syms x
```

Dann geben wir die Gleichung ein, hier $x^2 + 4 \cdot x + 1 = 0$

```
>> solve(x^2+4*x+1 ==0)
ans =  3^(1/2) - 2
     - 3^(1/2) - 2
```

**Infobox 11.6 Symbolisches Rechnen, Gleichungssysteme lösen**

| | |
|---|---|
| `syms x` | `x` als symbolische Variable initialisieren |
| `clear x` | Variable löschen |
| `S=solve('2*x-y+6*z-1', 'x-y+z-2')` | Gleichungssystem lösen |
| `S.x` | In der Lösung `S` nachschauen, welchen Wert `x` hat |

## 11.4 Kernel, Path, current folder

Beim Starten von Matlab geschieht folgendes: Die Programmdatein von Matlab (auf der Festplatte) werden gelesen. Diese Programmdateien beschreiben, was in den Arbeitsspeicher geladen werden soll. Diese Programmdatein von Matlab im Arbeitsspeicher nennt man **Matlab-Kernel**. Dieser Kernel hat die Funktionen, die wir bisher besprochen haben. Um diese Funktionen auszuführen, benutzt er selber Variablen. Das bedeutet, dass ausser den Variablen die wir definieren, schon vordefinierte Variablen im Matlab-Kernel sind.

**Infobox 11.7 Interne Variablen**

| | |
|---|---|
| `pwd` | gibt an, welches das aktuelle Verzeichnis ist |
| `ls` | listet alle Dateien im aktuellen Verzeichnis auf |
| `cd` | wechselt das aktuelle Verzeichnis |
| `cd ..` | wechselt im aktuellen Verzeichnis eine Hierarchiestufe nach oben |
| `path` | `path`; sie sagt dem Kernel in welchen Verzeichnissen er die Befehle suchen soll |
| `addpath('C:\Program Files\')` | fügt das Verzeichnis `'C:\Program Files\'` zu `path` hinzu |

Der letzte Befehl wird gebraucht, wenn eigene Matlab Befehle und Funktionen geschrieben werden und z.B. in `'C:\Program Files\'` gespeichert wurden.

KAPITEL 12

# Determinante

Wir verwenden die Definition der Determinante in zwei Dimensionen und leiten allgemeine Gesetzmässigkeiten der Determinante her. Wir machen das in zwei Dimensionen, weil wir das noch leicht aufzeichnen und uns gut vorstellen können. Die Gesetzmässigkeiten wie die Linearität und der Vorzeichenwechsel beim Vertauschen von Spalten einer Matrix sind aber für alle Matrizen gültig, d.h. auch in mehr als zwei Dimensionen.

**Infobox 12.1 Determinante: Zeilen und Spalten**

Wir beschränken uns darauf, das Vertauschen, Multiplizieren etc. von *Spalten* zu betrachten. Genau die selben Betrachtungen könnten aber ebenfalls für die *Zeilen* gemacht werden.

## 12.1 Determinante in 2D

**Definition 12.1 Determinante 2D**

Für die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist die *Determinante* $\det(\mathbf{A}) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$.

[Papula, Bd. 2 I 3.2]

Die Determinante berechnet den Flächeninhalt eines Parallelogramms aufgespannt durch die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, siehe Fig. 12.1 a). Wenn wir eine Kante um den Faktor $\lambda$ länger machen, dann muss auch die Fläche des Parallelogramms um diesen Faktor anwachsen. Wir nennen das die **Homogenität der Determinante**, siehe Fig. 12.1 b). Wenn eine Fläche aufgespannt wird durch $\vec{a}$ und $\vec{b}+\vec{c}$, dann muss sich aus geometrischen Gründen die Gesamtfläche zusammensetzen aus dem kleinen Flächen aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. $\vec{a}$ und $\vec{c}$. Wir nennen das die **Additivität der Determinante**, siehe Fig. 12.1 c).
Diese beiden Eigenschaften fassen wir zusammen als die **Linearität der Determinante**.

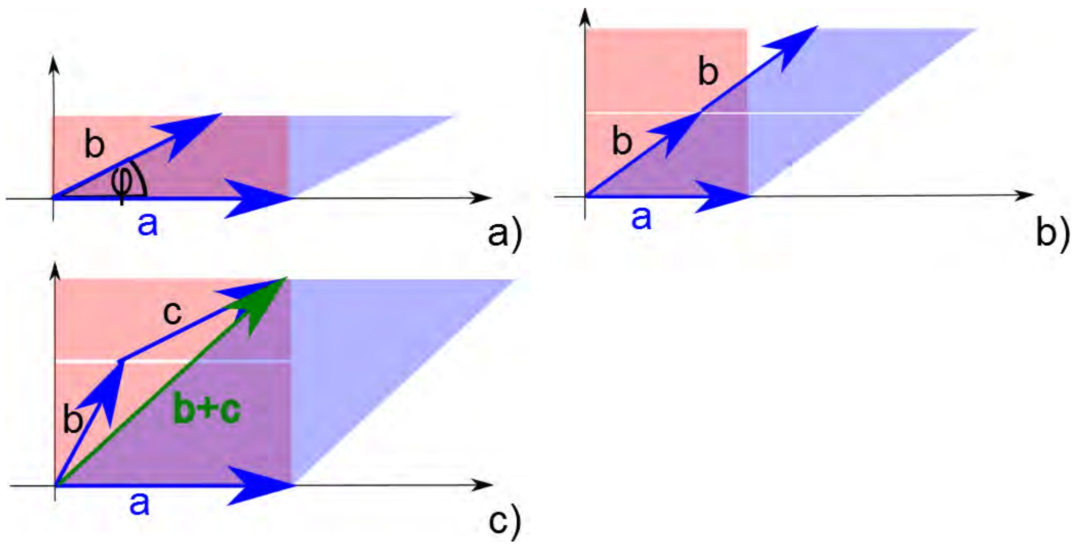



Abbildung 12.1: a) Die Determinante berechnet die Fläche des Parallelogramms aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$. b) Homogenität der Determinante: Die Fläche muss sich verdoppeln, wenn wir $\vec{b}$ verdoppeln in der Länge. c) Additivität der Determinante: Wenn wir uns für die Fläche aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b}+\vec{c}$ interessieren, dann kann die grosse blaue Fläche berechnet werden aus der Summe der kleineren roten Flächen, die aufgespannt werden durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. $\vec{a}$ und $\vec{c}$.

**Infobox 12.2 Linearität der Determinante**

$$\det(\begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 & b_1 \\ \lambda \cdot a_2 & b_2 \end{pmatrix}) = \lambda \cdot \det(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix})$$

$$\det(\begin{pmatrix} a_1 + c_1 & b_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}) + \det(\begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix})$$

d.h. die Determinante ist linear, wenn wir ganze Spalten (oder ganze Zeilen) als Argumente auffassen.

Beachte, dass aufgrund der Linearität die Determinante auch negative Werte annehmen kann, d.h. die Determinante berechnet die Fläche plus ein Vorzeichen.

**Infobox 12.3**

- Die Determinante ändert sich nicht, wenn eine Spalte zur anderen addiert wird. Siehe auch Fig. 12.2.
- $\det(\vec{a}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = 0$
- $\det(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^\intercal) = \det(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix})$

## 12.2 Determinante in 3D

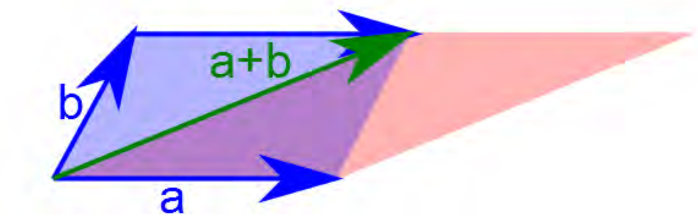



Abbildung 12.2: Die Fläche verändert sich nicht, wenn anstatt der Fläche des Parallelogramms aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (blau), die Fläche aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b} + \vec{a}$ (rot) berechnet wird.

**Infobox 12.4 Linearität des Spatprodukts**

Das Spatprodukt ist linear in allen Argumenten, d.h.

$$[\lambda \cdot \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \lambda \cdot [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

und

$$[\vec{a} + \vec{d}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}]$$

Diese Gleichungen gelten auch für die Addition und Multiplikation im zweiten Argument $\vec{b}$ und im dritten $\vec{c}$.

**Definition 12.2 Determinante in 3D**

Sei $\mathbf{A}$ eine $3 \times 3$-Matrix, und $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ die Spalten von $\mathbf{A}$. Die Determinante ist dann definiert als

$$\det(\mathbf{A}) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

**Infobox 12.5 Linearität Determinanten**

Die Determinante ist linear in allen Argumenten.

**Satz 12.1 Sarrus'sche Regel**

Sei $\mathbf{A}$ die Matrix mit den Einträgen $a_{i,j}$, dann ist

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) \quad &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \\ + \quad & a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ - \quad & a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} \\ - \quad & a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12} \end{aligned}$$

[Goebbels and Ritter, 2011, p.174], [Papula, Bd. 2 I 3.1]

## 12.3 Folgen der Linearität

**Infobox 12.6 Additon von Spalten (oder Zeilen)**

- Der Wert der Determinante ändert sich nicht, wenn eine Spalte zur anderen addiert wird.
- Achtung: Das Multiplizieren einer Spalte mit einer Zahl *verändert* die Determinante!

**Infobox 12.7 Vertauschen von Spalten (oder Zeilen)**

Die Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn Spalten vertauscht werden.

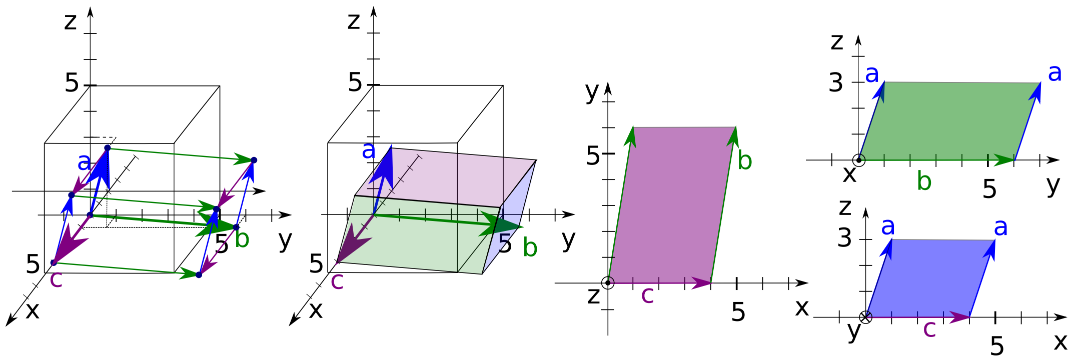
**Infobox 12.8 Determinante der Transponierten**

- $\det(\vec{a}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}) = 0$
- $\det(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^\mathsf{T}) = \det(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix})$
  Dies gilt übrigens auch in mehr als 3 Dimensionen

**Infobox 12.9 Geometrische Bedeutung der Determinante**

- Für 1D defniert man $\det(a_{11}) = a_{11}$
- 1D Länge + Vorzeichen
- 2D Fläche + Vorzeichen
- 3D Volumen + Vorzeichen
- 4D und $N$D: Die Determinante ist das Hypervolumen des Hyper-Parallelogramms aufgespannt durch die Vektoren in den Spalten der Matrix + Vorzeichen

**Beispiel 12.1 Determinante einer Dreiecksmatrix** **805275**




Berechnen Sie die Determinante. Benutze die geometrische Interpretation, dass nämlich die Determinante das Volumen des Spats berechnet.
In der Matrix $\mathbf{A}$ sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ als Zeilen angeordnet.

$$\mathbf{A} = (\vec{a}^\intercal; \vec{b}^\intercal; \vec{c}^\intercal) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 6 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

Die Grundfläche berechnen aus der Länge in Richtung $x = 4$ und der Höhe des roten Parallelogramms in Richtung $y = 6$. Schliesslich lesen wir noch die Höhe des Spats aus $z = 3$. Dies sind die drei Diagonalelemente der Matrix $\mathbf{A}$.

$$\det(\mathbf{A}) = 4 \cdot 6 \cdot 3 = 72$$

**Satz 12.2 Determinante einer Dreiecksmatrix**

Für Dreiecksmatrizen ist die Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente. Sei $\mathbf{A}$ eine Dreiecksmatrix, dann gilt

$$\det(\mathbf{A}) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdots a_{n,n} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

## 12.4 Determinanten in mehr als drei Dimensionen $n \geq 3$

**Satz 12.3 Laplace'scher Determinanten-Entwicklungssatz**

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Determinante von $\mathbf{A}$ kann nach jeder Zeile oder jeder Spalte entwickelt werden:

- Entwicklung nach der $i$-ten Zeile

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik})$$

- Entwicklung nach der $k$-ten Spalte

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik})$$

$\mathbf{A}_{ik}$ ist die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die durch streichen der $i$-ten Zeile und $k$-ten Spalte entsteht.

**Infobox 12.10 Schema für die Vorzeichen $(-1)^{k+i}$**

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ & \dots & & \end{pmatrix}$$

**Satz 12.4 Multiplikationssatz**

Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so gilt

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$$

**Satz 12.5 Determinante der Inversen Matrix**

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

## 12.5 Cramer'sche Regel

**Satz 12.6 Cramer'sche Regel**

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, mit $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Die Lösung $\vec{x}$ des Gleichungsystems

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

ist gegeben durch

$$x_k = \frac{\det(\vec{A}_1, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{A}_n)}{\det(\mathbf{A})}$$

wobei $\vec{b}$ die $k$-te Spalte ersetzt.

[Papula, Bd. 2 I 5.4, p. 92], [Goebbels and Ritter, 2011, p.181]

**Beispiel 12.2 Cramer'sche Regel** **725615**

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit der Cramer'schen Regel.

$$\left|\begin{array}{rcl} 5x_1 + 3x_3 & = & 2 \\ -x_1 + 2x_2 & = & 3 \\ 3x_2 + 1x_3 & = & 4 \end{array}\right|$$

**Lösung:**

Wir nennen die Koeffizienten Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ und die Inhomogenität } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Dann lässt sich die Lösung des Gleichungssystems schreiben als

$$x_1 = \frac{\det(\vec{b}, \vec{A}_2, \vec{A}_3)}{\det(\mathbf{A})}, \; x_2 = \frac{\det(\vec{A}_1, \vec{b}, \vec{A}_3)}{\det(\mathbf{A})}, \; x_3 = \frac{\det(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{b})}{\det(\mathbf{A})}.$$

Die Determinanten sind

$$\begin{array}{rcl} \det(\mathbf{A}) & = & 10 + 0 + -9 + 0 + 0 + 0 = 1 \\ \det(\vec{b}, \vec{A}_2, \vec{A}_3) & = & 4 + 27 + 0 + -24 + 0 + 0 = 7 \\ \det(\vec{A}_1, \vec{b}, \vec{A}_3) & = & 15 - 12 + 0 + 0 + 0 + 2 = 5 \\ \det(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{b}) & = & 40 + -6 + 0 + 0 - 45 + 0 = -11 \end{array}$$

Damit ist die Lösung

$$x_1 = \frac{7}{1} = 7\,,\; x_2 = \frac{5}{1} = 5\,,\; x_3 = \frac{11}{1} = -11\;.$$

**Beispiel 12.3 Herleitung des Satz von Cramer** **260103**

Leiten Sie den Cramer'schen Satz in drei Dimensionen her. Wir betrachten das folgende Gleichungssystem in Matrixschreibweise

$$\left(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3\right) \odot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{b}$$

Dabei fassen wir die erste Spalten von $\vec{A}$ im Spaltenvektor $\vec{A}_1$ zusammen usw. Betrachten Sie vorerst nur die zweite Variable $y$.
Der Beweis ist nicht sehr intuitiv. Deshalb sind hier die Schritte:

- nehmen Sie an, dass Sie die Lösung $(x, y, z)$ des Gleichungssystems schon kennen würden und drücken Sie $\vec{b}$ mit dieser Lösung aus
- ersetzen Sie die zweite Spalte von $\mathbf{A}$ mit diesem Ausdruck für $\vec{b}$
- berechnen sie die Determinante dieser Matrix
- lösen sie nach $y$ auf

**Lösung:**
Würden wir die Lösung des Gleichungssystems schon kennen, dann könnten wir $\vec{b}$ schreiben mit Hilfe der Koeffizientenmatrix und der Lösung

$$\vec{b} = x\vec{A}_1 + y\vec{A}_2 + z\vec{A}_3\;.$$

In der Matrix $\mathbf{A}$ ersetzen wir nun $\vec{A}_2$ mit $\vec{b}$ und berechnen die Determinante der $3 \times 3$-Matrix

$$(\vec{A}_1, \vec{b}, \vec{A}_3)$$

Wir setzen dies zusammen und vereinfachen:

$$\begin{aligned} & \det(\vec{A}_1, \vec{b}, \vec{A}_3) = \det(\vec{A}_1, x\vec{A}_1 + y\vec{A}_2 + z\vec{A}_3, \vec{A}_3) \\ = \quad & 0 + \det(\vec{A}_1, y \cdot \vec{A}_2, \vec{A}_3) + 0 = y \cdot \det(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

Im letzten Ausdruck haben wir also die Determinante von $\mathbf{A}$. Diese Gleichung können wir nach $y$ auflösen:

$$y = \frac{\det(\vec{A}_1, \vec{b}, \vec{A}_3)}{\det(\mathbf{A})}\;.$$

Für die weiteren Unbekannten $x$ und $z$ beweist man dies genau gleich.

**Satz 12.7 Gesetze für Determinanten in $N$ Dimensionen**

Im Folgenden können die Vektoren $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots$ als Spalten oder als Zeilen aufgefasst werden.

- $\det\left(\lambda\,\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots\right) = \lambda\,\det\left(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots\right)$
- $\det\left(\vec{A}_1, \vec{A}_2 + \vec{d}, \ldots\right) = \det\left(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots\right) + \det\left(\vec{A}_1, \vec{d}, \ldots\right)$
- $\det\left(\vec{A}_1, \vec{A}_2 + \vec{A}_1, \ldots\right) = \det\left(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots\right)$
- $\det\left(\vec{A}_2, \vec{A}_1, \ldots\right) = -\det\left(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots\right)$
- $\det\left(\vec{A}_1, \vec{0}, \ldots\right) = 0$
- $\det\left(\vec{A}_1, \vec{A}_1, \ldots\right) = 0$
- $\det\left(\lambda\,\mathbf{A}\right) = \lambda^N\,\det\left(\mathbf{A}\right)$
- Dreiecksmatrizen: $\det(\mathbf{A}) = a_{11}\,a_{22}\,\ldots\,a_{NN}$
- $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{B})$
- Laplace'scher Entwicklungssatz

**Infobox 12.11 Effiziente Berechnung der Determinante**

In $N \geq 3$ wird die Determinante effizient berechnet, indem die Matrix mit dem Gauss-Verfahren auf Dreiecks-Form gebracht wird. Die Determinante verändert sich durch die Elimination $\mathbf{A}'_i = \mathbf{A}_i + \nu\cdot\mathbf{A}_j$ $(i \neq j)$ nicht. Schliesslich ist die Determinante das Produkt der Diagonalelemente mal ein Vorfaktor.
Der Vorfaktor ist am Anfang der Elimination $1$. Er

- ändert das Vorzeichen, wenn zwei Zeilen vertauscht werden.
- er wird mit $1/\lambda$ multipliziert, falls eine Zeile mit $\lambda$ multipliziert wird

**Beispiel 12.4 Effiziente Berechnung der Determinante** **721944**

Berechnen Sie die Determinante effizient. Bringen Sie dazu die Matrix in Dreiecksform.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

Beginn: Vorfaktor $f = 1$. Elimination:

$$\mathbf{R}' = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & -12 & -20 \end{pmatrix}$$

mit den Umformungen $\mathbf{R}' = (\mathbf{R}_1; \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_1; \mathbf{R}_3 - 2\mathbf{R}_1)$. Damit wir besser eliminieren können, multiplizieren wir die 2. Zeile mit $1/3$. Das ändert den Vorfaktor $f' =$

$3 \cdot f = 3$.

$$\mathbf{R}'' = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -12 & -20 \end{pmatrix}$$

Schliesslich eliminieren wir wieder: $\mathbf{R}'' = (\mathbf{R}'_1; \mathbf{R}'_2; \mathbf{R}'_3 + 4\mathbf{R}'_2)$ und erhalten

$$\mathbf{R}''' = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist also

$$\det(\mathbf{R}) = 1 \cdot 3 \cdot (-4) \cdot f' = -12 \cdot 3 = -36$$

**Beispiel 12.5 Effiziente Berechnung der Determinante** **945081**

Berechnen Sie die Determinante effizient. Bringen Sie dazu die Matrix in Dreiecksform.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 8 \\ 20 & 0 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

Beginn: Vorfaktor $f = 1$. Elimination:

$$\mathbf{R}' = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -28 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -16 \end{pmatrix}$$

mit den Umformungen $\mathbf{R}' = (\mathbf{R}_1; \mathbf{R}_2 - 4\mathbf{R}_1; \mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_1; \mathbf{R}_4 - 2\mathbf{R}_1)$. Die Zeilen sollten jetzt geordnet werden. Bei jedem Vertauschen der Zeilen ändert das Vorzeichen von $f$.

$$\mathbf{R}' \to \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -28 \\ 0 & 0 & 2 & -16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -28 \end{pmatrix} = \mathbf{R}''$$

Der Vorfaktor ist also $f' = f \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$ und die Determinante ist

$$\det(\mathbf{R}) = 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-28) \cdot f' = -280$$

KAPITEL 13

# Übungen Lineare Algebra

## 13.1 Lösung von linearen Gleichungssystemen

1. **Lösung von linearen Gleichungssystemen** **726383**
   Der Gauss'sche Algorithmus wird in Papula Bd. 2 I 5.2 (S. 72-75) eingeführt. Lesen Sie diesen Abschnitt. Lösen Sie das nachstehende System von lineare Gleichungen mit diesem Algorithmus.

$$\begin{array}{rcr} 2x+y-2z &=& 10 \\ 3x+2y+2z &=& 1 \\ 5x+4y+3z &=& 4 \end{array}$$

**Lösung:**
In der erweiterten Matrix-Schreibweise bringen wir das System in Zeilenstufenform indem wir Elemente in der Koeffizienten-Matrix eliminieren:

$$\begin{array}{l} L_1' = L_1: \\ L_2' = 2L_2 - 3L_1: \\ L_2' = 2L_3 - 5L_1: \end{array} \begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 3 & 16 & -42 \end{array} .$$

Eine weitere Elimination ergibt:

$$\begin{array}{l} L_1'' = L_1': \\ L_2'' = L_2': \\ L_2'' = L_3' - 3L_2': \end{array} \begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & -14 & 42 \end{array} .$$

Schrittweises Einsetzen von unten nach oben ergibt:

$$\begin{array}{rcr} z &=& -3 \\ y &=& 2 \\ x &=& 1 \end{array} .$$

2. **Lösung von linearen Gleichungssystemen** **902270**
   Löse das System

$$\begin{array}{rcr} x+2y-3z &=& -1 \\ 3x-y+2z &=& 7 \\ 5x+3y-4z &=& 2 \end{array}$$

**Lösung:**

Schrittweise Elimination in der erweiterten Matrix-Schreibweise bring uns auf

$$\begin{array}{r@{\;}l ccc|c}
L_1' = & L_1 : & 1 & 2 & -3 & -1 \\
L_2' = & L_2 - 3L_1 : & 0 & -7 & 11 & 10 \\
L_2' = & L_3 - 5L_1 : & 0 & -7 & 11 & 7
\end{array} .$$

und auf

$$\begin{array}{r@{\;}l ccc|c}
L_1'' = & L_1' : & 1 & 2 & -3 & -1 \\
L_2'' = & L_2' : & 0 & -7 & 11 & 10 \\
L_2'' = & L_3' - L_2' : & 0 & 0 & 0 & -3
\end{array} .$$

Wir sehen, dass die dritte Zeile einen Widerspruch enthält. Deshalb ist das Gleichung-System inkonsistent. Es gibt keine Lösung.

**3. Lösung von linearen Gleichungssystemen** **766582**

Löse das System

$$\begin{aligned}
x + 2y - 3z &= 6 \\
2x - y + 4z &= 2 \\
4x + 3y - 2z &= 14
\end{aligned}$$

**Lösung:**

Schrittweise Elimination bringt uns auf,

$$\begin{array}{r@{\;}l ccc|c}
L_1' = & L_1 : & 1 & 2 & -3 & 6 \\
L_2' = & L_2 - 2L_1 : & 0 & -5 & 10 & -10 \\
L_2' = & L_3 - 4L_1 : & 0 & -5 & 10 & -10
\end{array} .$$

und auf

$$\begin{array}{r@{\;}l ccc|c}
L_1'' = & L_1' : & 1 & 2 & -3 & 6 \\
L_2'' = & L_2' : & 0 & -5 & 10 & -10 \\
L_2'' = & L_3' - L_2' : & 0 & & 0 & 0
\end{array} .$$

Wir sehen, dass x und y Pivot-Variablen sind und $z = \lambda$ eine freie Variable. Durch schrittweises Einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
y &= 2 + 2\lambda \\
x &= 2 - \lambda
\end{aligned}$$

Die Lösung lässt sich als Gerade in Parameterform darstellen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**4. Lösung von LGSs, Pivot/Freie Variablen** **727841**

Löse das System

$$\left| \begin{aligned}
2x - 3y + 6z + 2v - 5w &= 3 \\
y - 4z + v - 5w &= 1 \\
v - 3w &= 3
\end{aligned} \right|$$

**Lösung:**

Das Gleichung-System hat 3 Gleichungen und 5 Unbekannte, also können zwei Parameter frei gewählt werden. In der erweiterten Matrix-Schreibweise

$$\left| \begin{array}{ccccc|c}
2 & -3 & 6 & 2 & -5 & 3 \\
0 & 1 & -4 & 1 & -5 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3
\end{array} \right|$$

erkennen wir am Einfachsten die freien Parameter $z$ und $w$ und die Pivot-Variablen $x$, $y$ und $v$. Das System ist schon in Zeilenstufenform. Wir berechnen die Richtunsvektoren:

- Wir setzen $z = 1$ und $w = 0$ und lösen das homogene Problem:

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

  Es ergeben sich nacheinander $v = 0$, $y - 4 + 0 = 0 \Rightarrow y = 4$ und $2x - 12 + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$.

- Wir setzen $w = 1$ und $z = 0$ und lösen das homogene Problem:

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right|$$

  Es ergeben sich nacheinander $v - 3 = 0 \Rightarrow v = 3$, $y + 3 - 5 = 0 \Rightarrow y = 2$ und $2x - 6 + 6 - 5 = 0 \Rightarrow x = 5/2$.

Die beiden Richtungsvektoren sind also

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir eine Lösung des inhomogenen Problems. Dafür können wir setzen $z = w = 0$:

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right|$$

Wir setzen von unten nach oben ein und erhalten nacheinander $v = 3$, $y = -2$ und

$$2x = 3 + 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 = -9 \Rightarrow x = -9/2 \,.$$

Der Aufpunkt ist also

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -9/2 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die allgemeine Lösung ist

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -9/2 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 5/2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Alternativ:** Wir wählen $z = \lambda_1$ und $w = \lambda_2$. Schrittweises Einsetzen ergibt:

$$\begin{array}{rcl} w &=& \lambda_2 \\ v &=& 3\lambda_2 + 3 \\ z &=& \lambda_1 \\ y &=& 4\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2 \\ x &=& 3\lambda_1 + \frac{5\lambda_2}{2} - \frac{9}{2} \end{array}$$

**5. Konsistente/inkonsistente Gleichungssysteme,** **715001**

Schreibe das Gleichungsystem in Matrix-Form. Wende dann das Gaussverfahren an.

(a) $\left| \begin{array}{rcr} 3x - 3y - z &=& 6 \\ -4y + z &=& -8 \\ 3x - 3y &=& -66 \end{array} \right|$ (c) $\left| \begin{array}{rcr} x - 3y + z &=& 3 \\ y + 5z &=& 2 \\ 2x - 5y + 7z &=& 5 \end{array} \right|$

(b) $\left| \begin{array}{rcr} x + 3y + 5z &=& 0 \\ x + 7y + 6z &=& -4 \\ 4y + z &=& -4 \end{array} \right|$ (d) $\left| \begin{array}{rcr} -3x + y + 2z &=& 0 \\ 4y - 3z &=& 1 \\ z &=& 1 \end{array} \right|$

**Lösung:**

(a) Mit der Umformung

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_1)$$

erhalten wir die erweiterte Koeffizientenmatrix $\left| \begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -72 \end{array} \right|$
Das Gleichungssystem ist konsistent. Einsetzen von Unten nach oben ergibt die Lösung

$$z = -72,\ y = -16,\ x = -38\ .$$

(b) Mit den Umformungen

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3), \mathbf{A}'' = (\mathbf{A}'_1, \mathbf{A}'_2, \mathbf{A}'_3 - \mathbf{A}'_2)$$

erhalten wir die erweiterte Koeffizientenmatrizen

$$\mathbf{A}' = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & -4 \end{array} \right),\ \mathbf{A}'' = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Es gibt eine freie Variable $z = \lambda$ (das Gleichungssystem ist konsistent) und Einsetzen von unten nach oben ergibt die Lösung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -17/4 \\ -1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Mit den Umformungen

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3 - 2\mathbf{A}_1), \mathbf{A}'' = (\mathbf{A}'_1, \mathbf{A}'_2, \mathbf{A}'_3 - \mathbf{A}'_2)$$

erhalten wir die erweiterte Koeffizientenmatrizen

$$\mathbf{A}' = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{array} \right),\ \mathbf{A}'' = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right)$$

Aus der letzten Zeile in $\mathbf{A}''$ schliessen wir, dass das Gleichungssystem inkonsistent ist, und es deshalb keine Lösung gibt.

(d) Das Gleichungssystem ist schon in Zeilenstufenform und die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist konsistent, alle Variablen sind Pivot-Varialben und einseten von unten nach oben ergibt die Lösung $z = 1$ $y = 1$ $x = 1$.

**6. Rang einer Matrix,** **928561**

Bringen Sie folgende Matrizen in Zeilenstufenform und bestimmen Sie den Rang der Matrix:

(a) $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

**Lösung:**

(a) Mit der Notation $\mathbf{A}_i$ für die $i$-te Zeile der Matrix $\mathbf{A}$, sind die Umformungen (mit Gauss-Algorithmus) nacheinander:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_1 - 4\mathbf{A}_2)$$
$$\mathbf{A}'' = (\mathbf{A}'_1, \mathbf{A}'_2, \mathbf{A}'_3 + 11\mathbf{A}'_2)$$

Der Rang ist 3, denn die resultierenden Matrizen sind:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & -7 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{B}' = (\mathbf{B}_1 \cdot 3, \mathbf{B}_2 \cdot 2 - 3\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_3 \cdot 2 - 3 \cdot \ \mathbf{B}_1)$$
$$\mathbf{B}'' = (\mathbf{B}'_1, \mathbf{B}'_2, \mathbf{B}'_3 - 3\mathbf{B}'_2)$$

Der Rang ist 3, denn die resultierenden Matrizen sind:

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & -3 & 12 & -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B}'' = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 12 & 22 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}' = (\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3 - 2\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_4 - 2\mathbf{C}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Der Rang ist also 4.

(d)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}' = (\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2 - 4\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_3 - 2\mathbf{D}_1)$$

$$\mathbf{D}'' = (\mathbf{D}'_1, \mathbf{D}'_2, \mathbf{D}'_3 - 7\mathbf{D}'_2)$$

Der Rang ist 3, denn die resultierenden Matrizen sind:

$$\mathbf{D}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{D}'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

## 7. Lineare Abhängigkeit prüfen mit dem Gauss-Algorithmus

Bestimmen Sie jetzt die lineare Abhängigkeit der folgenden Mengen von Vektoren:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -29 \\ 1 \\ -27 \\ 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

**Lösung:**

(a)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Transformationen

$$\mathbf{A} \ \to \ \mathbf{A}' = (\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_2 + 3\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_1) \ \to \ \mathbf{A}'' = (\mathbf{A}'_1, \mathbf{A}'_2, \mathbf{A}'_3 - 1/3\mathbf{A}'_2)$$

Also sind die Vektoren linear abhängig

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}$$

mit den Umformungen

$$\mathbf{B} \ \to \ \mathbf{B}' = (\mathbf{B}_3\ , \mathbf{B}_1 + 2\mathbf{B}_3, \mathbf{B}_2) \ \to \ \mathbf{B}'' = (\mathbf{B}'_1, \mathbf{B}'_2, 3\mathbf{B}'_3 + 2\mathbf{B}'_2)$$

Also sind die Vektoren linear unabhängig.

(c)

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 12 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

mit den Umformungen

$$\mathbf{C} \ \to \ \mathbf{C}' = (\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_1 - 3\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3 - 2\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_4 - \mathbf{C}_2) \ \to \ \mathbf{C}'' = (\mathbf{C}'_1, \mathbf{C}'_2, \mathbf{C}'_3, \mathbf{C}'_4 + \frac{1}{3}\mathbf{C}'_2)$$

$$\to \ \mathbf{C}''' = (\mathbf{C}''_1, \mathbf{C}''_2, \mathbf{C}''_3, \mathbf{C}''_4 - \frac{7}{9}\mathbf{C}''_3)$$

Also sind die Vektoren linear unabhängig

(d)

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ -29 & 1 & -27 & 17 \\ 3 & 0 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{27}{2} & -27 & \frac{63}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -27 & 63 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -27 & 63 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Umformungen

$$\mathbf{D} \ \to \ \mathbf{D}' = (\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_4 - \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2 - \frac{29}{2}\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_3 + \frac{3}{2}\mathbf{D}_1) \ \to \ \mathbf{D}'' = (\mathbf{D}'_1, \mathbf{D}'_2, 2\mathbf{D}'_3 - 27\mathbf{D}'_2, 2\mathbf{D}'_4 + 3\mathbf{D}'_2)$$

$$\to \ \mathbf{D}''' = (\mathbf{D}''_1, \mathbf{D}''_2, \mathbf{D}''_3, \mathbf{D}''_4 + \frac{1}{9}\mathbf{D}''_3$$

Also sind die Vektoren linear abhängig.

## 13.2 Matrixalgebra

### 1. Matrixmultiplikation

In Papula Bd. 2 I 2.6.3 (S. 18-23) wird erklärt, wie Matritzen miteinander multipliziert werden. Achten sie auf das Falk-Schema, denn es ist besonders nützlich. Papula kennzeichnet Matrizen durch Fettdruck. Diese Konvention werden wir stets brauchen.
Es seien folgende Vektoren und Matrizen gebeben:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{N} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
Berechnen Sie

(a) $\mathbf{M} \odot \vec{v}$
(b) $\mathbf{M} \odot \vec{w}$
(c) $\mathbf{M} \odot \vec{x}$
(d) $\mathbf{M} \odot \vec{y}$
(e) $\mathbf{M} \odot \mathbf{N}$
(f) $\mathbf{M} \odot \mathbf{P}$

**Lösung:**

(a) $\mathbf{M} \odot \vec{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{M} \odot \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{M} \odot \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 13 \\ -10 \end{pmatrix}$

(d) $\mathbf{M} \odot \vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 17 \\ -15 \end{pmatrix}$

(e) $\mathbf{M} \odot \mathbf{N} = \begin{pmatrix} -3 & -11 & 12 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

(f) $\mathbf{M} \odot \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -5 & -4 \\ 2 & 26 & -25 & 11 \\ -5 & -25 & 25 & -10 \end{pmatrix}$

**2. Eigenschaften der Matrixmultiplikation**

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$
Berechne folgende Ausdrücke:

$$\mathbf{M} \odot \vec{v},\ \mathbf{M} \odot \vec{w},\ \mathbf{M} \odot (2\vec{v})$$

$$\mathbf{M} \odot (3\vec{w}),\ \mathbf{M} \odot (\vec{v} + \vec{w}),\ \mathbf{M} \odot (\vec{v} - \vec{w})$$

Berechne nun mit Hilfe der obigen Zwischenresultaten

$$\mathbf{M} \odot (\vec{v} + \vec{w}) - (\mathbf{M} \odot \vec{v} + \mathbf{M} \odot \vec{w}),\ \mathbf{M} \odot (\vec{v} - \vec{w}) - (\mathbf{M} \odot \vec{v} - \mathbf{M} \odot \vec{w})$$

$$\mathbf{M} \odot (2\vec{v}) - 2\mathbf{M} \odot \vec{v},\ \mathbf{M} \odot (3\vec{w}) - (3\mathbf{M} \odot \vec{w})$$

Welche Rechenregeln lassen sich daraus ableiten?

**Lösung:**

- $\mathbf{M} \odot \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\mathbf{M} \odot \vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{M} \odot (2\vec{v}) = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M} \odot (3\vec{w}) = \begin{pmatrix} -12 \\ 9 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{M} \odot (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M} \odot (\vec{v} - \vec{w}) = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$

Die Differenzen anhand der Zwischenresultate ergeben immer null. Daraus folgen die allgemeinen Rechenregeln:

- $\mathbf{M} \odot (\vec{v} + \vec{w}) = \mathbf{M} \odot \vec{v} + \mathbf{M} \odot \vec{w}$
- $\mathbf{M} \odot (\lambda\vec{v}) = \lambda\mathbf{M} \odot \vec{v}$
- Abbildungen mit diesen Eigenschaften nennt man **lineare Abbildungen**.

## 3. Spezielle Matrizen

Matritzen sind Abbildungen von Vektoren. Sie drehen, spiegeln, projizieren oder strecken Vektoren. Hier lernen Sie typische Matrizen kennen. Wir arbeiten mit dem Dreieck:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zeichnen Sie es gross auf. Benennen Sie die jeweiligen Abbildungen mit Worten, z.B. Drehung, Spiegelung, Projektion usw. Beachte dazu die Innenwinkel des Dreiecks, die Kantenlängen und den Umlaufsinn des Dreiecks.

(a) Berechne und zeichne das Bild des Dreiecks unter der Abbildung $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Berechne und zeichne das Bild von $ABC$ unter der Abbildung $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Berechne und zeichne das Bild von $ABC$ unter der Abbildung $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) Berechne und zeichne das Bild von $ABC$ unter der Abbildung $\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**Lösung:**

(a) $\{\vec{A}', \vec{B}', \vec{C}'\} = \{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\}$. Die Längen und Innenwinkel bleiben erhalten. Der Umlaufsinn wechselt. $\mathbf{M}$ ist eine Spiegelung an der $y$-Achse.

(b) $\{\vec{A}', \vec{B}', \vec{C}'\} = \{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}\}$.
Die Längen und Innenwinkel ändern. Der Umlaufsinn bleibt erhalten. $\mathbf{S}$ ist eine Streckung mit dem Faktor 1.5 (nur in $x$-Richtung).

(c) $\{\vec{A}', \vec{B}', \vec{C}'\} = \{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Die Längen und Innenwinkel ändern. Der Umlaufsinn verliert seine Bedeutung. $\mathbf{P}$ ist eine Projektion auf die $x$-Achse.

(d) $\{\vec{A}', \vec{B}', \vec{C}'\} = \{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Die Längen und Innenwinkel bleiben erhalten. Der Umlaufsinn bleibt erhalten. $\mathbf{S}'$ ist eine Punktspiegelung am Ursprung.

## 4. Verkettung von Abbildungen, 926268

Die Matrix-Multiplikation ist **nicht kommutativ**, d.h. es gilt **nicht**

$$\mathbf{M} \odot \mathbf{S} = \mathbf{S} \odot \mathbf{M}\,.$$

Es gibt aber spezielle Matrizen, wo dies trotzdem gilt.

Wir arbeiten jetzt mit folgenden Matrizen:

$$\mathbf{R}(\frac{4\pi}{3}) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{4\pi}{3}) & \sin(\frac{4\pi}{3}) \\ -\sin(\frac{4\pi}{3}) & \cos(\frac{4\pi}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.866 \\ -0.866 & -0.5 \end{pmatrix} \text{ und } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

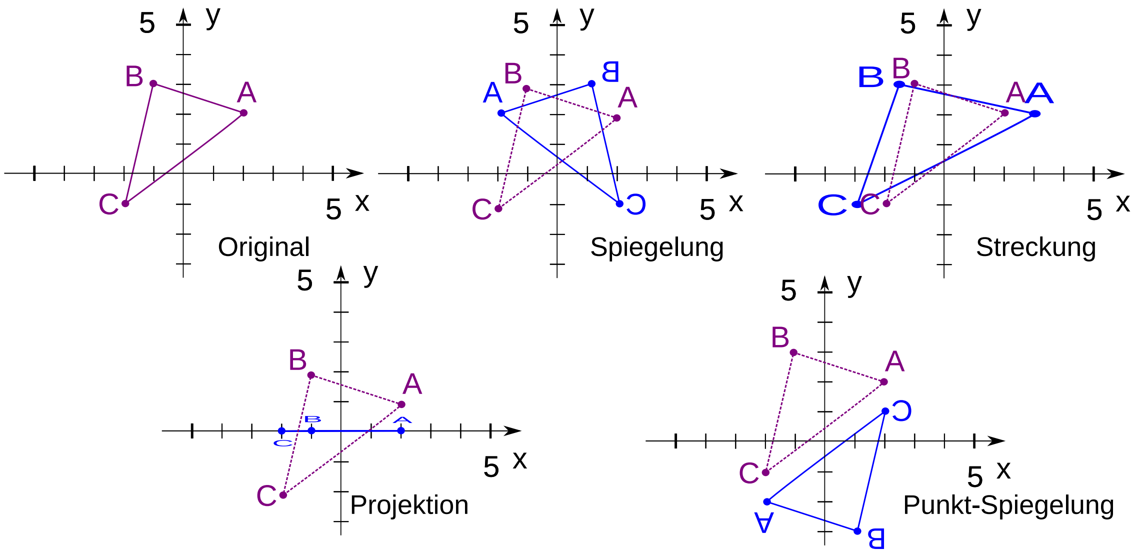



Abbildung 13.1: Zur Aufgabe 3. Das orginal Dreieck und die vier Bilder.

d.h. mit der Drehung $\mathbf{R}$ um $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ und der Spiegelung an der x-Achse.

Das Ausführen von Transformationen nacheinander entspricht dem **Multiplizieren von Matrizen**.

Achtung bei der Reihenfolge: Für die eine Spiegelung $\mathbf{S}$ und die Drehung $\mathbf{R}$ bedeutet $\mathbf{S} \odot \mathbf{R} \odot \vec{v}$, dass der Vektor $\vec{v}$ **zuerst** gedreht und dann gespiegelt wird. Das ist etwas gewöhnungsbedürftig, weil wir sonst von links nach rechts lesen. Es soll das Dreieck ABC abgebildet werden:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Konstruieren Sie das Dreieck $ABC$ gross auf ein Blatt Papier.
- Berechnen Sie die Position der Ecken unter der Abbildung $\mathbf{S} \odot \mathbf{R}$ und zeichnen Sie $A'B'C'$ in die Grafik ein.
- Berechnen Sie die Position der Ecken unter der Abbildung $\mathbf{R} \odot \mathbf{S}$ und zeichnen Sie $A''B''C''$ in die Grafik ein.

**Lösung:**

- Siehe Graphik.
- $\vec{A'} = \mathbf{R} \odot \mathbf{S} \odot \vec{A} = \begin{pmatrix} -2.73 \\ -0.73 \end{pmatrix}, \vec{B'} = \begin{pmatrix} -2.10 \\ 2.37 \end{pmatrix}, \vec{C'} = \begin{pmatrix} 1.87 \\ 1.23 \end{pmatrix}$
- $\vec{A''} = \mathbf{S} \odot \mathbf{R} \odot \vec{A} = \begin{pmatrix} 0.73 \\ 2.73 \end{pmatrix}, \vec{B''} = \begin{pmatrix} 3.1 \\ 0.63 \end{pmatrix}, \vec{C''} = \begin{pmatrix} 0.13 \\ -2.23 \end{pmatrix}$

Hier sieht man gut, dass die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist, denn es ist $\vec{A'} \neq \vec{A''}$. Es kommt auf die Reihenfolge des Ausführens an!

## 13.3 Lineare Abbildungen

1. **Lineare Abbildungen** 907788

   Bestimmen Sie ob folgende Abbildungen $L$ linear sind und geben Sie (falls möglich) die entsprechende Darstellung als Matrix an.

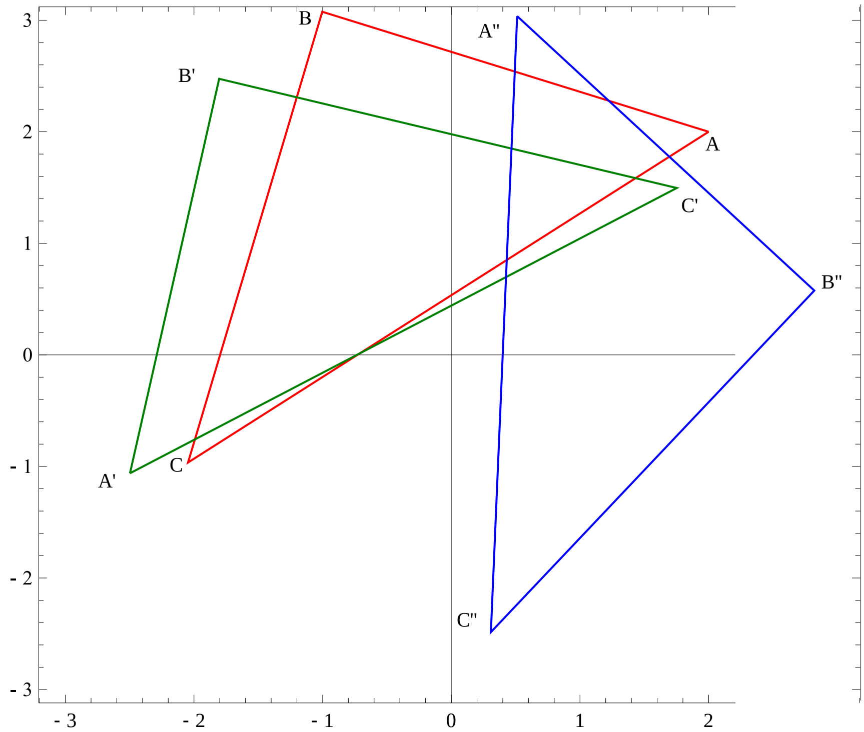



Abbildung 13.2: Zur Aufgabe 4

(a) $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definiert durch $L(x, y) = (x + y, x)$

(b) $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch $L(x, y, z) = 2x - 3y + 4z$ oder gleichbedeutend

$$L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = (2x - 3y + 4z)$$

(c) $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ definiert durch $L(x, y, z) = (|x|, 0)$ oder gleichbedeutend

$$L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} |x| \\ 0 \end{pmatrix}$$

(d) $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch $L(x, y) = x \cdot y$ oder gleichbedeutend

$$L(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = (x \cdot y)$$

(e) $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definiert durch $L(x, y) = (3x - 4y, x + 5y)$

**Lösung**

(a) Zeige Homogenität d.h. $L(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \lambda \cdot L(x + y, x)$:

$$L(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot (x + y) \\ \lambda \cdot x \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x + y \\ x \end{pmatrix} = \lambda \cdot L(x + y, x)$$

Zeige Additivität d.h. $L(x+x_0, y+y_0) = L(x,y) + L(x_0,y_0)$:

$$\begin{aligned} L(x+x_0, y+y_0) &= \begin{pmatrix} x+x_0+y+y_0 \\ x+x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+x_0+y_0 \\ x+x_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x+y \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0+y_0 \\ x_0 \end{pmatrix} \\ &= L(x,y) + L(x_0,y_0) \;\square \end{aligned}$$

Darstellung als Matrix: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Homogenität:

$$L(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y, \lambda \cdot z) = 2\lambda x - 3\lambda y + 4\lambda z = \lambda \cdot (2x - 3y + 4z) = \lambda L(x,y,z)$$

Additivität:

$$\begin{aligned} L(x+x_0, y+y_0, z+z_0) &= 2(x+x_0) - 3(y+y_0) + 4(z+z_0) \\ &= 2x - 3y + 4z + 2x_0 - 3y_0 + 4z_0 \\ &= L(x,y,z) + L(x_0,y_0,z_0) \;\square \end{aligned}$$

Darstellung als Matrix: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

(c) Zeige Homogenität d.h. $L(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y, \lambda \cdot z) - \lambda \cdot L(x,y,z) = 0$:

$$L(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y, \lambda \cdot z) - \lambda \cdot L(x,y,z) = \begin{pmatrix} |\lambda \cdot x| \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} |x| \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} |\lambda \cdot x| - \lambda |x| \\ 0 - 0 \end{pmatrix}$$

Die erste Komponente verschwindet nur für $\lambda > 0$ (nur in diesem Spezialfall $\lambda > 0$ würde gelten: $|\lambda \cdot x| - \lambda \cdot |x| = \lambda \cdot |x| - \lambda \cdot |x| = 0$) Da dies aber nicht allgemein gilt, ist die Abbildung nicht linear.

(d) Homogenität $L(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = (\lambda \cdot x) \cdot (\lambda \cdot y) = \lambda^2 (x \cdot y)$. Das ist eine Abbildung, die nicht linear ist (sondern quadratisch).

(e) Homogenität:

$$\begin{aligned} L(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) &= \begin{pmatrix} 3\lambda \cdot x - 4\lambda \cdot y \\ \lambda \cdot x + 5\lambda \cdot y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(3x - 4y) \\ \lambda(x+5y) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3x - 4y \\ x + 5y \end{pmatrix} = \lambda L(x,y) \end{aligned}$$

Additivität:

$$\begin{aligned} L(x+x_0, y+y_0) &= \begin{pmatrix} 3(x+x_0) - 4(y+y_0) \\ (x+x_0) + 5(y+y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 4y + 3x_0 - 4y_0 \\ x + 5y + x_0 + 5y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3x - 4y \\ x + 5y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x_0 - 4y_0 \\ x_0 + 5y_0 \end{pmatrix} = L(x,y) + L(x_0,y_0) \;\square \end{aligned}$$

Darstellung als Matrix: $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

**2. Lineare Abbildung als Matrix,** **435522**

Bestimmen Sie für die folgenden lineare Abbildungen das Bild der Basisvektoren und schreiben Sie die Abbildung als Matrix:

(a) Streckung der $x$ und $y$-Komponente um den Faktor 10.

(b) Spiegelung an der Winkelhalbierenden zwischen $x$ und $y$-Achse.

(c) Streckung um Faktor 4 der $x$-Komponente und Streckung um Faktor 0.5 der $y$-Komponente.

(d) Projektion auf die Winkelhalbierende zwischen $x$ und $y$-Achse.

(e) Drehung um den Urspung um 45° im Gegenuhrzeigersinn.

**Lösung**

(a) Es gilt
$$\vec{e}_1 \;\to\; \vec{e}_1' = 10\vec{e}_1 \text{ und } \vec{e}_2 \;\to\; \vec{e}_2' = 10\vec{e}_2$$
Schreien wir die Bildvektoren in Komponentenschreibweise
$$\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$
und fügen die Bildvektoren zu einer Matrix zusammen
$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$
erhalten wir die Matrix der Abbildung.

(b) Es gilt
$$\vec{e}_1 \;\to\; \vec{e}_1' = \vec{e}_2 \text{ und } \vec{e}_2 \;\to\; \vec{e}_2' = \vec{e}_1$$
Schreien wir die Bildvektoren in Komponentenschreibweise
$$\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e}_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
und fügen die Bildvektoren zu einer Matrix zusammen
$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
erhalten wir die Matrix der Abbildung.

(c) Es gilt
$$\vec{e}_1 \;\to\; \vec{e}_1' = 4\vec{e}_1 \text{ und } \vec{e}_2 \;\to\; \vec{e}_2' = \frac{1}{2}\vec{e}_2$$
Schreien wir die Bildvektoren in Komponentenschreibweise
$$\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
und fügen die Bildvektoren zu einer Matrix zusammen
$$\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$
erhalten wir die Matrix der Abbildung.

(d) Es gilt
$$\vec{e}_1 \;\to\; \vec{e}_1' = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) \text{ und } \vec{e}_2 \;\to\; \vec{e}_2' = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right)$$
Schreien wir die Bildvektoren in Komponentenschreibweise
$$\vec{e}_1' = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e}_2' = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
und fügen die Bildvektoren zu einer Matrix zusammen
$$\mathbf{P}' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
erhalten wir die Matrix der Abbildung.

(e) Es gilt

$$\vec{e}_1 \;\to\; \vec{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) \text{ und } \vec{e}_2 \;\to\; \vec{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right)$$

Schreien wir die Bildvektoren in Komponentenschreibweise

$$\vec{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und fügen die Bildvektoren zu einer Matrix zusammen

$$\mathbf{R}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir die Matrix der Abbildung.

### 3. Darstellung einer lineare Abbildung als Matrix, 738430

Es sei $\mathbf{P} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{M}$ die Spiegelung an der $y$-Achse. Ferner bilden

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

das Dreieck $ABC$.

(a) Bestimmen Sie das Bild von $ABC$ unter Abbildung $\mathbf{P}$ und $\mathbf{M} \odot \mathbf{P}$

(b) Bestimmen Sie das Bild von $ABC$ unter Abbildung $\mathbf{M}$ und $\mathbf{P} \odot \mathbf{M}$

Vergleichen Sie die Resultate aus den beiden Teilaufgaben. Was schliessen Sie daraus?

**Lösung**

(a) Abbildung unter $\mathbf{P}$: $A', B', C' = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2.5 \\ -2.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Abbildung unter $\mathbf{M} \odot \mathbf{P}$: $A'', B'', C' = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2.5 \\ -2.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) Abbildung unter $\mathbf{M}$: $A'B'C' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Abbildung unter $\mathbf{P} \odot \mathbf{M}$: $A''B''C' = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Bildpunkte fallen verschieden aus, abhängig davon ob $\mathbf{P} \odot \mathbf{M}$ oder $\mathbf{M} \odot \mathbf{P}$ auf sie angewendet wird. Beim Dreieck (und auch allgemein) kommt es darauf an, in welcher Reihenfolge die Abbildungen ausgeführt werden.
Im Allgemeinen gilt für beliebige lineare Abbildungen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ : $\mathbf{A} \odot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \odot \mathbf{A}$.
Lineare Abbildungen sind im Allgemeinen **nicht kommutativ**.

### 4. Rechenregeln für Matrix-Multiplikation 928277

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie am Beispiel dieser Matrizen die Gültigkeit der folgenden Rechenregeln (sofern alle Summen und Produkte existieren):

(a) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\odot\mathbf{C}=\mathbf{A}\odot\mathbf{C}+\mathbf{B}\odot\mathbf{C}$

(b) $(\mathbf{A}\odot\mathbf{B})\odot\mathbf{C}=\mathbf{A}\odot(\mathbf{B}\odot\mathbf{C})$

(c) $(\mathbf{A}\odot\mathbf{B})^\top=\mathbf{B}^\top\odot\mathbf{A}^\top$

Rechnen Sie wahlweise schriftlich oder mit Matlab.

**Lösung:**
Wir berechnen Schritt für Schritt die Teilresultate:

(a) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&4\\4&4&1\end{pmatrix}$ $\quad\mathbf{B}\odot\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-2&6\\7&3\\0&6\end{pmatrix}$

$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\odot\mathbf{C}=\begin{pmatrix}0&2\\10&22\\13&17\end{pmatrix}$ $\quad\mathbf{A}\odot\mathbf{C}+\mathbf{B}\odot\mathbf{C}=\begin{pmatrix}0&2\\10&22\\13&17\end{pmatrix}$

$\mathbf{A}\odot\mathbf{C}=\begin{pmatrix}2&-4\\3&19\\13&11\end{pmatrix}$

Der Vergleich von $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\odot\mathbf{C}$ mit $\mathbf{A}\odot\mathbf{C}+\mathbf{B}\odot\mathbf{C}$ zeigt, dass das Gleichheitszeichen in der Aufgabe berechtigt ist.

(b) $\mathbf{A}\odot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\4&5&2\\-2&5&5\end{pmatrix}$ $\quad\mathbf{B}\odot\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-2&6\\7&3\\0&6\end{pmatrix}$

$(\mathbf{A}\odot\mathbf{B})\odot\mathbf{C}=\begin{pmatrix}-2&0\\14&24\\-1&33\end{pmatrix}$ $\quad\mathbf{A}\odot(\mathbf{B}\odot\mathbf{C})=\begin{pmatrix}-2&0\\14&24\\-1&33\end{pmatrix}$

Der Vergleich von $(\mathbf{A}\odot\mathbf{B})\odot\mathbf{C}$ mit $\mathbf{A}\odot(\mathbf{B}\odot\mathbf{C})$ zeigt, dass das Gleichheitszeichen in der Aufgabe berechtigt ist.

(c) $\mathbf{A}\odot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1&-2&1\\4&5&2\\-2&5&5\end{pmatrix}$ $\quad(\mathbf{A}\odot\mathbf{B})^\top=\begin{pmatrix}-1&4&-2\\-2&5&5\\1&2&5\end{pmatrix}$

$$\mathbf{B}^\top\odot\mathbf{A}^\top=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&2&1\\-1&3&1\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}-1&2&0\\1&-2&3\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4&-2\\-2&5&5\\1&2&5\end{pmatrix}$$

Der Vergleich von $(\mathbf{A}\odot\mathbf{B})^\top$ mit $\mathbf{B}^\top\odot\mathbf{A}^\top$ zeigt, dass das Gleichheitszeichen in der Aufgabe berechtigt ist.

```
% Definitionen
A=[ 4, 9, 5;1, 5, 3;0, 1, 0];
B=[ 1, 0, -1;0, 2, 3;4, 1, 1];
C=[ -1, 1, 1;2, -2, 1;0, 3, 0];
D=[ 3, 1;0, 2;1, 5];
% Wenn beide Seiten gleich sind,
% sollte die Differenz eine 0-Matrix geben
(A+B)*C-(A*C+B*C )
% ans =0     0     0
%      0     0     0
%      0     0     0
(A*B)*C- A* (B*C)
% ans =0     0     0
```

```
%          0         0         0
%          0         0         0
(A*B)'-B'*A'
% ans =0         0         0
%          0         0         0
%          0         0         0
```

**5. Matrix-Multiplikation** **991200**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -3 \\ -4 & 6 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie am Beispiel dieser Matrizen, dass die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist. **Lösung:**

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -15 & 3 & 39 \\ -10 & 2 & 26 \\ -5 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} \odot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt $\mathbf{A} \odot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \odot \mathbf{A}$, d.h. die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ.

**6. Matrix-Multiplikation** **744523**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Bestimmen sie alle Matrizen $\mathbf{X}$, für die gilt $\mathbf{A} \odot \mathbf{X} = \mathbf{X} \odot \mathbf{A}$, d.h. das Matrix-Produkt verhält sich kommutativ.

**Lösung:**
Wir berechnen zuerst die Matrixprodukte:

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ (c-a) & (d-b) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} \odot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} (a-b) & b \\ (c-d) & d \end{pmatrix}$$

Die Einträge in beiden Matrizen müssen übereinstimmen, daraus ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= (a-b) \\ b &= b \\ (c-a) &= (c-d) \\ (d-b) &= d \end{aligned}$$

Wenn wir das Gleichungssystem in übersichtliche Form bringen (alle Variablen links, alle Konstanten rechts) ergibt sich

$$\left| \begin{array}{cccc} & b & & = 0 \\ & 0 & & = 0 \\ -a & & +d & = 0 \\ & -b & & = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{cccc} -a & & +d & = 0 \\ & b & & = 0 \\ & 0 & & = 0 \\ & 0 & & = 0 \end{array} \right|$$

Einsetzen von unten nach oben ergibt $d = \lambda_1$, $c = \lambda_2$, $b = 0$ und $a = \lambda_1$, also

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

## 13.4 MATLAB

1. **Operationen mit Vektoren,** **58174**

Es seien die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gegeben. Berechnen Sie mit Matlab die folgenden Ausdrücke. Welche Operationen werden ausgeführt? $\vec{u} = \{2, -3, 1, 0\}$; $\vec{v} = \{-1, 0, 1, 4\}$

(a) `u+v-1`
(b) `[u v(2:4)]`
(c) `u*v`
(d) `u.*v`
(e) `u*v'`
(f) `u'*v`
(g) `max(abs(u+v))`
(h) `sum([u;v])`

**Lösung**

```
>> u =[  2 ,-3, 1, 0 ]
u = 2   -3    1    0
>> v= [-1  ,0  ,1, 4  ]
v = -1    0    1    4
>> a=u+v-1
a = 0   -4    1    3
>> b=[u v(2:4)]
b = 2   -3    1    0    0    1    4
>> c=u*v
??? Error using ==> mtimes
Inner matrix dimensions
  must agree.
>> d=u.*v
d = -2    0    1    0
>> e=u*v'
e = -1
>> f=u'*v
f = -2    0    2    8
     3    0   -3  -12
    -1    0    1    4
     0    0    0    0
>> g=max(abs(u+v))
g =4
>> h=sum([u;v])
h =1   -3    2    4
```

Bemerkungen:

(a) Es werden zwei Vektoren mit gleicher Dimension addiert (das ergibt einen Vektor. Danach wird von jedem Element 1 abgezogen.

(b) Es entsteht ein neuer Vektor mit Länge 7.

(c) Fehlermeldung: Die Vektoren lassen sich so nicht multiplizieren.

(d) Elementweise Multiplikation `d(1)=u(1)*v(1), d(2)=u(2)*v(2),...`. Allgemein gilt: Der Punkt vor dem Operator (hier `*`) verwandelt die Operator in einen elementweisen Operator.

(e) `u` ist ein Zeilenvektor, `v'` ist ein Spaltenvektor; so lassen sich die Vektoren multiplizieren, denn die Anzahl Zeilen im hinteren Objekt(hier `v'`) stimmt mit der Anzahl Spalten vom vorderen Objekt (hier `u`) überein. Hier wird also das Skalarprodukt berechnet. Das Skalarprodukt wird auch inneres Produkt (inner product) genannt.

(f) Man berechnet so das äusseres Produkt von $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Es gilt $F_{i,j} = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j$. Bitte gleich wieder vergessen.

(g) `max` sucht den grössten Eintrag in der Liste.

(h) `sum(`**A**`)` addiert alle Zeilen von $(A)$.

2. **Operationen mit Vektoren,** **886510**

(a) Quadrieren Sie die Zahlen 3, $\pi$ und -1 mit Hilfe des Operators ˆ und ziehen Sie aus den Ergebnissen jeweils die Wurzel.

(b) Erzeugen Sie den Vektor $\vec{v} = (1, 2, \ldots 10)$ mit dem Befehl `v=1:1:10` .

(c) Erzeuge den Vektor $\vec{u} = (36, 72, \ldots 360)$

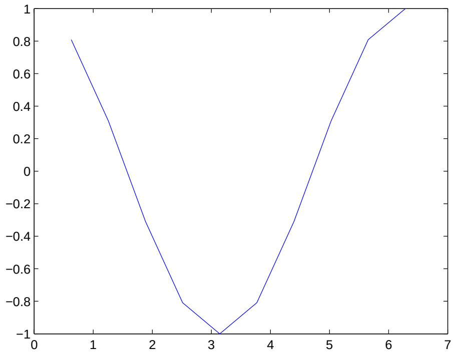
(d) Rechne die Winkel in $\vec{u}$ ins Bogenmass um.

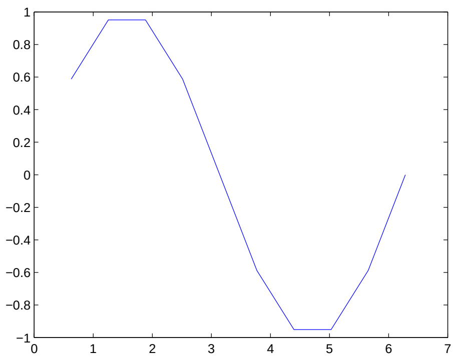
(e) Berechne die $\cos -, \sin -$ und $\tan -$Werte für die Winkel in $\vec{u} = (36{*}2\pi/360, 72{*}2\pi/360, \ldots 2\pi)$.

(f) Visualisiere die Funktionen $\cos(\varphi), \sin(\varphi)$ und $\tan(\varphi)$ im Bereich $0\varphi < 2\pi$ mit dem Befehl `plot(x,y)`.

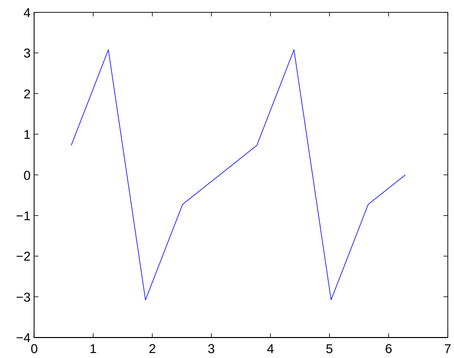
**Lösung**

```
>> l= [ 3, pi , -1 ]
l = 3.00 3.1416 -1.00
>> q=l.*l %quadrieren
q =9.00   9.8696   1.00
>> ls=sqrt(q) %Wurzel
ls =  3.00 3.1416 1.00
>> v=1:1:10 %Vektor v
v =1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
>> u=v*36 %Vektor u
u =  36 72 ... 324 360
>> w=u/360*2*pi %Bogenmass
w =0.6283   ...   6.2832
```




```
>> ca=cos(w) % cos-Werte
ca = 0.8090   ...   1.0000
>> sa=sin(w) % sin-Werte
sa = 0.5878  ...   -0.0000
>> ta=tan(w) % tan-Werte
ta =  0.7265   ...   -0.0000
>>  plot(w,ca)
>>  plot(w,sa)
>>  plot(w,ta)
```




**3. Abstand Punkt-Ebene,** **878666**

Berechne den Abstand der Punkte

(a) $\vec{Q} = \begin{pmatrix} -8/5 \\ 0 \\ -4/5 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{R} = \begin{pmatrix} -18/5 \\ 2 \\ -9/5 \end{pmatrix}$

von der Ebene, die durch die Punkte $\vec{P_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{P_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ festgelegt ist. Benutze dazu u.a. das Vektor-Produkt `c=cross(a,b)`.

**Lösung**

```
Q=[-8/5, 0, -4/5 ];
R=[-18/5, 2, -9/5];
Pe=[2,1,-3];% P_1
Pz=[1,0,-1];% P_2
Pd=[0,1,1]; % P_3

% Normalenvektor
ns=cross(Pz-Pe,Pd-Pe)
%ns = -4   0 -2
% Normalen-Einheitsvektor
n=ns/norm(ns)
%n = -0.8944    0 -0.4472
% Abstand Q-E
n*(Q-Pe)'
% 2.2361
% Abstand R-E
n*(R-Pe)'
% 4.4721
```

4. **Lineare Abhängigkeit**
Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{d} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie unter Benutzung des Befehls `rref`:

(a) Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig.
(b) Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{d}$ sind linear abhängig.

**Lösung**

```
a=[1,-1,2];
b=[5,1,2];
c=[1,2,3];
d=[13,5,2];

rref([a;b;c])
%ans =1      0      0
%       0      1      0
%       0      0      1
% resultierende Matrix hat Rang 3
% => a,b,c linear unabh.
rref([a;b;d])
%ans =1.0  0      0.67
%       0    1.0  -1.33
%       0    0      0
% resultierende Matrix hat Rang 2
% => a,b,c linear abh.
```

5. **Schnittpunkt von 3 Ebenen,** 544325

Bestimme die gemeinsamen Punkte der Ebenen $E_1$, $E_2$, $E_3$. Benutze dazu zuerst den Befehl `solve`, danach den Befehl `inv(`$\mathbf{A}$`)` und schliesslich den Befehl `rref`:

(a)

$$\begin{aligned} E_1: \ x_1 - 3x_2 + x_3 &= \quad 5 \\ E_2: \ 3x_1 + x_2 + x_3 &= \quad 0 \\ E_3: \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= \quad 6 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} E_1: \ 4x_1 + 5x_2 &= \quad 6 \\ E_2: \ x_1 + x_3 &= \quad 0 \\ E_3: \ 3x_2 - 2x_3 + 1 &= \quad 0 \end{aligned}$$

**Lösung**

```
syms x y z
S=solve('x-3*y+z-5',
   '3*x+y+z','x+2*y+3*z-6');
ls=[S.x S.y S.z ]
%ls =[ -19/30, -14/15, 17/6]
Ss=solve('4*x+5*y-6',
      'x+z','3*y-2*z+1');
lss=[Ss.x Ss.y Ss.z ]
%lss =[ 23/2, -8, -23/2]

A=[ 1 -3 1;3 1 1;1 2 3];
v=[5 0 6] ;
hs=inv(A)*v'
%hs =  -0.63 ;-0.93 ; 2.83
B=[4 5 0;1 0 1;0 3 -2];
w=[6 0 -1] ;
hss=inv(B)*w'
%hss = 11.5 -8.0 -11.5
ls'-hs %Kontrolle
%ans =  0 ;  0 ; 0
lss'-hss
%ans =  0 ;  0 ; 0

A=[ 1 -3 1;3 1 1;1 2 3];
v=[5 0 6] ;
Ae=[ A v']
rls=rref(Ae)
% rls = 1.0  0    0  -0.6333
%       0    1.0  0  -0.9333
%       0    0    1.0 2.8333
B=[4 5 0;1 0 1;0 3 -2];
w=[6 0 -1] ;
Be=[B w'] ;
rlss=rref(Be)
% rlss =1.0  0   0    11.5
%       0    1.0 0    -8.0
%       0    0   1.0 -11.5
```

## 6. Projektion 394739

Projiziere die Punkte $\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} -8/5 \\ 0 \\ -4/5 \end{pmatrix}$ und $\vec{R} = \begin{pmatrix} -18/5 \\ 2 \\ -9/5 \end{pmatrix}$ auf die Ebene $E_1: \ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$.

(a) Bestimme dazu mittels Projektion die Bilder der Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

(b) Bestimme die Transformationsmatrix.

(c) Wende die Transformationsmatrix auf $P, Q$ und $R$ an.

**Lösung**

```
P=[2,1,-3];
Q=[-8/5, 0, -4/5];
R=[-18/5, 2, -9/5];
ns=[1 -3 1 ];
n=ns/norm(ns);%Normierung
E=eye(3);
% Bilder der Basisvektoren
% Es =Transformationsmatrix
Es = [ E(:,1)-(n*E(:,1))*n' ,
    E(:,2)-(n*E(:,2))*n' ,
    E(:,3)-(n*E(:,3))*n']
%Es =0.9091  0.2727 -0.0909
%     0.2727  0.1818  0.2727
%    -0.0909  0.2727  0.9091

% Trafo anwenden
Ps=Es*P'
%Ps =2.3636 ; -0.0909 ; -2.6364
Qs=Es*Q'
%Qs = -1.3818 ; -0.6545 ; -0.5818
Rs=Es*R'
%Rs = -2.5636 ; -1.1091 ; -0.7636
```

Kontrolle: Berechne den Normalenvektor der Ebene definiert durch die projizierten Punkte:

```
>> nss=cross(Qs-Ps,Rs-Ps)
nss = 1.0364 ; -3.1091 ; 1.0364
% nss kollinear zu n?
n./nss'
% 0.2909 0.2909 0.2909
% dreimal die selbe Zahl =>
% die Vektoren sind kollinear
```

**7. Mittelpunkt und Radius des Kreises,** **901163**

Bestimme den Mittelpunkt und den Radius des Kreises

(a) $x^2 + y^2 - 6x - 27 = 0$

(b) $x^2 + y^2 - 8x = 0$

(c) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

(d) $x^2 + y^2 - 6x + 6y = 0$

**Lösung**

(a) Wir bringen den Ausdruck in Normalform

$$x^2 - 6x + y^2 = 27 \;\Rightarrow\; (x-3)^2 - 9 + (y-0)^2 = 27$$

also

$$(x-3)^2 + (y-0)^2 = 36$$

und der Mittelpunkt $\vec{M} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und der Radius $r = \sqrt{36} = 6$ lassen sich ablesen.

(b) Normalform

$$x^2 - 8x + y^2 = 0 \;\Rightarrow\; (x-4)^2 - 16 + y^2 = 0$$

also

$$(x-4)^2 + y^2 = 16$$

$\vec{M} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $r = \sqrt{16} = 4$

(c) Normalform

$$x^2 - 4x + y^2 + 2y = 4 \;\Rightarrow\; (x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 = 4$$

also

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$$

$\vec{M} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $r = \sqrt{9} = 3$

(d) Normalform

$$x^2 - 6x + y^2 + 6y = 0 \;\Rightarrow\; (x-3)^2 - 9 + (y+3)^2 - 9 = 18$$

also

$$(x-3)^2 + (y+3)^2 = 36$$

$\vec{M} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $r = \sqrt{36} = 6$

**8. Mittelpunkt und Radius des Kreises**

Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel mit Mittelpunkt $\vec{M}$ und Radius $r$.

(a) $\vec{M} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}, r = 6$

(b) $\vec{M} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r = 8$

(c) $\vec{M} = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ -1 \end{pmatrix}, r = 3$

(d) $\vec{M} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, r = 3\sqrt{2}$

**Lösung**

Wir stellen zuerst die Form bereit (inkl. Minuszeichen):

$$(x- \ )^2 + (y- \ )^2 + (z- \ )^2 = r^2$$

und setzen dann Mittelpunkt und Radius ein:

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 + (z+7)^2 = 6^2$$

(b) $(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8^2$

(c) $(x+5)^2 + (y-13)^2 + (z+1)^2 = 3^2$

(d) $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 2 \cdot 3^2$

**9. Schnittpunkt Kreis-Gerade,** **694662**

Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Kreises $k$ mit der Geraden $g$:

(a) $k: \ x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25 = 0$ und $g: \ 3x + y + 5 = 0$

(b) $k: \ x^2 + y^2 - 4x - 25 = 0$ und $g: \ 3x + 7y - 35 = 0$

Überprüfen Sie Ihr Resultat mit Matlab.

**Lösung**

Die Geradengleichung wird zuerst in Parameterform gebracht:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Wir setzen die beiden Komponenten in die Kreisgleichung ein:

$$25 - 8(-5 - 3\lambda) + (-5 - 3\lambda)^2 + 6\lambda + \lambda^2 = 0 \ \Rightarrow \ 90 + 60\lambda + 10\lambda^2 = 0$$

mit der Lösung $\lambda_{1,2} = -3$ Der Schnittpunkt ist also bei

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$

Einsetzen in die Kreisgleichung führt auf $58\lambda(\lambda + 1) = 0$ also

$$\lambda_1 = 0 \text{ und } \lambda_2 = -1$$

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

```
syms x y
S1=solve( x^2+y^2+6*x-8*y+25==0, 3*x+y+5==0)
P=[S1.x S1.y ]
S2=solve(x^2+y^2-4*x-25==0,3*x+7*y-35==0)
Q=[S2.x S2.y ]
syms x y
S1=solve( x^2+y^2+6*x-8*y+25==0, 3*x+y+5==0)
```

```
P=[S1.x S1.y ]
% P =[ -3, 4]

S2=solve(x^2+y^2-4*x-25==0,3*x+7*y-35==0)
P=[S2.x S2.y ]
% P1 =[ 0, 5]
% P2=[ 7, 2]
```

## 10. Kreis durch 3 Punkte, 536673

Bestimmen Sie den Kreis durch die drei Punkte. Überprüfen Sie Ihr Resultat mit Matlab.

a) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{Q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{R} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Lösung**

(a) Wir suchen den Mittelpunkt $\vec{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$, der von allen drei Punkten den Abstand $r$ hat. Es müssen also folgende Gleichungen erfüllt werden

$$\left| \begin{array}{rcl} (1-M_1)^2 + (2-M_2)^2 & = & r^2 \\ (-1-M_1)^2 + (2-M_2)^2 & = & r^2 \\ (3-M_1)^2 + (4-M_2)^2 & = & r^2 \end{array} \right|$$

oder ausmultipliziert

$$\begin{array}{r} Q_1 : \\ Q_2 : \\ Q_3 : \end{array} \left| \begin{array}{rcl} (M_1)^2 + (M_2)^2 - 2M_1 - 4M_2 + 5 & = & r^2 \\ (M_1)^2 + (M_2)^2 + 2M_1 - 4M_2 + 5 & = & r^2 \\ (M_1)^2 + (M_2)^2 - 6M_1 - 8M_2 + 25 & = & r^2 \end{array} \right|$$

Quadratische Terme können eliminiert werden, indem man z.B. die erste Gleichung von den letzten beiden abzieht

$$\begin{array}{r} Q_2 - Q_1 : \\ Q_3 - Q_1 : \end{array} \left| \begin{array}{ccc} 4M_1 & = & 0 \\ 20 - 4M_1 - 4M_2 & = & 0 \end{array} \right|$$

Also liegt der Mittelpunkt bei $\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Wir setzen diese Koordinaten in $Q_1$ ein und erhalten

$$10 = r^2 \;\Rightarrow\; r = \sqrt{10}$$

(b) Wir suchen den Mittelpunkt $\vec{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$, der von allen drei Punkten den Abstand $r$ hat. Es müssen also folgende Gleichungen erfüllt werden

$$\left| \begin{array}{rcl} (3-M_1)^2 + (3-M_2)^2 & = & r^2 \\ (4-M_1)^2 + (3-M_2)^2 & = & r^2 \\ (0-M_1)^2 + (1-M_2)^2 & = & r^2 \end{array} \right|$$

oder ausmultipliziert

$$\begin{array}{r} Q_1 : \\ Q_2 : \\ Q_3 : \end{array} \left| \begin{array}{rcl} (M_1)^2 + (M_2)^2 - 6M_1 - 8M_2 + 25 & = & r^2 \\ (M_1)^2 + (M_2)^2 - 8M_1 - 6M_2 + 25 & = & r^2 \\ (M_1)^2 + (M_2)^2 - 2M_2 + 1 & = & r^2 \end{array} \right|$$

Quadratische Terme können eliminiert werden, indem man z.B. die erste Gleichung von den letzten beiden abzieht

$$\begin{array}{r} L_1 = Q_2 - Q_1 : \\ L_2 = Q_3 - Q_1 : \end{array} \left| \begin{array}{ccc} -2M_1 + 2M_2 & = & 0 \\ 6M_1 + 6M_2 - 24 & = & 0 \end{array} \right|$$

Jetzt lösen wir das lineare Gleichungsystem

$$\begin{array}{r|rcl|} L_1' = L_2 + 3L_1: & 12M_2 - 24 & = & 0 \\ L_2' = -L_1/2: & M_1 - M2 & = & 0 \end{array}$$

Also liegt der Mittelpunkt bei $\vec{M} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wir setzen diese Koordinaten in $Q_1$ ein und erhalten

$$5 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{5}$$

```
S=solve('(1-mx)^2+(2-my)^2-r^2=0','(-1-mx)^2+(2-my)^2-r^2=0', ...
        '(3-mx)^2+(4-my)^2-r^2 =0','mx,my,r')
S = [S.mx S.my S.r]
%S = [ 0, 5,  10^(1/2)]
%    [ 0, 5, -10^(1/2)] negativer Radius nicht sinnvoll
S=solve('(3-mx)^2+(4-my)^2-r^2=0,(4-mx)^2+(3-my)^2-r^2=0, ...
       mx^2+(1-my)^2-r^2= 0','mx,my,r')
S = [S.mx S.my S.r]
%S = [ 2, 2,  5^(1/2)]
```

## 13.5 Determinanten

1. **Determinanten,** **949369**

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen. Verwenden Sie den Satz von Sarrus und den Satz über Determinante von Diagonalmatrizen. Nützen Sie ausserdem aus, dass die Addition von Zeilen (oder Spalten) die Determinante nicht verändert, dass aber die Vertauschung von Zeilen, das Vorzeichen der Determinante ändert. Überprüfen Sie Ihre Resultate mit Matlab (Befehl `det(A)`).

(a) $\begin{pmatrix} \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ -\cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix}$

**Lösung**

(a) $\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$

(b) Sarrus'sche Regel: $1 \cdot 5 \cdot 9 + 2\dot{6} \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 8 \cdot 6 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 2 = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0$

(c) Zeilen vertauschen

$$\mathbf{C}' = (\mathbf{C}_4,\, \mathbf{C}_3,\, \mathbf{C}_2,\, \mathbf{C}_1)\ .$$

Dafür sind zwei Vertauschungen nötig $4 \leftrightarrow 1$ und $3 \leftrightarrow 2$. Bei jeder Vertauschung ändert die Determinante das Vorzeichen: $(-1)\cdot(-1) = 1$, d.h. durch zwei Vertauschungen ändert sich die Determinante nicht. So entsteht eine Diagonalmatrix. Die Determinante kann aus den Diagonalelementen berechnet werden: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

(d) Bringe die Matrix in Diagonalform $\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3,\ \mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5, \mathbf{A}_6 - 3\mathbf{A}_5)$. Dann ist die Determinante das Produkt der Diagonalelemente: $\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-2) = -2$.

(e) Wir verwenden die Notation $\mathbf{A}_i$ für die $i$-te Zeile der Matrix $\mathbf{A}$. Die Umformungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}' &= (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_5 - \mathbf{A}_1) \\
\mathbf{A}'' &= (\mathbf{A}'_1, \mathbf{A}'_2, \mathbf{A}'_3 - 2\mathbf{A}'_2,\ \mathbf{A}'_4 - 3\mathbf{A}'_2, \mathbf{A}'_5 - 4\mathbf{A}'_2) \\
\mathbf{A}'' &= (\mathbf{A}'_1, \mathbf{A}'_2, \mathbf{A}'_3 - 2\mathbf{A}'_2,\ \mathbf{A}'_4 - 3\mathbf{A}'_2, \mathbf{A}'_5 - 4\mathbf{A}'_2) \\
\mathbf{A}''' &= (\mathbf{A}''_1, \mathbf{A}''_2, \mathbf{A}''_3, \mathbf{A}''_4 - 3\mathbf{A}''_3, \mathbf{A}''_5 - 6\mathbf{A}''_3) \\
\mathbf{A}'''' &= (\mathbf{A}'''_1, \mathbf{A}'''_2, \mathbf{A}'''_3, \mathbf{A}'''_4, \mathbf{A}'''_5 - 4\mathbf{A}'''_4)
\end{aligned}$$

führen nacheinander auf die Matrizen: $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & 14 \\ 0 & 3 & 9 & 19 & 34 \\ 0 & 4 & 14 & 34 & 69 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & 6 & 22 & 53 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}''' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 17 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{A}'''' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Jetzt kann die Determinante als Produkt der Diagonalelemente berechnet werden: $\det(\mathbf{A}) = 1$

(f)

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}' &= (\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_3 - \mathbf{D}_1) \\
\mathbf{D}'' &= (\mathbf{D}'_1, \mathbf{D}'_2, \mathbf{D}'_3 - \mathbf{D}'_2)
\end{aligned}$$

führen nacheinander auf die Matrizen: $\mathbf{D}' = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & (b-a) & (b-a) \\ 0 & (b-a) & (c-a) \end{pmatrix}$ und $\mathbf{D}'' = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & (b-a) & (b-a) \\ 0 & 0 & (c-b) \end{pmatrix}$. Jetzt kann die Determinante als Produkt der Diagonalelemente berechnet werden: $\det(\mathbf{A}) = a \cdot (b-a) \cdot (c-b) = a^2b - a^2c - ab^2 + abc$

(g) Sarrus'sche Regel: $\det(\mathbf{A}) = (1-\lambda) \cdot (2-\lambda) \cdot (3-\lambda) - (1-\lambda) - (3-\lambda) = 2 - 9\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3$

(h) Sarrus'sche Regel: $\det(\mathbf{A}) = 16 - 12 = 4$

(i) Sarrus'sche Regel: $\det(\mathbf{A}) = 10$

(j) Sarrus'sche Regel: $\det(\mathbf{A}) = yz^2 + xy^2 + zx^2 - yx^2 - zy^2 - xz^2$. Übrigens lässt sich das umformen zu $(y-x)\cdot(x-z)\cdot(y-z)$

**2. Regel von Cramers,** **911705**

Lösen Sie die folgenden *inhomogenen quadratischen* linearen Gleichungssysteme mit Hilfe der Cramerscher Regel:

(a)

$$\begin{aligned} -x + 10y + 5z &= 3 \\ 3x - 6y - 2z &= -2 \\ -8x + 14y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned} 3y + 2x &= z + 1 \\ 3x + 2z &= 8 - 5y \\ 3z - 1 &= x - 2y \end{aligned}$$

**Lösung**

(a) Die Matrix-Darstellung lautet

$$\begin{pmatrix} -1 & 10 & 5 \\ 3 & -6 & -2 \\ -8 & 14 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Wir benützen die Schreibweise $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ und $\vec{A}_j$ ist die $j$-te *Spalte* von $\mathbf{A}$. Dann sind die Lösungen

$$\begin{aligned} x &= \frac{\det(\vec{b}, \vec{A}_2, \vec{A}_3)}{\det(\mathbf{A})} \\ y &= \frac{\det(\vec{A}_1, \vec{b}, \vec{A}_3)}{\det(\mathbf{A})} \\ z &= \frac{\det(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{b})}{\det(\mathbf{A})} . \end{aligned}$$

Die Determinanten sind nacheinander

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= 24 + 160 + 210 - 240 - 28 - 120 = 6 \\ \det(\vec{b}, \vec{A}_2, \vec{A}_3) &= -72 - 120 - 140 + 180 + 84 + 80 = 12 \\ \det(\vec{A}_1, \vec{b}, \vec{A}_3) &= 8 + 28 + 90 - 80 - 12 - 36 = 18 \\ \det(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{b}) &= 36 + 160 + 126 - 144 - 28 - 180 = -30 . \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung

$$x = \frac{12}{6} = 2\,,\ y = \frac{18}{6} = 3\,,\ z = \frac{-30}{6} = -5\,,\ .$$

(b) Mit der selben Schreibweise wie oben ergibt sich

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= -50 - 6 - 12 + 5 + 16 + 45 = -2 \\ \det(\vec{b}, \vec{A}_2, \vec{A}_3) &= -25 - 72 - 12 + 60 + 8 + 45 = 4 \\ \det(\vec{A}_1, \vec{b}, \vec{A}_3) &= 30 + 2 + 36 - 3 - 48 - 15 = 2 \\ \det(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{b}) &= -120 - 9 - 12 + 5 + 24 + 108 = -4 . \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung

$$x_1 = \frac{4}{-2} = -2\,,\ x_2 = \frac{2}{-2} = -1\,,\ x_3 = \frac{-4}{-2} = 2\,,\ .$$

(c)

$$x = \frac{66}{22} = 3,\ y = \frac{-22}{22} = -1,\ z = \frac{44}{22} = 2$$

**3. Determinante,** **522207**

Bestimmen Sie die Determinante. Eliminieren Sie zuerst Einträge in einer ganzen Spalte bis auf einen Eintrag[1], bevor Sie nach einer geeigneten Zeile oder Spalte entwickeln

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

**Lösung**

(a)

$$\det(\mathbf{A}) = -4$$

(b)

$$\det(\mathbf{B}) = -34$$

**4. Determinanten von linearen Abbildungen**

Bestimme die Determinante der folgenden linearen Abbildungen. Hinweis: Bestimme zuerst die Matrix M der Darstellung in einer Orthonormalbasis. Bestimme dann $\det(M)$.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 9x_2 \\ 3x_1 - 5x_2 \end{pmatrix}$

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $T(x, y) = (2x - 9y, 3x - 5y)$

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_3 \\ 5x_2 + 7x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $T(x, y, z) = (2x + 7y - 4z, 4x - 6y + 2z)$

**Lösung**

(a) Wir berechnen die Bilder der Basisvektoren:

$$\vec{e}_1' = T(\vec{e}_1) = T(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{e}_2' = T(\vec{e}_2) = T(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Die Matrix der Abbildung besteht aus den Bildern der Basisvektoren, die in die Spalten geschrieben werden: $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, also $\det(\mathbf{M}) = 17$

(b) Wir berechnen die Bilder der Basisvektoren:

$$\vec{e}_1' = T(\vec{e}_1) = T(1, 0) = (2, 3) \text{ und } \vec{e}_2' = T(\vec{e}_2) = T(0, 1) = (-9, -5)$$

Die Matrix der Abbildung besteht aus den Bildern der Basisvektoren, die in die Spalten geschrieben werden: $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, also $\det(\mathbf{M}) = 17$ (wie in der vorherigen Teilaufgabe, es ist nur die Schreibweise geändert).

[1] Addieren oder Subtrahieren von Spalten oder Zeilen verändert die Determinante nicht

(c) $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, also $\det(\mathbf{M}) = 4$

(d) $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -4 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$. Für Matrizen, die nicht quadratisch sind, ist die Determinante nicht definiert.

**5. Determinanten von linearen Abbildungen,** **366248**

Bestimme die Determinante der Abbildung $D(f(t)) = \frac{df}{dt}$ für die gegebene Basis. Hinweis: Bestimme zuerst die Matrix $\mathbf{D}$, die der linearen Abbildung entspricht. Bestimme dann $\det(D)$

(a) $\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$

(b) $\{1, t, \ldots, t^5\}$

(c) $\{\sin(t), \cos(t)\}$

**Lösung**

(a) Wir ordnen jeder Funktion einen Basisvektor zu

$$e^t \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e^{2t} \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e^{3t} \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Wir leiten alle Funktionen ab und stellen die Ableitung als Linearkombination der drei Funktionen dar:

$$e^t \xrightarrow{\frac{df}{dt}} e^t \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für die weiteren Funktionen gilt

$$e^{2t} \xrightarrow{\frac{df}{dt}} 2e^{2t} \hat{=} 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$e^{3t} \xrightarrow{\frac{df}{dt}} 3e^{3t} \hat{=} 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir schreiben die Bilder der Basisvektoren in eine Matrix

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} ,$$

also $\det(\mathbf{D}) = 6$

(b) Wir ordnen jeder Funktion einen Basisvektor zu

$$t^0 = 1 \hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; t \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots, \; t^5 \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Wir leiten alle Funktionen ab und stellen Sie als Linearkombination der Funktionen dar, z.B.

$$t^5 \xrightarrow{\frac{df}{dt}} 5t^4 \mathrel{\hat{=}} 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor ist die letzte Spalte der Matrix der Ableitung in dieser Basis. Zusammengefasst ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{=} \{1, t, t^2, t^3, t^4, t^5\} \xrightarrow{\frac{df}{dt}} \{0, 1, 2t, 3t^2, 4t^3, 5t^4\} \hat{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix am Schluss, ist $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, also $\det(\mathbf{D}) = 0$

(c) Wir leiten alle Basisvektoren ab

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{=} \{\sin(t), \cos(t)\} \xrightarrow{\frac{df}{dt}} \{\cos(t), -\sin(t)\} \hat{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix am Schluss ist $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, also $\det(\mathbf{D}) = 1$

**6. Äquivalenzumformungen für die Determinante,** **670545**

Es soll die Determinante von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ bestimmt werden. Anton formt folgendermassen um:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}, \text{ also } \det(\mathbf{A}) = 0 \cdot (-6) + 9 = 9$$

mit den *Zeilenum*formungen:[2] $\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2; \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)$.
Berta formt folgendermassen um:

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \text{ also } \det(\mathbf{A}) = 0 \cdot (-3) - (-1) \cdot (-9) = -9$$

mit den Zeilenumformungen:$\mathbf{B}' = (\mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2; \mathbf{A}_2)$.
Die Resultate für die Determinante unterscheiden sich durch das Vorzeichen. Anton und Berta sollten aber das gleiche Resultat erhalten. Wer hat den Fehler gemacht? Untersuchen Sie, ob wirklich beide zulässige Zeilenumformungen vorgenommen haben.

**Lösung**

In diesem Fall hat Berta Recht. Die Zeilenumformungen von Anton sind nicht zulässig. Benützen wir die Äquivalenzumformungen für die Determinante[3]

[2] $\mathbf{A}_1$ ist z.B. die erste Zeile von $\mathbf{A}$

[3] Es sind nicht die selben wie beim Gaussalgorithmus, wo man a) Zeilen addieren, b) Zeilen vertauschen und c) Zeilen mit einer Zahl multiplizeren kann

- Zeilen addieren
- Zeilen vertauschen (ändert das Vorzeichen)
- Faktor vor einer Zeile vor die Determinante schreiben

um aus der Matrix $\mathbf{A}'$ wieder die Matrix $A$ zu erhalten, dann sieht man, dass das Vorzeichen wechselt[4]

$$\det(\mathbf{A}') = \det(\mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2; \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2) = \det(\mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2; -\mathbf{A}_2) = \det(\mathbf{A}_1; -\mathbf{A}_2) = -\det(\mathbf{A}) \ .$$

[4]Bei jeden Schritt darf nur *eine* Äquivalenzumformung angewandt werden.

# Teil III

# Anwendungen

KAPITEL 14

# Umkehrabbildung und inverse Matrix

## 14.1 Inverse Matrix bestimmen

**Definition 14.1 Matrix-Inverse**

Sei $\mathbf{A}$ eine quadratische $n \times n$-Matrix. Existiert eine Matrix $\mathbf{B}$ so, dass gilt

$$\mathbf{AB} = \mathbb{1}$$

so nennt man $\mathbf{A}$ invertierbar und die Matrix $\mathbf{B}$ die Matrix-Inverse von $\mathbf{A}$.

Im Weiteren schreiben wir $\mathbf{A}^{-1}$ für die Matrix-Inverse von $\mathbf{A}$ und nicht wie oben $\mathbf{B}$, d.h. wir schreiben

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{1}$$

Die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ nennt man auch die inverse Matrix von $\mathbf{A}$.

**Beispiel 14.1 Linksinverse, Rechtsinverse** **285208**

Da die Matrizen nicht kommutativ sind, ergibt sich die Frage ob aus

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{1}$$

auch folgt

$$\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A} = \mathbb{1} \ ?$$

Multiplizieren Sie dafür den ersten Ausdruck mit $\mathbf{A}^{-1}$ und benutzen Sie die Gesetze für die Matrixmultiplikation (Satz 2)

**Lösung:**

Wir multiplizieren den ersten Ausdruck von links mit $\mathbf{A}^{-1}$. Es ergibt sich

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}) \odot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$$

Da wir wissen, dass die Matrixmultiplikation assoziativ ist, können wir die ersten beiden Matrizen mit einer Klammer gruppieren. So sehen wir, dass in der Klammer $(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})$ die Einheitsmatrix stehen muss, denn sie verändert die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ nicht. Also folgt

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A} = \mathbb{1} \ .$$

Aus dem Beispiel folgt, dass die Matrix mit ihrer Matrix-Inversen immer kommutiert.

Inverse Matrizen erlaubt ein lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

wie folgt zu lösen. Wir multiplizieren von beiden Seiten $\mathbf{A}^{-1}$ von links, dann ergibt sich:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}$$

Gemäss Definition ist das Matrixprodukt auf der linken Seite gleich der Einheitsmatrix,

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbb{1}$$

Da diese Matrix den Vektor $\vec{x}$ nicht verändert, können wir sie weglassen und erhalten die Lösung

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}\,.$$

**Beispiel 14.2 LGS lösen mit Gauss-Jordan** **332829**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -10 & 41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 103 \end{pmatrix}$$

Schreibe das Gleichungssystem zuerst als erweiterte Koeffizienten-Matrix. Wende dann das Gauss-Jordan Verfahren an.

**Lösung:**

Zuerst das Gauss Verfahren:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & -10 & 41 & 103 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{A}' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Mit der *Zeilen*-Umformung

$$\mathbf{A}' = (\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3 + 10\vec{A}_1)$$

Dann zusätzliche Schritte für Gauss-*Jordan*:

$$\mathbf{A}'' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{A}''' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

mit den Zeilen-Umformungen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'' &= (\mathbf{A}'_1 + \mathbf{A}'_2, \mathbf{A}'_2, \mathbf{A}'_3) \\ \mathbf{A}''' &= (\mathbf{A}''_1 + 3\mathbf{A}''_3, \mathbf{A}''_2 + 4\mathbf{A}''_3, \mathbf{A}''_3) \end{aligned}$$

Die Lösung kann jetzt direkt abgelesen werden:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Das Gauss-Jordan Verfahren wird in Matlab mit `rref` aufgerufen. Wird es benutzt um LGS in erweiterter Koeffizienten-Form zu lösen — wie hier in diesem Beispiel — ist es das flexibelste Instrument um LGSs zu lösen. Also: Immer `rref` verwenden, wenn ein LGS mit Matlab gelöst werden soll.

**Beispiel 14.3 Die Inverse bestimmen.** **332829**

Bestimme die Matrix-Inverse von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -9 \end{pmatrix}$ mit dem Gauss-Jordan Verfahren. Überprüfe das Resultat.

**Lösung:**

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A} = & \left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -9 \end{array}\right) \left| \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \right. & = \mathbb{1} \\ & \left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left| \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{array}\right) \right. & \\ & \left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left| \left(\begin{array}{ccc} 1 & 30 & 6 \\ 0 & -9 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{array}\right) \right. & \\ \mathbb{1} = & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left| \left(\begin{array}{ccc} 1 & 12 & 2 \\ 0 & -9 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{array}\right) \right. & = \mathbf{A}^{-1} \end{array}$$

Die Zeilen-Umformungen sind:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Q}' & = & (\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3 + 5\mathbf{Q}_2) \\ \mathbf{Q}'' & = & (\mathbf{Q}_1' + 6\mathbf{Q}_3', \mathbf{Q}_2' - 2\mathbf{Q}_3', \mathbf{Q}_3') \\ \mathbf{Q}''' & = & (\mathbf{Q}_1'' + 2\mathbf{Q}_2'', \mathbf{Q}_2'', \mathbf{Q}_3'') \end{array}$$

Kontrolle: Wenn wir die Matrix-Inverse richtig berechnet haben, gilt

$$\mathbf{Q} \odot \mathbf{Q}^{-1} = \mathbb{1} \ .$$

Beim Invertieren einer Matrix mit dem Gauss-Jordan Verfahren, werden die Umformungen auf die Einheitsmatrix angewendet. So werden die Zeilenumformungen auf der rechten Seite in der Einheitsmatrix "zwischengespeichert".
Betrachten wir dazu die Umformungen, des vorherigen Beispiels: Beim ersten Schritt

$$\mathbf{Q}' = (\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3 + 5\mathbf{Q}_2)$$

Entsteht auf der rechten Seite die Matrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Sie speichert die Umformung "3. Zeile plus 5 mal die 2. Zeile".

**Beispiel 14.4 Berechne das Produkt $\mathbf{P} \odot \mathbf{M}$.** **657484**

$$\mathbf{P} \odot \begin{pmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 1 & 2 & 3 \\ 100 & 200 & 300 \end{pmatrix}$$

Beschreibe den Effekt von $\mathbf{P}$ auf $\mathbf{M}$ in Worten.

**Lösung:**

$$\mathbf{P} \odot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 1 & 2 & 3 \\ 105 & 210 & 315 \end{pmatrix} .$$

In Worten: Zur dritten Zeile wir 5 mal die zweite Zeile addiert.

Diese Überlegungen können wir für alle Äquivalenzumformungen machen: Welche Umformungen angewendet wurden auf der linken Seite, das wird auf der rechten Seite gespeichert. Deshalb "enthält" am Schluss die Matrix auf der rechten Seite ($\mathbf{A}^{-1}$) alle Umformungen um die ursprüngliche Matrix in die Einheitsmatrix umzuformen, deshalb gilt dann

$$\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A} = \mathbb{1}$$

**Infobox 14.1 Zulässige Umformungen Gauss-Jordan-Verfahren**

- das Vielfache einer Zeile zu einer anderen addieren
- eine Zeile mit einer Zahl multiplizieren
- Zeilen vertauschen

Es sind die selben Umformungen wie beim Gauss-Verfahren (Definition 3 und Infobox 8.2), nur werden diese Schritte noch weiter ausgeführt, bis die Eins-Matrix $\mathbb{1}$ erzeugt wurde.

**Beispiel 14.5 Lösung des linearen Gleichungssystems mit der Inversen** **786014**

Berechne die Lösung $\vec{x}$ des LGS mit Hilfe der Inversen

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

und

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 33 & -10 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 21 & -1 & 11 \\ 61 & -3 & 32 \\ 83 & -4 & 43 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 22 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

Es gilt:

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b} \Rightarrow \vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}$$

Also

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weitere Erklärungen zu diesem Thema sind auch in [Papula, Bd. 2 I 5.5, p. 93] zu finden.

**Beispiel 14.6 Bestimme die Inverse von A und löse das folgende LGS** **183360**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

$$(\mathbf{A}|\mathbb{1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) = (\mathbb{1}|\mathbf{A}^{-1})$$

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

**Infobox 14.2 Weitere Gesetze für die Inverse**

Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ regulär, dann gilt

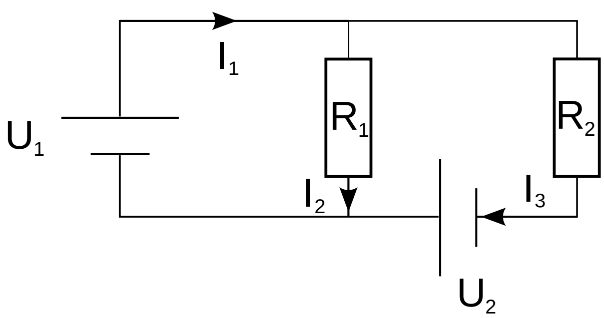
- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{A}^\intercal)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\intercal$

Die Beweise für die Sätze gehen wie folgt:

1. Gauss-Jordan-Verfahren kann rückwärts gelesen werden als Inversion der Inversen. $\mathbf{A}$ entsteht dann als Inverse von $\mathbf{A}^{-1}$
2. $\mathbf{A}\mathbf{B}\,(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbb{1}$ durch Multiplikation mit $\mathbf{A}^{-1}$ von links und dann mit $\mathbf{B}^{-1}$ von links auf beiden Seiten entsteht die ursprüngliche Aussage
3. Fachbuch

**Beispiel 14.7 Bestimme die Ströme $I_1$, $I_2$ und $I_3$** **117132**

Arbeite dabei mit der inversen Matrix.




**Lösung:**

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ R_1 \cdot I_2 &= U_1 \\ -R_1 \cdot I_2 + R_2 \cdot I_3 &= U_2 \end{aligned}$$

Wir schreiben das LGS in Matrixschreibweise

$$\mathbf{A}\vec{I} = \vec{b}$$

dabei gruppieren wir die Ströme in einem Vektor

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

die Koeffizienten in einem Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & R_1 & 0 \\ 0 & -R_1 & R_2 \end{pmatrix}$$

und die Inhommogenität ebenfalls in einem Vektor

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} .$$

Wir berechnen die Inverse

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} \\ 0 & \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} \end{pmatrix}$$

So ergeben sich die Ströme

$$\vec{I} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} U_1 \cdot (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) + \frac{U_2}{R_2} \\ \frac{U_1}{R_1} \\ \frac{U_1}{R_2} + \frac{U_2}{R_2} \end{pmatrix}$$

## 14.2 Existenz der Inversen

**Beispiel 14.8 Konstruiere die Projektion auf die Gerade**

$$g: \; y = -x$$

1. Bestimme die Projektions-Matrix
2. Bestimme die Inverse von $\mathbf{P}$.

**Lösung:**

Die Gerade hat den Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und den Normalenvektor $\vec{n}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die beiden Spalten der Projektionsmatrix ergeben sich aus der den Bildern der Basisvektoren unter der Projektion:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1' &= \vec{e}_1 - \vec{e}_1 \odot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} \cdot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\
\vec{e}_2' &= \vec{e}_2 - \vec{e}_2 \odot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} \cdot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Matrix der Projektion ist also $\mathbf{P} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$. Nun wenden wir das Gauss-Jordan-Verfahren an:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix} & \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix} & \quad \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix} & \quad \begin{pmatrix}2 & 0\\2 & 2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Weiter kann nicht umgeformt werden. $\mathbf{P}$ hat keine Inverse.

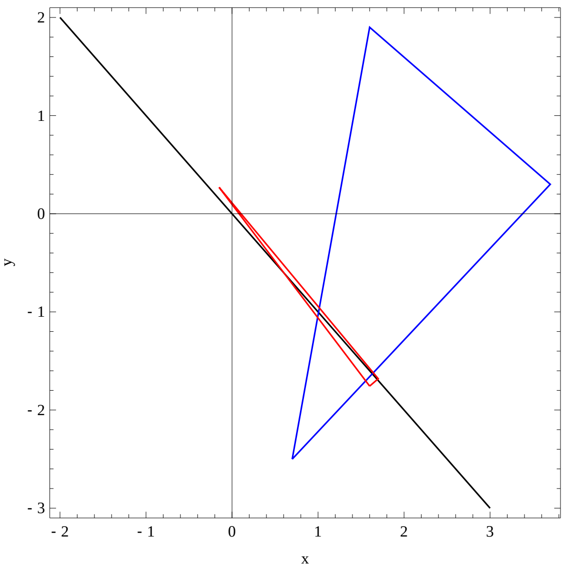
**Infobox 14.3**

Nicht alle Matrizen haben eine Inverse.

**Beispiel 14.9 Fast eine Projektion**

1. Berechne die Bilder der Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix}0.7\\-2.5\end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix}3.7\\0.3\end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix}-1.6\\1.9\end{pmatrix}$ unter der Abbildung
$$\mathbf{Q} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix}8 & -8\\-8 & 9\end{pmatrix}$$
2. Zeichne die Bildpunkte. Beschreibe das Bild des Dreiecks in Worten.
3. Invertiere $\mathbf{Q}$!

**Lösung:**




$$
\begin{array}{cc}
\mathbf{Q} & \mathbb{1} \\
\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ -16 & 16 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -16 & 16 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 18 & -16 \\ -16 & 16 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{-1}
\end{array}
$$

$\mathbf{Q}$ ist keine perfekte Projektion, d.h. das Dreieck wird nicht vollständig auf die Gerade projiziert. Die zweidimensionale Information des Dreiecks bleibt erhalten.
Mit Hilfe von $\mathbf{Q}^{-1}$ kann das Dreieck wieder rekonstruiert werden. Das ist nicht möglich bei einer perfekten Projektion, wie in der vorherigen Aufgabe.

**Infobox 14.4 Eine Matrix kann invertiert werden, falls Sie keine Projektion enthält.**

**Definition 14.2**

Sei $f$ eine Abbildung[a] von $E$ nach $F$ oder in Symbolen

$$f : E \mapsto F .$$

- $f$ heisst **injektiv**, falls für je zwei Elemente $x_1, x_2$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt: $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- $f$ heisst **surjektiv**, falls zu jedem $y \in F$ mindestens ein $x \in E$ existiert mit $f(x) = y$.
- $f$ heisst bijektiv, falls $f$ injektiv und surjektiv ist.

[a] Achtung, das Wort Abbildung bedeutet bereits, dass jedem $x \in E$ ein $y \in F$ zugeordnet wird.

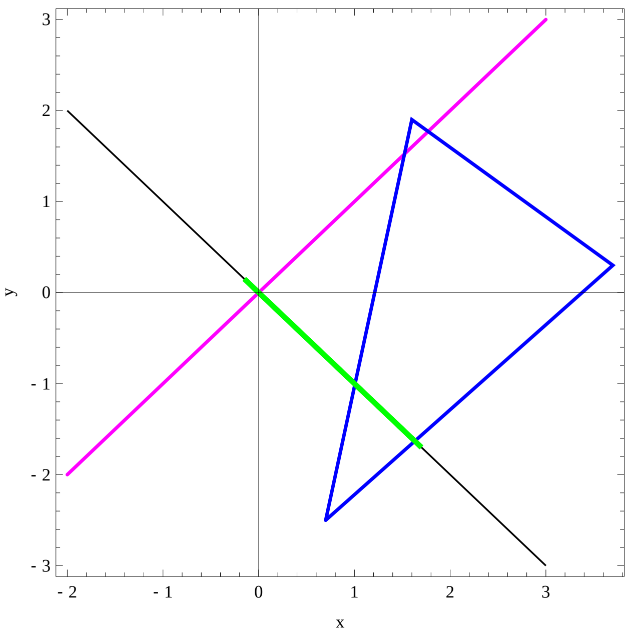



Abbildung 14.1: Bei der Projektion **P** wird die ganze violette Gerade auf den Ursprung abgebildet. Die Abbildung ist nicht injektiv. Deshalb gibt es keine Inverse.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.10]

**Satz 14.1 Existenz der Umkehrabbildung**

Ist $f : E \mapsto F$ bijektiv, so existiert eine eindeutige Abbildung $f^{-1} : F \mapsto E$, die jedem $y \in F$ ein $x \in E$ zuordnet mit $f(x) = y$. Diese Abbildung heisst Umkehr-Abbildung von $f$ und wird als $f^{-1}$ geschrieben.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.10]

In Abb. 14.1 wird gezeigt, dass die Abbildung **Q** die Abstände zur Geraden $g : y = -1x$ nur kleiner macht. Die Richtung $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ wird zwar geschrumpft wird, aber es wird nicht projiziert. Dann fallen durch die Abbildung **Q** keine weiteren Punkte auf die Gerade $g$ ausser die, die schon darauf sind. Deshalb ist **Q** injektiv[1] und hat auch eine Inverse.

**Infobox 14.5 Eigenschaften der (linearen) Projektion**

- Information über eine Dimension geht verloren.
- Es gibt noch mehr Vektoren als $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ die auf $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ abgebildet werden.
- Die Matrix, die eine Projektion enthält, erkennt man daran, dass die Spalten-Vektoren linear abhängig sind.

[1] surjektiv ist die Abbildung sowieso

**Satz 14.2 Invertierbare lineare Abbildung**

Sei $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $L(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x}$. Dann ist sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\mathbf{A}$ ist invertierbar
2. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
3. Der Rang der Matrix $\mathbf{A}$ ist $n$.
4. Die Spalten von $\mathbf{A}$ sind linear unabhängig, d.h. $\dim S(\mathbf{A}) = n$.
5. Die Zeilen von $\mathbf{A}$ sind linear unabhängig, d.h. $\dim Z(\mathbf{A}) = n$.
6. Die lineare Abbildung $L$ ist bijektiv.
7. Für jedes $\vec{b}$ hat die Gleichung $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ genau eine Lösung.
8. Die Gleichung $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$ hat nur die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.
9. Der Kern von $L$ besteht nur aus dem Nullvektor, d.h. $\dim \mathrm{Kern}(L) = 0$.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.465]

Trifft eine der Aussagen aus dem vorhergehenden Satz zu, so existiert auch die inverse Abbildung $L^{-1}(\vec{x})$ und es gilt

$$L^{-1}(\vec{x}) = \mathbf{A}^{-1} \odot \vec{x}$$

.

**Satz 14.3 Matrix einer injektiven Abbildung**

Sei $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $L(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x}$. Dann ist $L$ injektiv genau dann, wenn die Matrix $\mathbf{A}$ invertierbar ist.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.465]

# KAPITEL 15

## Statistik: Korrelation

In $\mathbb{R}^N$ mit $N > 3$ wird das Skalarprodukt benutzt, um Signale auf Ähnlichkeit zu untersuchen.

**Definition 15.1 Messvektor**

Der Vektor $\vec{y}$ gebildet aus den Messergebnissen heisst Messvektor, z.B.

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 2.7 \\ 3.1 \\ 3.3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Definition 15.2 Mittelwert**

Zum Messvektor $\vec{y}$ gehört der Mittelwert

$$\overline{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_i^n y_i$$

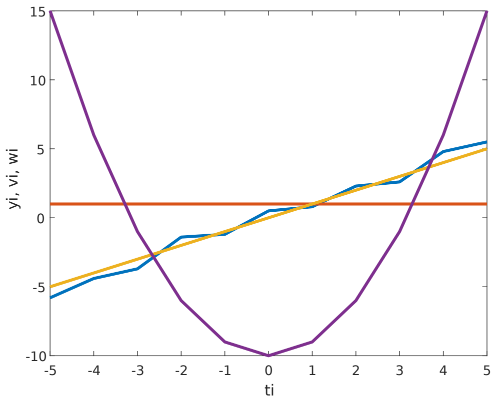
**Beispiel 15.1 Ähnlichkeit von Signalen grafisch** **182219**

Wir wollen das Signal $y(t_i) = y_i$ betrachten.
$u(t_i) = u_i = 1$, $v(t_i) = v_i = t_i$ und $w(t_i) = w_i = (t_i)^2 - 10$ sind Funktionen, die diskret aufgelistet wurden.
Plotten Sie die Funktionen in Matlab und entscheiden sie grafisch, welche der Funktionen am stärksten mit $y(t_i)$ korreliert ist, d.h. "ähnlich zu $y(t_i)$".

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_i$ | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_i$ | -5.8 | -4.4 | -3.7 | -1.4 | -1.2 | 0.5 | 0.8 | 2.3 | 2.6 | 4.8 | 5.5 |
| $u_i$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $v_i$ | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $w_i$ | 15 | 6 | -1 | -6 | -9 | -10 | -9 | -6 | -1 | 6 | 15 |

**Lösung:**

```
NN=11 % Anzahl Datenpunkte
ii=1:NN % Indizes
ti=ii-6 % Zeitpunkte
% Messvektor
yi=[-5.8 -4.4 -3.7 -1.4 -1.2 0.5 0.8 2.3 2.6 4.8 5.5 ];
ui=ii*0+1
%ui =   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1   1
vi=ti
%vi =  -5  -4  -3  -2  -1   0   1   2   3   4   5
wi=ti.^2-10
%wi =  15   6  -1  -6  -9 -10  -9  -6  -1   6  15
plot(ti,yi)
hold on
plot(ti,ui)
plot(ti,vi)
plot(ti,wi)
xlabel('ti') ; ylabel('yi, vi, wi')
hold off
```




**Beispiel 15.2 Ähnlichkeit von Signalen mathematisch ($\bar{k} = 0$)** **559735**

Wir wollen das Signal $y(t_i) = y_i$ betrachten.
$u(t_i) = u_i = 1$, $v(t_i) = v_i = t_i$ und $w(t_i) = w_i = (t_i)^2 - 10$ sind Funktionen, die diskret aufgelistet wurden.
Untersuchen Sie, welche der Funktionen am stärksten mit $y(t_i)$ korreliert ist.
Vorgehen:

1. Wir berechnen den Mittelwert von $\vec{y}$ und überprüfen, ob $\vec{u}$ , $\vec{v}$ und $\vec{w}$ den Mittelwert 0 haben.
2. Wir normieren $\vec{u}$ $\vec{v}$ und $\vec{w}$, z.B. $\vec{v}' = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$
3. Wir berechnen die Skalarprodukte $c_u = \vec{u}' \odot \vec{y}$, $c_v = \vec{v}' \odot \vec{y}$ und $c_w = \vec{w}' \odot \vec{y}$.

**Lösung:**

1. Die Mittelwerte sind 0 ($u(t)$ hat zwar den Mittelwert 1, bildet aber eine Ausnahme, die wir unten besprechen werden).

2. Die normierten Vektoren sind

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} 0.3015 \\ 0.3015 \\ 0.3015 \\ \vdots \end{pmatrix}, \ \vec{v}' = \begin{pmatrix} -0.4767 \\ -0.3813 \\ -0.2860 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w}' = \begin{pmatrix} 0.5121 \\ 0.2048 \\ -0.0341 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

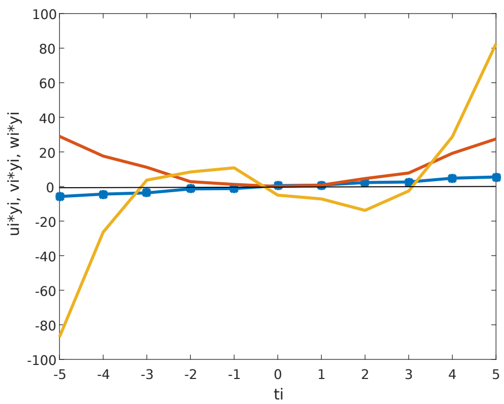
3. Die Skalarprodukte sind

$$c_u = \vec{u}' \odot \vec{y} = 0, \quad c_v = \vec{v}' \odot \vec{y} = 11.5941, \quad c_w = \vec{w}' \odot \vec{y} = -0.2663 \ .$$

   Wir sehen, dass der Betrag des Koeffizienten $|c_k|$ um so grösser ist, je “ähnlicher” die Funktion $k_j$ der Funktion $\vec{y}$ sind. Hier ist die Funktion $\vec{v}$ am ähnlichsten.

**Beispiel 15.3 Skalarprodukt grafisch** **685395**

Tragen Sie die Funktionen $u_i \cdot y_i$, $v_i \cdot y_i$ und $w_i \cdot y_i$ gegen $t_i$ auf und erkären Sie, weshalb die Skalarprodukte $\vec{u}' \odot \vec{y}$ und $\vec{w}' \odot \vec{y}$ im Betrag klein ausfallen $\vec{v}' \odot \vec{y}$ hingegen gross. **Lösung:**




Die Produkte $u_i \cdot y_i$, $w_i \cdot y_i$ haben Punkte über der x-Achse und unter der x-Achse. Bei Summieren heben sich diese Beiträge gegenseitig auf.
Das Produkt $\vec{v}' \odot \vec{y}$ hingegen hat nur Punkte über der x-Achse. Diese werden im Skalarprodukt aufsummiert.

```
plot(ti,ui.*yi,'*-')
hold on
plot(ti,vi.*yi,'--')
plot(ti,wi.*yi)
xlabel('ti') ; ylabel(' ui*yi, vi*yi, wi*yi')
hold off
```

**Infobox 15.1 Ähnlichkeit von Signalen**

Für den Messvektor $\vec{y}$ und die diskrete Funktionen $\vec{k}$ mit $\overline{k} = 0$ bestimmt die Zahl

$$c_k = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \odot \vec{y}$$

wie "ähnlich" die beiden Funktionen sind.

Wir werden später den Begriff "ähnlich" noch genauer fassen.

**Infobox 15.2 Ausnahme: Die konstante Funktion**

Die konstante Funktion bildet eine Ausnahme. Sie lässt sich zwar normieren, ihr Mittelwert kann aber nicht 0 sein (sonst würde sie verschwinden).

**Beispiel 15.4 Ähnlichkeit von Signalen ($\overline{k} \neq 0$)** **243144**

Wir wollen das Signal $y_i(t_i)$ betrachten.
$u(t_i) = u_i = 5 + t_i$, $v(t_i) = v_i = (t_i)^2$, $w(t_i) = w_i = t_i \cdot (t_i - 5) \cdot (t_i + 5)$ und $z_i = -w_i$ sind Funktionen, die diskret aufgelistet wurden.
Untersuchen Sie, welche der Funktionen am stärksten mit $y(t_i)$ korreliert ist.

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_i$ | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_i$ | -55 | -41 | -34 | -11 | -9 | 8 | 11 | 25 | 29 | 51 | 58 |
| $u_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $v_i$ | 25 | 16 | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 |
| $w_i$ | 0 | 36 | 48 | 42 | 24 | 0 | -24 | -42 | -48 | -36 | 0 |
| $z_i$ | -0 | -36 | -48 | -42 | -24 | 0 | 24 | 42 | 48 | 36 | 0 |

Vorgehen:

1. Wir berechnen den Mittelwert von $\vec{y}$ und berechnen für alle Funktionen $\vec{k} = \vec{y}, \vec{u}, \ldots, \vec{z}$:
$$\vec{k}' = \vec{k} - \overline{k} \cdot \vec{1}$$
2. Wir normieren die Funktionen $\vec{k}'$
$$\vec{k}'' = \frac{\vec{k}'}{|\vec{k}'|}$$
3. Wir berechnen die Skalarprodukte $r_{y,y} = \vec{y}'' \odot \vec{y}''$, $r_{u,y} = \vec{u}'' \odot \vec{y}''$, $r_{u,y} = \vec{v}'' \odot \vec{y}''$, $r_{u,y} = \vec{w}'' \odot \vec{y}''$ und $r_{z,y} = \vec{z}'' \odot \vec{y}''$.

**Lösung:**

1. Die Mittelwerte sind
$$\overline{y} = 0.29, \overline{u} = 5, \overline{v} = 10, \overline{w} = 0, \overline{z} = 0$$

Also

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} -57.91 \\ -43.91 \\ -36.91 \\ \vdots \end{pmatrix}, \ \vec{u}' = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -3 \\ \vdots \end{pmatrix}, \ \vec{v}' = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ -1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \ \vec{w}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 36 \\ 48 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ und } \vec{z}' = \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ -48 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

2. Die normierten Vektoren sind

$$\vec{y}'' = \begin{pmatrix} -0.4702 \\ -0.3505 \\ -0.2907 \\ \vdots \end{pmatrix}, \ \vec{u}'' = \begin{pmatrix} -0.4767 \\ -0.3814 \\ -0.2860 \\ \vdots \end{pmatrix}, \ \vec{v}'' = \begin{pmatrix} 0.5121 \\ 0.2048 \\ -0.0341 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3303 \\ 0.4404 \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ und } \vec{z}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.3303 \\ -0.4404 \\ \vdots \end{pmatrix},$$

3. Die Skalarprodukte sind

$$r_{y,y} = \vec{y}'' \odot \vec{y}'' = 1; r_{u,y} = \vec{u}'' \odot \vec{y}'' = 0.993, \ r_{v,y} = \vec{v}'' \odot \vec{y}'' = -0.0211$$

$$r_{w,y} = \vec{w}'' \odot \vec{y}'' = -0.6555, \ r_{z,y} = \vec{z}'' \odot \vec{y}'' = 0.6555$$

Es fällt auf, dass $|r_{u,y}|$, $|r_{w,y}|$ und $|r_{z,y}|$ gross sind, wenn wir mit $|r_{v,y}|$ vergleichen.
Der Messvektor hat deshalb Anteile von $\vec{u}$ (d.h. $t$) und Anteile von $\vec{w}$ oder $\vec{z}$ (d.h. $t^3$).
Wir stellen auch fest, dass $r_{w,y} = -r_{z,y}$, d.h. das Skalarprodukt sagt, ob zwei Signale in Phase sind oder die entgegengesetzte Phase haben.

**Beispiel 15.5 Maximum des Skalarprodukt**

Überlegen Sie, für welches $\vec{k}$ mit $\overline{k} = 0$ das Skalarprodukt

$$r_{u,k} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \odot \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$$

ein Betrags-Maximum erreicht. **Lösung:**

Das Maximum ist bei $\vec{k} = \vec{u}$. Dort gilt

$$r_{u,u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \odot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = 1$$

### 15.0.1 Der Korrelationskoeffizient

**Definition 15.3 Der empirische Korrelationskoeffizient**

Für die beiden Funktionen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ist der empirische Korrelations-Koeffizient

$$r_{xy} = \frac{\vec{x}'}{|\vec{x}'|} \odot \frac{\vec{y}'}{|\vec{y}'|}$$

mit

$$\vec{x}' = \vec{x} - \overline{x} \text{ und } \vec{y}' = \vec{y} - \overline{y}$$

[Bronstein et al., 2009, 16.3, p. 801]

**Infobox 15.3 Der empirische Korrelationskoeffzient**

Oft wird der empirische Korrelationskoeffizient geschrieben als

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{x,y}}{\sqrt{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2}} .$$

**Definition 15.4 Streuung, Standard-Abweichung**

Die Grösse

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}$$

wird Streuung genannt und

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

die Standardabweichung.

**Definition 15.5 Kovarianz**

Die Grösse

$$\sigma_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{n-1}$$

wird Kovarianz genannt.

**Infobox 15.4 Test ob Korrelation signifikant ist.**

Eine Korrelation mit $n$ Messungen ist signifikant, falls

$$|t| \geq t_{\alpha,m}$$

wobei

$$t = \frac{r_{x,y} \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-(r_{x,y})^2}} .$$

$t_{\alpha,m}$ mit $m = n - 2$ kann aus der Studentschen t-Verteilung ausgelesen werden.

STUDENT'S $t$ PERCENTAGE POINTS

| $m$ | 60.0% | 66.7% | 75.0% | 80.0% | 87.5% | 90.0% | 95.0% | 97.5% | 99.0% | 99.5% | 99.9% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.325 | 0.577 | 1.000 | 1.376 | 2.414 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 318.31 |
| 2 | 0.289 | 0.500 | 0.816 | 1.061 | 1.604 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 22.327 |
| 3 | 0.277 | 0.476 | 0.765 | 0.978 | 1.423 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 10.215 |
| 4 | 0.271 | 0.464 | 0.741 | 0.941 | 1.344 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 7.173 |
| 5 | 0.267 | 0.457 | 0.727 | 0.920 | 1.301 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 5.893 |
| 6 | 0.265 | 0.453 | 0.718 | 0.906 | 1.273 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 5.208 |
| 7 | 0.263 | 0.449 | 0.711 | 0.896 | 1.254 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 4.785 |
| 8 | 0.262 | 0.447 | 0.706 | 0.889 | 1.240 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 4.501 |
| 9 | 0.261 | 0.445 | 0.703 | 0.883 | 1.230 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 4.297 |
| 10 | 0.260 | 0.444 | 0.700 | 0.879 | 1.221 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 4.144 |
| 11 | 0.260 | 0.443 | 0.697 | 0.876 | 1.214 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 4.025 |
| 12 | 0.259 | 0.442 | 0.695 | 0.873 | 1.209 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 3.930 |
| 13 | 0.259 | 0.441 | 0.694 | 0.870 | 1.204 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 3.852 |
| 14 | 0.258 | 0.440 | 0.692 | 0.868 | 1.200 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 3.787 |
| 15 | 0.258 | 0.439 | 0.691 | 0.866 | 1.197 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 3.733 |
| 16 | 0.258 | 0.439 | 0.690 | 0.865 | 1.194 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 3.686 |
| 17 | 0.257 | 0.438 | 0.689 | 0.863 | 1.191 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.646 |
| 18 | 0.257 | 0.438 | 0.688 | 0.862 | 1.189 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.610 |
| 19 | 0.257 | 0.438 | 0.688 | 0.861 | 1.187 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.579 |
| 20 | 0.257 | 0.437 | 0.687 | 0.860 | 1.185 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.552 |
| 21 | 0.257 | 0.437 | 0.686 | 0.859 | 1.183 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.527 |
| 22 | 0.256 | 0.437 | 0.686 | 0.858 | 1.182 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.505 |
| 23 | 0.256 | 0.436 | 0.685 | 0.858 | 1.180 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.485 |
| 24 | 0.256 | 0.436 | 0.685 | 0.857 | 1.179 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.467 |
| 25 | 0.256 | 0.436 | 0.684 | 0.856 | 1.178 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.450 |
| 26 | 0.256 | 0.436 | 0.684 | 0.856 | 1.177 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.435 |
| 27 | 0.256 | 0.435 | 0.684 | 0.855 | 1.176 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.421 |
| 28 | 0.256 | 0.435 | 0.683 | 0.855 | 1.175 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.408 |
| 29 | 0.256 | 0.435 | 0.683 | 0.854 | 1.174 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.396 |
| 30 | 0.256 | 0.435 | 0.683 | 0.854 | 1.173 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.385 |
| 35 | 0.255 | 0.434 | 0.682 | 0.852 | 1.170 | 1.306 | 1.690 | 2.030 | 2.438 | 2.724 | 3.340 |
| 40 | 0.255 | 0.434 | 0.681 | 0.851 | 1.167 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 3.307 |
| 45 | 0.255 | 0.434 | 0.680 | 0.850 | 1.165 | 1.301 | 1.679 | 2.014 | 2.412 | 2.690 | 3.281 |
| 50 | 0.255 | 0.433 | 0.679 | 0.849 | 1.164 | 1.299 | 1.676 | 2.009 | 2.403 | 2.678 | 3.261 |
| 55 | 0.255 | 0.433 | 0.679 | 0.848 | 1.163 | 1.297 | 1.673 | 2.004 | 2.396 | 2.668 | 3.245 |
| 60 | 0.254 | 0.433 | 0.679 | 0.848 | 1.162 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 | 3.232 |
| $\infty$ | 0.253 | 0.431 | 0.674 | 0.842 | 1.150 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 3.090 |

**Beispiel 15.6 Bestimmen Sie, ob Korrelation signifikant sind.**

Wir wählen eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.01, d.h. 1%. Betrachten Sie die Korrelationskoeffizienten $r_{u,y}$, $r_{v,y}$ und $r_{w,y}$ aus der vorigen Aufgabe. **Lösung:**

Die Korrelationskoeffizienten sind

$$r_{u,y} = 0.993,\ r_{v,y} = -0.0211, r_{w,y} = -0.6555$$

Wir berechnen die $t-$Werte für diese Koeffizienten, z.B.

$$t_{u,y} = \frac{r_{u,y} \cdot \sqrt{11-2}}{\sqrt{1-(r_{u,y})^2}} = 25.22$$

Anderseits ist bei 11 Datenpunkten ($m = 11-2$) der t-Wert 2.821. $t_{u,y} = 25.22$ liegt gut darüber, also kann man daraus schliessen, dass $\vec{u}$ und $\vec{y}$ korreliert sind. Für die anderen Korrelationskoeffizienten erhalten wir

$$t_{v,y} = -0.0633 \text{ und } t_{w,y} = -2.604 \; ,$$

zwei Werte, die betragsmässig unterhalb des geforderten t-Werts für 11 Datenpunkte liegen. Wir schliessen, dass weder $\vec{v}$ noch $\vec{w}$ mit $\vec{y}$ korreliert sind

**Beispiel 15.7 Summenzeichen, Mittelwert**

Es sei $\overline{y} = 0$ gegeben. Berechnen Sie

$$\sum_i^n y_i$$

**Lösung:**

$$\sum_i^n y_i = n \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \sum_i^n y_i}_{\overline{y}} = 0$$

**Beispiel 15.8 Mittelwert** **42144**

Zeigen Sie, dass der Vektor $\begin{pmatrix} y_1 - \overline{y} \\ y_2 - \overline{y} \\ \vdots \\ y_n - \overline{y} \end{pmatrix}$ den Mittelwert $0$ hat. **Lösung:**

$$\mu' = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \overline{y} = \overline{y} - \frac{1}{n} \cdot n \cdot \overline{y} = 0$$

**Beispiel 15.9 Summenzeichen, Mittelwert**

Es sei $\overline{y} = 0$ gegeben. Berechnen Sie den Mittelwert des Messvektors

$$\vec{y}' = \vec{y} - \vec{1} \cdot \mu \text{ mit } \mu \in \mathbb{R} \; .$$

**Lösung:**

$$
\begin{aligned}
\overline{y'} &= \frac{1}{n}\sum_i^n y_i' = \frac{1}{n}\sum_i^n y_i - \mu = \frac{1}{n}\left(\sum_i^n y_i - \sum_i^n \mu =\right) \\
&= \underbrace{\frac{1}{n}\cdot\sum_i^n y_i}_{\overline{y}} - \frac{1}{n}\cdot\sum_i^n \mu = 0 - \frac{1}{n}\cdot n\cdot\mu = -\mu
\end{aligned}
$$

**Beispiel 15.10 Summenzeichen, Skalarprodukt**

Es sei gegeben:

$$\overline{x} = 0, \overline{y} = 0 \text{ und } \vec{x} \odot \vec{y} = 0$$

Berechnen Sie das Skalarprodukt

$$\vec{y}' \odot \vec{x}'$$

mit

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{1}\cdot\lambda,\ \vec{y}' = \vec{y} - \vec{1}\cdot\mu \text{ und } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\ .$$

**Lösung:**

$$
\begin{aligned}
\vec{x}' \odot \vec{y}' &= \sum_i^n (x_i - \lambda)\cdot(y_i - \mu) = \sum_i^n x_i\cdot y_i - \lambda\cdot y_i - x_i\cdot\mu + \lambda\cdot\mu \\
&= \underbrace{\sum_i^n x_i\cdot y_i}_{\vec{x}\odot\vec{y}} - \lambda\cdot\underbrace{\sum_i^n y_i}_{n\cdot\overline{y}} - \mu\cdot\underbrace{\sum_i^n x_i}_{\overline{x}} + \sum_i^n \lambda\cdot\mu \\
&= 0 - \lambda\cdot 0 - \mu\cdot 0 + n\cdot\lambda\cdot\mu = n\cdot\lambda\cdot\mu
\end{aligned}
$$

KAPITEL 16

# Lineare Regression

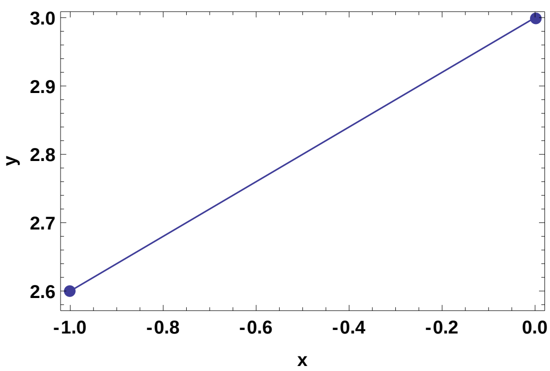
In diesem Kapitel wird behandelt, wie man überbestimmte lineare Gleichungssysteme löst, z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.54 \\ 2.98 \\ 3.35 \\ 3.88 \end{pmatrix} \tag{16.1}$$

Wir haben zwei unbekannte, $c$ und $m$ aber vier Gleichungen. Es ist sofort klar, dass es hier keine exakte Lösung gibt, ausser in einigen Sonderfällen, wo nur zwei der vier Gleichungen linear unabhängig sind. Das würden wir in der erweiterten Koeffizientenform daran sehen, dass durch das Gaussverfahren *zwei* Nullzeilen entstehen.
Wenn das Gleichungssystem nicht überbestimmt ist, fällt uns die Lösung nicht schwer.

**Beispiel 16.1 Gerade durch zwei Punkte**

Bestimme die Gerade durch die zwei Punkte.




Schreibe dafür ein Gleichungssystem in der Form

$$\mathrm{M} \odot \begin{pmatrix} c \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

Das Gleichungssystem lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} c \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Inverse vom $\mathbb{M}$ ist

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Also sind die Parameter der Gerade

$$\begin{pmatrix} c \\ m \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \odot \begin{pmatrix} 2.6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

und die Gleichung der Geraden lautet

$$y = 3 + 0.4 \cdot x$$

**Satz 16.1 Lösung eines überbestimmten linearen Gleichungssystems**

Wir betrachten ein überbestimmtes linearen Gleichungssystems der Form

$$\mathbf{F} \odot \vec{c} = \vec{y}$$

Dabei ist $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $n < m$ und $\vec{c}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
Die Lösung[a] im Sinne der kleinsten Quadrate ergibt sich aus dem **Normalensystem**

$$\mathbf{F}^\intercal \odot \mathbf{F} \odot \vec{c} = \underbrace{\mathbf{F}^\intercal \odot \vec{y}}_{=:\vec{y}'}$$

Die Matrix $\mathrm{M} = \mathbf{F}^\intercal \odot \mathbf{F}$ ist quadratisch $\mathrm{M} \in \mathbf{R}^{n \times n}$.
Das Normalensystem lässt sich auflösen zu

$$\vec{c} = \mathbf{M}^{-1}\, \vec{y}'$$

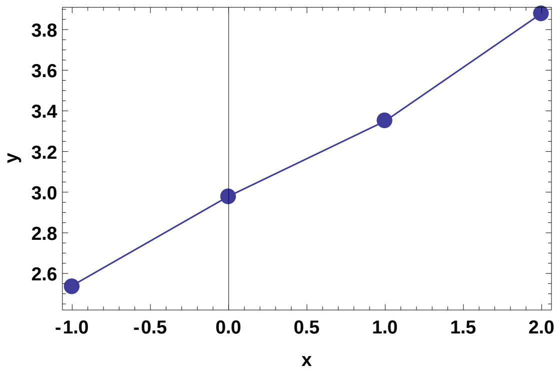
[a] falls es eine Lösung gibt

[Papula, Bd. 3 III 6]
[Goebbels and Ritter, 2011, p.817]

Wir vergleichen jetzt lösbare LGSs mit überbestimmten LGS. Bei einem überbestimmten LGS kommt noch ein Schritt hinzu: Bevor man das Gleichungssystem lösen kann, muss man es auf beiden Seiten mit $\mathbf{F}^\intercal$ multiplizieren. So entsteht ein quadratisches Gleichungssystem — wir nennen es das Normalensystem. Es kann mit der Standard-Methode, nämlich z.B. mit der Multiplikation (von links) mit $\mathrm{M}^{-1}$, gelöst werden.

**Beispiel 16.2 Gerade durch vier Punkte**

Bestimme die Gerade, die den Abstand zu den Punkten minimiert. Die Daten können sie aus 16.1 auf Seite 195 auslesen.




Schreibe dafür ein Gleichungssystem in der Form

$$\mathbb{F} \odot \begin{pmatrix} c \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Berechne dann das Normalensystem und löse es.

**Lösung:**

Das Gleichungssystem lautet

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{F}} \odot \begin{pmatrix} c \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.7 \\ 3.1 \\ 3.3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Durch die Multiplikation mit $\mathbf{F}^\intercal$ auf beiden Seiten ergibt sich das Normalensystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{M}} \odot \begin{pmatrix} c \\ m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 13.1 \\ 8.6 \end{pmatrix}}_{=:\vec{y}'}$$

Die Inverse vom $\mathbb{M}$ ist

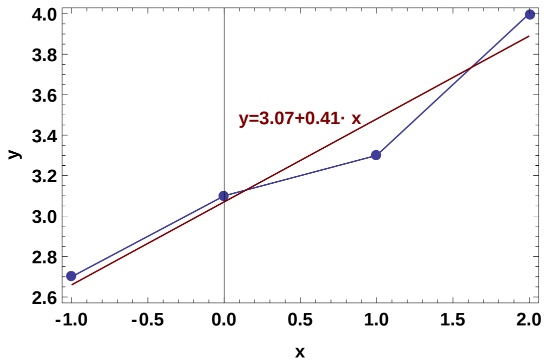
$$\mathbb{M}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Also sind die Parameter der Geraden

$$\begin{pmatrix} c \\ m \end{pmatrix} = \mathbb{M}^{-1} \odot \begin{pmatrix} 13.1 \\ 8.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.07 \\ 0.41 \end{pmatrix}$$

und die Gleichung der Geraden lautet

$$y = 3.07 + 0.41 \cdot x$$



Bei der Lösung der Aufgabe wird ersichtlich, dass es keine “Lösung” im strengen Sinn gibt, dass nämlich die Gerade durch die Punkte gehen würde. Sie befindet sich zwischen den Punkten und zwar so, dass der Abstand zu den Punkten minimal wird.

## 16.1 Herleitung

Die Herleitung ist interessant, weil sie zeigt, wie der Abstand zwischen den Messpunkten und der Geraden minimiert wird. Sie weist zwei Schwierigkeiten auf

- die Matrixmultiplikation in Komponentenschreibweise
- die Ableitung weder nach der Variablen $x$ noch nach der Variablen $y$ sondern nach den Parametern $m$ und $c$

## 16.2 Matrixmultiplikation in Komponentenschreibweise

**Definition 16.1 Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor**

Das Produkt einer Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ mit einem Vektor $\vec{x} = (x_i)$ ergibt einen Vektor $\vec{y}$. Dabei müssen die Dimensionen übereinstimmen, d.h. für $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times m}$ ist die Multiplikation nur definiert falls $\vec{x} \in \mathbf{R}^m$.
Der Vektor $y = \mathbf{A} \odot \vec{x}$ hat die Komponenten

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot x_k$$

**Definition 16.2 Multiplikation von zwei Matrizen**

Das Produkt einer Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ mit einer weiteren Matrix $\mathbf{B} = (b_{ij})$ wieder eine Matrix $\mathbf{C} = (c_{ij})$. Dabei müssen die Dimensionen übereinstimmen, d.h. für $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times m}$ ist die Multiplikation nur definiert falls $\vec{B} \in \mathbf{R}^{m\times p}$.
Die Matrix $\mathbf{C}$ hat $n \times p$ Einträge. Die Komponenten sind

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

**Beispiel 16.3 Homogenität und Additivität 1**

Zeige, dass die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor homogen und additiv ist, zeige also

$$\vec{y} = \mathbf{A}\left(\lambda \cdot \vec{x}\right) = \lambda \cdot (\mathbf{A}\vec{x})$$

und

$$\vec{z} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})\vec{x} = \mathbf{A}\vec{x} + \mathbf{B}\vec{x}$$

**Lösung:**
**Homogenität:**

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(\lambda \cdot x_j) = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j$$

**Additivität:**

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} (a_{i,j} + b_{i,j}) \cdot x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j + \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \cdot x_j$$

**Beispiel 16.4 Homogenität und Additivität 2**

Zeige, dass die Multiplikation einer Matrix mit einer Matrix homogen und additiv ist, zeige also

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}(\lambda \mathbf{B}) = \lambda(\mathbf{AB})$$

und

$$\mathbf{D} = \mathbf{E}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \mathbf{EF} + \mathbf{EG}$$

**Lösung:**

**Homogenität:**

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(\lambda \cdot b_{k,j}) = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

**Additivität:**

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} e_{i,k}(f_{k,j} + g_{k,j}) = \sum_{k=1}^{n} e_{i,k} f_{k,j} + \sum_{k=1}^{n} e_{i,k} g_{k,j}$$

Hier ist der Messvektor

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 2.7 \\ 3.1 \\ 3.3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Um die Gerade mit minimalem Abstand zu den Messpunkten zu bestimmen, berechnen wir den Verbindungsvektor zwischen der Geraden $c + m \cdot x$ und den gemessenen Punkten $y_i$:

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + m \cdot x_1 - y_1 \\ c + m \cdot x_2 - y_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Die Länge dieses Vektors im Quadrat ist

$$|\vec{d}|^2 = \sum_{i}^{n} (d_i)^2 = \sum_{i}^{n} (c + m \cdot x_i - y_i)^2$$

Diese Länge soll so kurz werden wie möglich. Wo können wir schrauben, so dass diese Länge möglichst kurz wird? Nur $c$ und $m$ sind noch nicht festgelegt, während die Messpunkte bei $x_i$ und $y_i$ ja gemessen wurden und feststehen. Also *optimieren* wir nach $c$ und $m$. Die Länge von $\vec{d}$ hat ein Minimum, falls $c$ richtig gewählt wurde

$$\begin{aligned} \frac{d}{dc}|\vec{d}|^2 &= \sum_{i}^{n} \frac{d}{dc}(c + m \cdot x_i - y_i)^2 = \sum_{i}^{n} 2(c + m \cdot x_i - y_i) \underbrace{\frac{d}{dc}(c + m \cdot x_i - y_i)}_{=1} \\ &= \sum_{i}^{n} 2(c + m \cdot x_i - y_i) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Die Länge von $\vec{d}$ hat ein Minimum, falls $m$ richtig gewählt wurde

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dm}|\vec{d}|^2 &= \sum_i^n \frac{d}{dm}(c+m\cdot x_i - y_i)^2 = \sum_i^n 2(c+m\cdot x_i - y_i)\underbrace{\frac{d}{dm}(c+m\cdot x_i - y_i)}_{=x_i} \\
&= \sum_i^n 2(c+m\cdot x_i - y_i)\cdot x_i \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Wir dividieren beide Gleichungen durch 2 und stellen etwas um

$$\begin{aligned}
\sum_i^n (c+m\cdot x_i) &= \sum_i^n y_i \\
\sum_i^n c\, x_i + m\cdot (x_i)^2 &= \sum_i^n y_i \cdot x_i
\end{aligned}$$

oder auch in Matrixform

$$\begin{pmatrix} \sum_i^n 1 & \sum_i^n x_i \\ \sum_i^n x_i & \sum_i^n (x_i)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i^n y_i \\ \sum_i^n y_i \cdot x_i \end{pmatrix} \tag{16.2}$$

Das sind zwei Gleichungen für zwei Unbekannte $c$ und $m$, wir nähern uns als dem Ziel. Anstatt hier weiter zu rechnen, kehren wir zum 'Rezept' im vorherigen Satz zurück. Wir können ja diese beiden Zeilen mit dem Normalensystem in diesem Satz vergleichen. Wir haben die Matrix $\mathbf{F}$ definiert

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} (x_1)^0 & (x_1)^1 \\ (x_2)^0 & (x_2)^1 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \text{ also } f_{ij} = (x_i)^{j-1}$$

Dann ergibt

$$\mathbf{F}^\intercal \vec{y} = \vec{y}' \text{ mit } y_i' = \sum_{k=1}^n (x_k)^{(i-1)} \cdot (y_k)$$

Die zwei Elemente des Vektors $\vec{b}$ sind

$$\begin{aligned}
y_1' &= \sum_{k=1}^n (x_k)^{1-1}\cdot x_k = \sum_{k=1}^n y_k \\
y_2' &= \sum_{k=1}^n (x_k)^{2-1}\cdot x_k = \sum_{k=1}^n x_k \cdot y_k
\end{aligned}$$

Und ausserdem

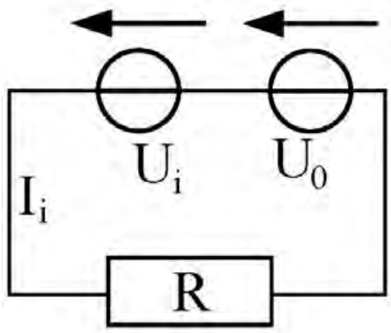
$$\mathbf{F}^\intercal \mathbf{F} = \mathbf{M} \text{ mit } m_{ij} = \sum_{k=1}^n (x_k)^{i-1}\cdot (x_k)^{j-1}$$

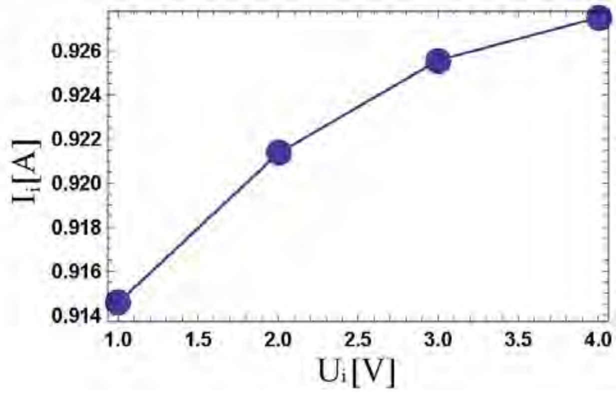
Die vier Elemente der Matrix $\mathbf{M}$ sind

$$\begin{aligned}
m_{1,1} &= \textstyle\sum_{k=1}^n (x_k)^{1-1}\cdot (x_k)^{1-1} = \sum_{k=1}^n 1; & m_{2,1} &= \textstyle\sum_{k=1}^n 1\cdot x_k \\
m_{1,2} &= \textstyle\sum_{k=1}^n 1\cdot x_k; & m_{2,2} &= \textstyle\sum_{k=1}^n 1\cdot (x_k)^2
\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass die Matrix in Gleichung 16.2 genau die Matrix M im Normalensystem ist und dass der Vektor auf der rechten Seite von Gleichung 16.2 genau der Vektor $\vec{y}'$ im Normalensystem ist.
Zusammenfassend bedeutet dies, dass in einem überbestimmten linearen Gleichungssystem eine Lösung gefunden werden kann im Sinne der kleinsten Quadrate, d.h. die resultierende Gerade geht möglichst nahe an den gemessenen Punkten vorbei.

**Beispiel 16.5 Innenwiderstand eines Föhn**




In der abgebildeten Messanordnung wird der Innenwiderstand eines Föhns im Betrieb gemessen. Wie gross ist $R$, wie gross ist die Netzspannung $U_0$?
Gesetz: $U_0 + U_i - I_i \cdot R = 0$
Lese $U_i$ und $I_i$ aus, schreibe das obige Gesetz als $I(V)$ und löse das (überbestimmte) Gleichungssystem im Sinne der kleinsten Quadrate.

**Lösung:**
Die Linearität ist in der Form

$$\frac{U_0 + U_i}{R} = I_i \;\Rightarrow\; \frac{U_0}{R} + U_i \frac{1}{R} = I_i$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}} \begin{pmatrix} \frac{U_0}{R} \\ \frac{1}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9145 \\ 0.921 \\ 0.925 \\ 0.927 \end{pmatrix}$$

Multipliziere auf beiden Seiten mit $F^\intercal$ und erhalten das Normalensystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} \frac{U_0}{R} \\ \frac{1}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.69 \\ 9.24 \end{pmatrix}$$

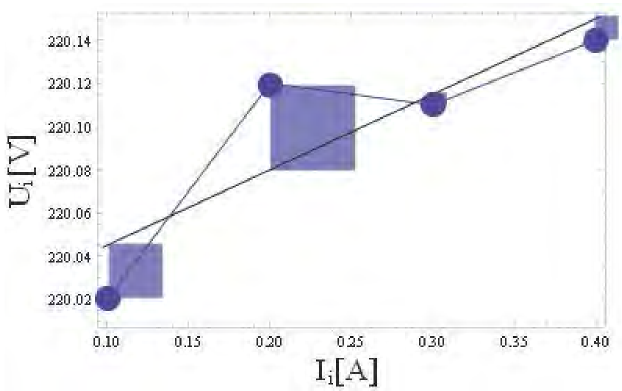
Lösung des Normalensystems (Multiplikation mit $\mathrm{M}^{-1}$ auf beiden Seiten):

$$\begin{pmatrix} \frac{U_0}{R} \\ \frac{1}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.91 \\ 0.0043 \end{pmatrix} =: \vec{v}$$

Daraus ergibt sich

$$R = \frac{1}{v_2} = 232.2\,\Omega; \; U_0 = v_1 \cdot R = 211.7\,\mathrm{V}$$

Der folgende Graph zeigt die Lösung grafisch. Ausserdem sind auch die Abstands-Quadrate, die minimiert wurden eingezeichnet.




## 16.3 Übrigens

Der Satz am Anfang des Kapitels ist allgemein. Er funktioniert auch, wenn wir eine Punktmenge durch eine Parabel annähern wollen

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

Dann wird **F** wie folgt definiert:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Das Konzept kann noch weiter gesponnen werden für noch höhere Potenzen

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots$$

Für die die tiefste Potenz $y = c_0$ ergibt sich das System

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (c_0) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Mit dem Normalensystem für $n$-Punkte

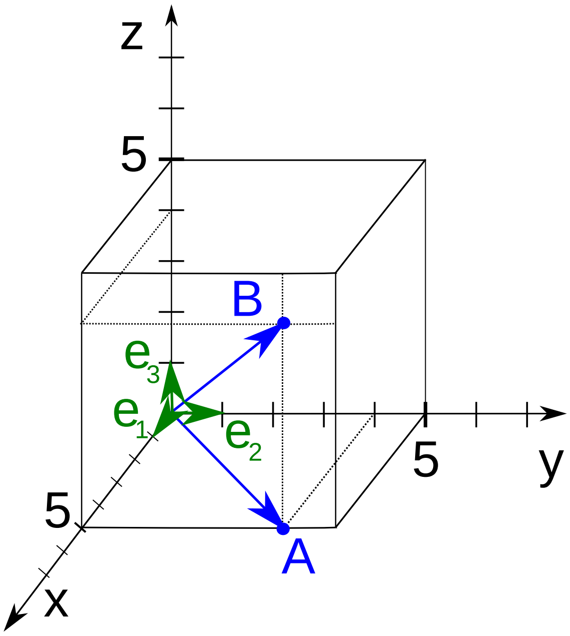
$$n \cdot c_0 = \sum_i y_i$$

und der Lösung $c_0 = \frac{\sum_i y_i}{\sum_i 1} = \frac{\sum_i y_i}{n}$. D.h. die Lösung ist der Mittelwert des Messvektors $\vec{y}$.

# KAPITEL 17

## Koordinaten- und Basistransformation

**Beispiel 17.1 Drücke $\vec{A}$ und $\vec{B}$ als Linearkombination von $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_3$ aus**




$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 5\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 5\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$$

**Definition 17.1 Standard-Basis**

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ heissen **Standard-Basis** (auch kartesische Basis, kartesisanisches Koordinatensystem)

Was wir also bis jetzt indutitiv[1] gemacht haben, ist die Zerlegung von Vektoren in Komponenten entlang der Standardbasis. Diese Komponenten werden dann in Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ untereinander notiert.

**Infobox 17.1 Spaltenvektoren vs. Zeilenvektoren**

Papula benutzt Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und keine Zeilenvektoren $(a_x, a_y)$

[Papula, Bd. 1 II 2.1]

**Beispiel 17.2 Basis-Wechsel**

Drücke $\vec{A}$ und $\vec{B}$ in der Basis $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3$ aus

$$\{\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3\} = \{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}\}$$

$$\{\vec{A},\ \vec{B}\} = \{\begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -20 \\ -15 \\ -10 \end{pmatrix}\}$$

**Lösung:**
Wir stellen das Gleichungssystem für die Vektoren auf

$$\lambda \vec{f}_1 + \nu \vec{f}_2 + \zeta \vec{f}_3 \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da $\vec{A}$ keine z-Komponente hat und nur $\vec{f}_3$ eine z-Komponente hat, folgern wir, dass $\zeta = 0$. Komponentenweise geschrieben ergibt sich nun

$$\begin{aligned} 4\lambda + (-2)\mu &= 14 \\ 4\lambda + 3\mu &= -1 \end{aligned}$$

mit der Lösung $\lambda = 2$ und $\nu = -3$. Zusammenfassend schreiben wir

$$2\vec{f}_1 - 3\vec{f}_2 + 0\vec{f}_3 = \vec{A}$$

oder in der Basis $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ gilt[a]

$$\vec{A}^F = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

[1] d.h. ohne viel nachzudenken

Genau gleich ergibt sich für $\vec{B}$:

$$-2\vec{f}_1 + 1\vec{f}_2 - 2\vec{f}_3 = \vec{B} \; .$$

[a] Wir benutzen das hochgestellte $F$ um zu sagen, dass diese Schreibweise in der Basis $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ gilt. Ohne Angabe der Basis gehen wir davon aus, dass die Standardbasis verwendet wurde. Mehr dazu im Kapitel über den Basis-Wechsel.

Der Basis-Wechsel ist rechnerisch sehr aufwendig. Im Kapitel über den Gauss-Algorithmus werden wir lernen, wie wir die entsprechenden Gleichungssysteme effizienter lösen können.

Die Basis $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_3$ ist eine *Orthonormalbasis*. Die Vektoren $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_3$ sind zwar eine Basis, aber die Basisvektoren sind weder normiert noch orthogonal. Wir werden meist mit einer **Orthonormalbasis** arbeiten.

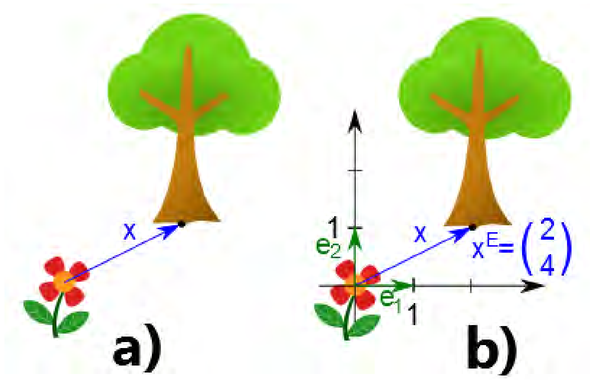



Abbildung 17.1: Der Vektor $\vec{x}$ ist auch ohne Basis in der Ebene festgelegt.

Wir erinnern uns, dass die Komponenten-Notation der Vektoren z.B. $\vec{x}^E = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ oder auch

$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2 \cdot \vec{e}_2$$

folgendes bedeutet: Zur Spitze des Vektors $\vec{x}$ kommst du, indem du $x_1$ Schritte entlang von $\vec{e}_1$ machst und $x_2$ Schritte entlang von $\vec{e}_2$. Die Notation wird in Abbildung 17.1 erklärt: Der Vektor $\vec{x}$, liegt fest im Raum, hier verbindet er die Blume mit dem Stamm des Baumes. Wenn wir eine Basis $[\vec{e}_1, \vec{e}_2] =: \mathbf{E}$ einführen, dann erst können wir $\vec{x}$ in Komponenten dieser Basis zerlegen, hier $\vec{x}^E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Schreibweise, die sich auf die Basis $\mathbf{E}$ bezieht, markieren wir mit einem hochgestellten $\mathbf{E}$. Achtung: Wenn sich die Komponenten auf die Standardbasis beziehen, dann wird meistens $\vec{x}$ geschrieben, obwohl $\vec{x}^E$ gemeint ist.
Als nächstes legen wir die Basisvektoren in die Spalten der Matrix $\mathbf{E}$ und können nun schreiben

$$\vec{x} = \mathbf{E} \odot \vec{x}^E \; .$$

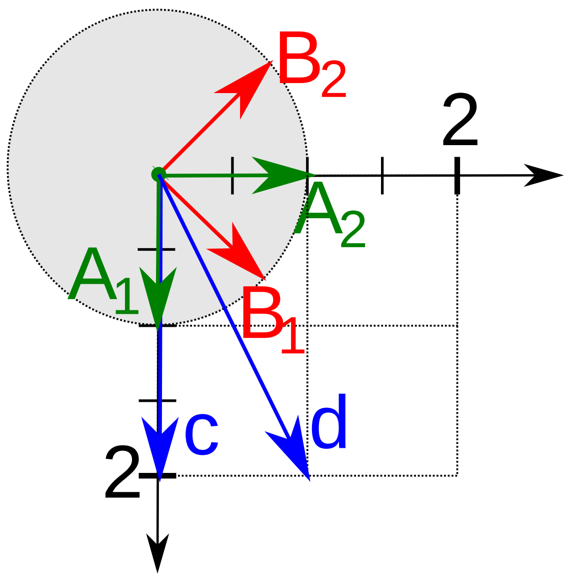
**Definition 17.2 Basismatrix**

Die Basismatrix $\mathbf{A}$ enthält die Basisvektoren in den Spalten:

$$\mathbf{A} = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$$

## 17.1 Basiswechsel für Vektoren

**Beispiel 17.3 Eine Basis um 45° gedreht I**




Die Basis $\mathbf{A} = \left[\vec{A}_1, \vec{A}_2\right]$ ist die Standardbasis. Die Basis $\mathbf{B} = \left[\vec{B}_1, \vec{B}_2\right]$ ist gegenüber $\mathbf{A}$ um 45° gedreht .
Schreibe die folgenden Vektoren in der Basis $\mathbf{B}$:

$$\vec{a}^A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \ \vec{b}^A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

und die oben eingezeichneten Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$.

**Lösung:**

Der Vektor $\vec{a}$ ist genau der erste Basisvektor von $\mathbf{B}$. Also

$$\vec{a}^B = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Der Vektor $\vec{b}$ ist der zweite Basisvektor von $\mathbf{B}$. Also

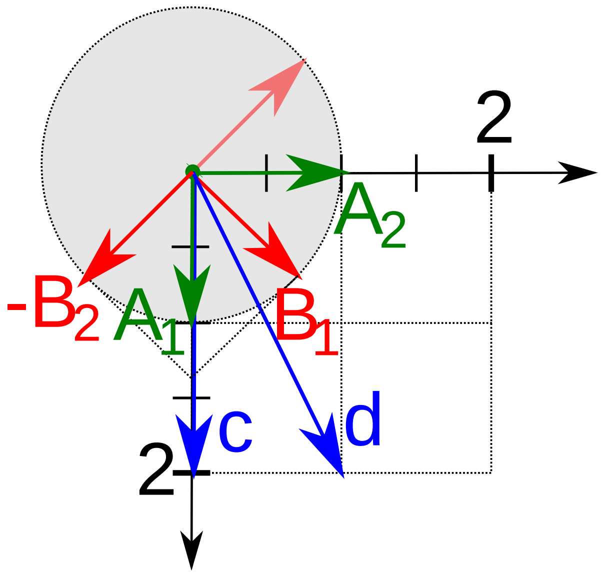
$$\vec{b}^B = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Für $\vec{c}$ braucht es schon etwas mehr Aufwand. Wir stellen fest, dass der Vektor $\vec{e}'_1 - \vec{e}'_2$ in die Richtung von $\vec{c}$ zeigt. Wir schreiben deshalb $\vec{c}'^B = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Dieser Vektor hat die Länge $\left|\vec{c}'^B\right| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Wir normieren diesen Vektor und strecken ihm um $\lambda = 2$ so erhalten wir $\vec{c}^B$:

$$\vec{c}^B = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Für $\vec{d}^A = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ gilt

$$\vec{d}^B = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$$




Zwar können in Ausnahmefällen — wie im vorherigen Beispiel — Vektoren von der einen Basis in die andere übertragen werden, doch wird dieses Verfahren schnell sehr aufwendig. Deshalb brauchen wir ein systematisches Vorgehen für den Basiswechsel. Um genau zu sein: Das übertragen von einem Vektor in die andere geht ohne Problem, denn der Vektor ändert sich nicht (z.B. $\vec{x}$ in Abb. 17.1 bleibt immer der selbe Vektor, unabhängig von der Basis). Es sind einzig die Komponenten bezüglich einer Basis, die sich ändern: Wenn wir die Basis ändern, ändern sich auch die Komponenten $\vec{x}^A \neq \vec{x}^B$.
Die Änderung der Komponenten bei einem Basiswechsel kann wie folgt hergeleitet werden: Wir stellen $\vec{x}$ in der Basis $\mathbf{A}$ dar, und dann in der Basis $\mathbf{B}$:

$$\vec{x} = \mathbf{A}\vec{x}^A = \mathbf{B}\vec{x}^B$$

Durch Multiplikation mit $\mathbf{B}^{-1}$ von links lösen wir auf nach $\vec{x}^B$ auf

$$\vec{x}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\vec{x}^A$$

**Satz 17.1 Koordinatentransformation**

Sei $\mathbf{A} = \left(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n\right)$ die Matrix einer Basis, und $\mathbf{B} = \left(\vec{B}_1, \vec{B}_2, \ldots, \vec{B}_n\right)$ die Matrix einer anderen Basis. Seien $\vec{x}^A$ die Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich $\mathbf{A}$ und $\vec{x}^B$ die Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich $\mathbf{B}$. Dann gilt

$$\vec{x}^B = \mathbf{T}\vec{x}^A \text{ mit } \mathbf{T} := \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$$

[Goebbels and Ritter, 2011, p.471]

**Definition 17.3 Transformationsmatrix**

$\mathbf{T}$ heisst die **Transformationsmatrix**

**Beispiel 17.4 Eine Basis um 45° gedreht II**

Berechne die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$. Transformiere dann die Vektoren $\vec{a}$ bis $\vec{d}$ in die Basis $\mathbf{B}$.

**Lösung:**

$$\mathbf{T} = \mathbf{B}^{-1} \underbrace{\mathbf{A}}_{\mathbb{1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} .$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}^B &= \mathbf{T}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\
\vec{b}^B &= \mathbf{T}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\
\vec{c}^B &= \mathbf{T}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \\
\vec{d}^B &= \mathbf{T}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Bei der Transformationen der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ entstehen die Basisvektoren $\vec{B}_1$ und $\vec{B}_2$. Also sind wir ganz sicher, dass die Transformation richtig verlaufen ist.

## 17.2 Orthogonale Matrizen und ihre Inverse

**Definition 17.4 Orthogonale Matrix**

Ein Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heisst orthogonal, wenn die Spaltenvektoren zueinander senkrecht stehen **und** normiert sind.

Achtung: Die Spalten einer ortho**gonalen** Matrix bilden eine ortho**normale** Basis!

**Beispiel 17.5 $\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^\intercal$**

Überprüfen Sie ob die Matrix $\mathbf{A}$ orthogonal ist. Berechnen Sie dann $\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^\intercal$.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1 & -3\\3 & 1\end{pmatrix}$$

**Lösung:**

Die Spalten der Matrix sind

$$\vec{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \text{ und } \vec{A}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$$

Die Skalarprodukte sind

$$\begin{aligned}
\vec{A}_1 \odot \vec{A}_1 &= \frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{10}}(1\cdot 1 + 3\cdot 3) = 1 \\
\vec{A}_2 \odot \vec{A}_2 &= \frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{10}}(3\cdot 3 + 1\cdot 1) = 1 \\
\vec{A}_1 \odot \vec{A}_2 &= \frac{1}{\sqrt{10}\sqrt{10}}(1\cdot(-3) + 3\cdot 3) = 0
\end{aligned}$$

$\mathbf{A}$ ist also eine ortogonale Matrix.

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{A}^\intercal = \frac{1}{\sqrt{10}}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1 & -3\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\-3 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}10 & 0\\0 & 10\end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

Wir wollen nun das Produkt $\mathbf{A}^\intercal \odot \mathbf{A}$ für alle orthogonale Matrizen $\mathbf{A}$ berechnen.

Dafür schreiben wir die Matrix mit Hilfe ihrer Spalten als

$$\mathbf{A} = \left[\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots\right]$$

Beim Transponieren verwandeln sich die Spalten in die Zeilen

$$\mathbf{A}^\intercal = \begin{pmatrix} \vec{A}_1^\intercal \\ \vec{A}_2^\intercal \\ \dots \end{pmatrix}$$

Wie in Matlab können wir durch die Transposition um einen Spaltenvektor in einen Zeilenvektor umwandeln! So ergibt das Produkt

$$\mathbf{A}^\intercal \odot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^\intercal \\ \vec{a}_2^\intercal \\ \dots \end{pmatrix} \odot \left[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vdots\right] = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^\intercal \odot \vec{a}_1 & \vec{a}_1^\intercal \odot \vec{a}_2 & \dots \\ \vec{a}_2^\intercal \odot \vec{a}_1 & \vec{a}_2^\intercal \odot \vec{a}_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Die Spalten stehen senkrecht aufeinander, deshalb verschwinden alle Vektorprodukte ausserhalb der Diagonalen. Auf der Diagonalen bleiben Vektorprodukte der Form

$$\vec{a}_1^\intercal \odot \vec{a}_1 = \vec{a}_2^\intercal \odot \vec{a}_2 = 1$$

Sie ergeben 1, weil die Vektoren normiert sind.

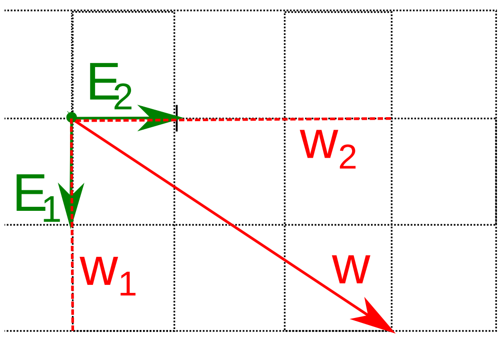
**Satz 17.2 Das Inverse einer orthogonalen Matrix**

Die Inverse der orthogonalen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $\mathbf{A}^\intercal$.

## 17.3 Transformation zwischen orthonormalen Basen

Dieser Abschnitt schliesst auf eine unerwartete Weise an das Kapitel über Skalarprodukte und Projektionen an.

**Beispiel 17.6 Komponenten in einer Orthonormalbasis**




Bestimmen Sie die Komponenten des Vektors $\vec{w}$ durch Projektion auf die Basisvektoren.

**Lösung:**

Die Komponenten sind

$$\begin{aligned} w_1 &= \vec{E}_1 \odot \vec{w} = 2 \\ w_2 &= \vec{E}_2 \odot \vec{w} = 3 \end{aligned}$$

Also gilt

$$\vec{w}^E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Komponenten des Vektors lassen sich durch eine Projektion auf die Basisvektoren berechnen. Beachte, dass dies nur dann geht, wenn die Basisvektoren orthogonal zu einander stehen.
Die Transformation von der Standardbasis in eine andere Orthonormalbasis $\mathbf{B} = \left[\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3, \ldots\right]$ geht gemäss dem vorherigen Satz mit der Tranformationsmatrix $\mathbf{T}$:

$$\vec{w}^B = \mathbf{B}^{-1}\mathbb{1}\vec{w}^E = \mathbf{B}^\intercal\vec{w}^E$$

Die ersten Komponenten in der Basis $\mathbf{B}$ berechnen sich also über[2]

$$\begin{aligned} w_1 &= \vec{B}_1 \odot \vec{w} \\ w_2 &= \vec{B}_2 \odot \vec{w} \\ &\ldots \end{aligned}$$

**Satz 17.3 Transformation von der Standardbasis in eine Orthonormalbasis**

Die Komponenten $w_i$ eines Vektors $\vec{w}$ in einer Orthonormalbasis $\mathbf{B}$ berechnen sich durch die Projektion des Vektors auf die Basisvektoren $\vec{B}_i$

$$w_i = \vec{B}_i \odot \vec{w}$$

**Beispiel 17.7 Komponenten in einer Orthonormalbasis**

Bestimmen Sie die Komponenten der Vektoren $\vec{a}$ bis $\vec{d}$ in der Orthonormalbasis

$$\mathbf{G} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

**Lösung:**

Wir transformieren von der Standardbasis in die Orthonormalbasis, deshalb ist die Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \mathbf{G}^\intercal$$

und die Vektoren sind in dieser Basis

$$\vec{a}^G = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b}^G = -\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c}^G = \sqrt{\frac{2}{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{d}^G = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{5}} - \frac{3}{\sqrt{10}} \\ 3\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix},$$

[2] das hochgestellte $\mathbf{B}$ an jeder Komponente wird der Übersichtlichkeit-halber weggelassen

## Übrigens

Dieser Satz wird wichtig sein für die Fourierreihen. Auf dem Intervall $t \in [0, T]$ bilden die Funktionen

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\cos(n\omega_0\, t) \\ &\sin(n\omega_0\, t) \\ \text{mit }\ \omega_0 &= \frac{2\pi}{T} \text{ und } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

eine orthonormale Basis bezüglich dem Skalarprodukt

$$\langle f|g\rangle = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot g(t)dt\ .$$

Diese Basis heisst Fourierbasis.

Auf dem Intervall $t \in [0, T]$ hat jede Funktion unendlich viele Funktionswerte — für jedes $t$ einen und es gibt unendlich viele Werte von $t$ zwischen $0$ und $T$. Diese Funktionswerte werden im Skalarprodukt oben als "Komponenten" betrachtet, und die unendlich vielen Summanden über das Integral zusammengezählt

$$\underbrace{\sum_i f_i \cdot g_i}_{\text{diskreter Fall}} \quad \to \quad \int_0^T f(t)\cdot g(t)dt$$

Ausserdem gibt es unendlich viele Basisvektoren, denn die Basisvektoren tragen die Indizes $n \in [1, 2, 3, \ldots]$. Jedes Signal $y(t)$ der Länge $T$ lässt sich darstellen als eine Summe von Cosinus- und Sinusschwingungen

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(n\omega_0\, t) + b_n \cdot \cos(n\omega_0\, t)\right]$$

mit

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)1dt \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos(n\omega_0\, t)dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin(n\omega_0\, t)dt \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass man hier $y(t)$ als einen Vektor betrachtet und seine Komponenten in der Fourier-Basis angibt. Die Komponenten berechnen sich durch die Projektion des Signals auf die einzelnen Basis-Vektoren.

## KAPITEL 18

# Diskrete Fouriertransformation

**Beispiel 18.1 Von der diskreten Funktion zu einem Messvektor: Diskretisierung** **100405**

Diskretisiere die Funktionen

$$1,\ \cos(t),\ \sin(t),\ \cos(2t),\ \sin(2t),\ \cos(3t)$$

für die Stützstellen

| $t$: | $0$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|

Benutze in Matlab eine anonyme Funktion wie z.B. `f=@(t) cos(t)*sin(t)`

**Lösung:**
Wir nummerieren die Funktionen mit den Indizes 0 bis 5 und werten jede Funktion an den gegebenen Stellen aus. Wir erhalten z.B.

$$\vec{l}_1 = \begin{bmatrix} \cos(0) \\ \cos(\frac{\pi}{}) \\ \cos(\frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\pi) \\ \cos(\frac{4\pi}{3}) \\ \cos(\frac{5\pi}{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ -0.5 \\ -1 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

und für die weiteren Funktionen

$$\vec{l}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \vec{l}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.866 \\ 0.866 \\ 0 \\ -0.866 \\ -0.866 \end{bmatrix},\ \vec{l}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ 1 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix},\ \vec{l}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.866 \\ -0.866 \\ 0 \\ 0.866 \\ -0.866 \end{bmatrix},\ \vec{l}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

**Beispiel 18.2 Von der Messung zur kontinuierlichen Funktion: Interpolation** **109186**

Nähere das gemessene Signal mit einer Linearkombination der Funktionen

$$1,\ \cos(t),\ \sin(t),\ \cos(2t),\ \sin(2t),\ \cos(3t)$$

| $t$: | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$: | 14 | -9 | 5 | -6 | 5 | -9 |

**Lösung:**
Wir diskretisieren die Basisfunktionen an den gegebenen Stellen und schreiben für jede Stützstelle eine Gleichung:

$$\left|\begin{array}{rcccccccc}
0: & a_0+ & a_1+ & 0+ & a_3+ & 0+ & a_5 & = & 14\\
\frac{\pi}{3}: & a_0+ & 0.5a_1+ & 0.866025a_2- & 0.5a_3+ & 0.866025a_4- & a_5 & = & -9\\
\frac{2\pi}{3}: & a_0- & 0.5a_1+ & 0.866025a_2- & 0.5a_3- & 0.866025a_4+ & a_5 & = & 5\\
\pi: & a_0- & a_1+ & 0+ & a_3+ & 0- & a_5 & = & -6\\
\frac{4\pi}{3}: & a_0- & 0.5a_1- & 0.866025a_2- & 0.5a_3+ & 0.866025a_4+ & a_5 & = & 5\\
\frac{5\pi}{3}: & a_0+ & 0.5a_1- & 0.866025a_2- & 0.5a_3- & 0.866025a_4- & a_5 & = & -9
\end{array}\right|$$

oder als Linearkombination von Vektoren

$$a_0\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+a_1\cdot\begin{bmatrix}1\\0.5\\-0.5\\-1\\-0.5\\0.5\end{bmatrix}+a_2\cdot\begin{bmatrix}10\\0.866025\\0.866025\\0\\-0.866025\\-0.866025\end{bmatrix}+a_3\cdot\begin{bmatrix}1\\-0.5\\-0.5\\1\\-0.5\\-0.5\end{bmatrix}+a_4\cdot\begin{bmatrix}0\\0.866025\\-0.866025\\0\\0.866025\\-0.866025\end{bmatrix}+a_5\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\-9\\5\\-6\\5\\-9\end{bmatrix}$$

oder auch in Matrix-Schreibweise

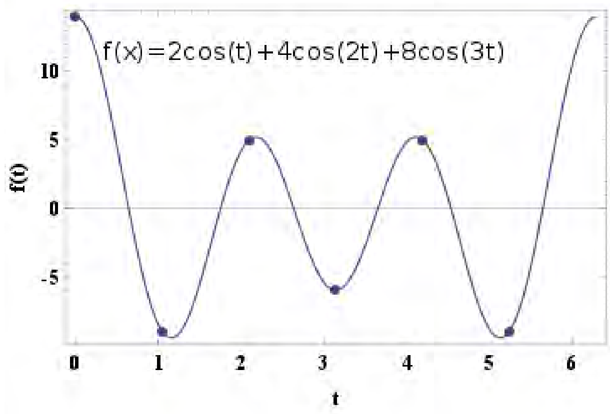
$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 0. & 1 & 0. & 1\\1 & 0.5 & 0.866025 & -0.5 & 0.866025 & -1\\1 & -0.5 & 0.866025 & -0.5 & -0.866025 & 1\\1 & -1 & 0. & 1 & 0. & -1\\1 & -0.5 & -0.866025 & -0.5 & 0.866025 & 1\\1 & 0.5 & -0.866025 & -0.5 & -0.866025 & -1\end{bmatrix}}_{=:\mathbf{F}}\odot\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\-9\\5\\-6\\5\\-9\end{bmatrix}$$

Die Lösung ergibt sich durch Multiplikation der Inversen $\mathbf{F}^{-1}$ auf beiden Seiten

$$\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\end{bmatrix}=\mathbf{F}^{-1}\odot\begin{bmatrix}14\\-9\\5\\-6\\5\\-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\0\\4\\0\\8\end{bmatrix}$$

Durch die Punkte geht also die Funktion

$$f(t)=0\cdot1+2\cdot\cos(t)+0\cdot\sin(t)+4\cdot\cos(2t)+0\cdot\sin(2t)+8\cdot\cos(3t)=2\cos(t)+4\cos(2t)+8\cos(3t)$$




**Ausganslage:**
Es liegt ein periodisches Signal vor

1. als Liste $\vec{m}$
2. als Funktion $f$.

Im ersten Fall kann man direkt weiterrechnen, im zweiten Fall wird die Funktion ersetzt durch eine Liste $\vec{m}$ von Abtastwerten mit einheitlichen Zeitabständen.
Man stelle sich etwa vor, dass verschiedene Laute in ein Mikrofon gesprochen wurden. Dabei wird in kurzen Zeitabständen die Druckamplitude gemessen. Die Messung lässt sich darstellen wie in Abb. 18.1.

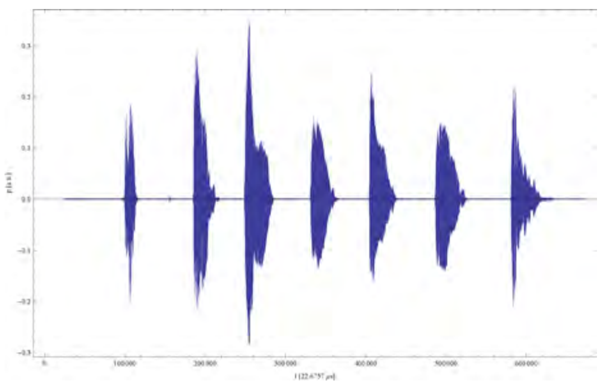


Abbildung 18.1: Aufnahme der Laute a, e, i, o, ä, ö und ü. Der Zeitabstand der Messung des Druckes beträgt 22.6757 $\mu$s.

**Ziel:**
Das Signal soll möglichst gut angenähert werden durch eine Überlagerung von reinen Sinus- und Cosinusschwingungen, d.h. von Vielfachen von Schwingungen der Form

$$\begin{aligned} y &= \cos(0 \cdot x) = 1,\ y = \cos(x),\ y = \cos(2\,x),\ y = \cos(3\,x),\ \ldots \\ y &= \sin(x),\ y = \sin(2\,x),\ y = \sin(3\,x),\ \ldots \end{aligned}$$

Wir nehmen des Resultat vorweg: Im Fall, dass wir einen kurzen Zeitabschnitt heranzoomen, könnten wir den wesentlichen Teil der Schwingung aus

$$f(t) = 1 + 2\cos(t) + 3\sin(t) + 4\cos(2t) + 5\sin(2t) + 6\cos(3t)$$

erhalten. Dies wird auch in Abb.18.2 gezeigt. Wir werden noch später besprechen, wie man auf dieses Resultat kommt.

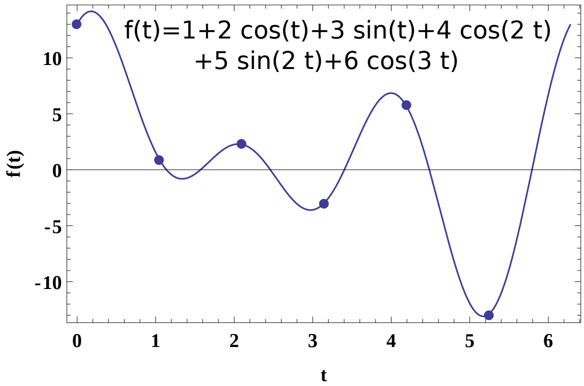



Abbildung 18.2: Vergleich der Näherung mit harmonischen Schwingungen und des Originalsignals, hier am Beispiel des Vokals u und der Fourier-Koeffizienten $1, 2, 3, 4, 5$ und $6$.

**Definition 18.1 Fourier-Koeffizienten**

Die Amplituden $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ und $6$ der Teilschwingungen heissen **Fourier-Koeffizienten**. Wir bezeichnen sie im folgenden mit

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1 \text{ und } b_2\ .$$

Sie gehören zur Funktion

$$a_0 + a_1\cos(t) + b_1\sin(t) + a_2\cos(2t) + b_2\sin(2t) + a_3\cos(3t)\ ;$$

d.h. die $a_i$ gehören zu den $\cos$-Schwingungen und die $b_i$ zu den $\sin$-Schwingungen. Die Menge *aller* Fourier-Koeffizienten einer Schwingung bezeichnet man als ihr **Fourier-Spektrum**.

**Beispiel 18.3 Fouriertransformation von $f(t) = \cos^2(t)$**

Bestimmen Sie für das Signal $f(t) = \cos^2(t)$ (kontinuierlich) die Fourier-Koeffizienten. Nehmen Sie vorerst an, dass das Signal die Periode $2\pi$ hat. Benutzen Sie 6 Abtastwerte für die diskrete Darstellung des Signals.
Übrigens: $\cos^2(t)$ bedeutet $[\cos(t)]^2$. Da Potenzen von trigonometrischen Funktionen oft auftreten, verwendet man eine verkürzte Schreibweise.

**Lösung:**

Das Signal lässt sich diskret darstellen als

| $t$: | $0$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$: | $1$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $1$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

Wir fassen die Funktionswerte in einem Vektor zusammen

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Die sechs Basisvektoren sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:

| kont.: | $\cos(0\,x)$ | $\cos(1\,x)$ | $\cos(2\,x)$ |
|---|---|---|---|
| diskret: | $\vec{c}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ | $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ |
| | $\cos(3\,x)$ | $\sin(1\,x)$ | $\sin(2\,x)$ |
| | $\vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ | $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ | $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ |

Für die Listen der Dimension $N = 6$ bilden 4 Cosinus- und 2 Sinuslisten eine orthogonale Basis wie in Abb. 18.3 gezeigt wird. Wir benennen die Koeffizienten wie folgt

$$\vec{f} = a_0\,\vec{c}_0 + a_1\,\vec{c}_1 + a_2\,\vec{c}_2 + a_3\,\vec{c}_3 + b_1\,\vec{s}_1 + b_2\,\vec{s}_2$$

und benutzen den Satz 6 [Komponenten in einer Orthogonal-Basis]. Dann sind die Koeffizenten

$$a_i = \frac{\vec{f} \odot \vec{c}_i}{|\vec{c}_i|^2} \text{ und } b_i = \frac{\vec{f} \odot \vec{s}_i}{|\vec{s}_i|^2}\ .$$

Die Zahlen $a_i$ und $b_i$ sind die gesuchten Fourierkoeffizienten.

Im Beispiel ergibt sich $a_0 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{2}$. Die übrigen Fourierkoeffizienten sind gleich $0$. Synthese (Zusammensetzen der Ergebnisse): Diskret gilt

$$\vec{f} = \frac{1}{2}\,\vec{c}_0 + \frac{1}{2}\,\vec{c}_2$$

oder kontinuierlich

$$f(t) = \cos^2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\,t)$$

Die Superposition (Überlagerung) wird auch in Abb. 18.4 gezeigt.

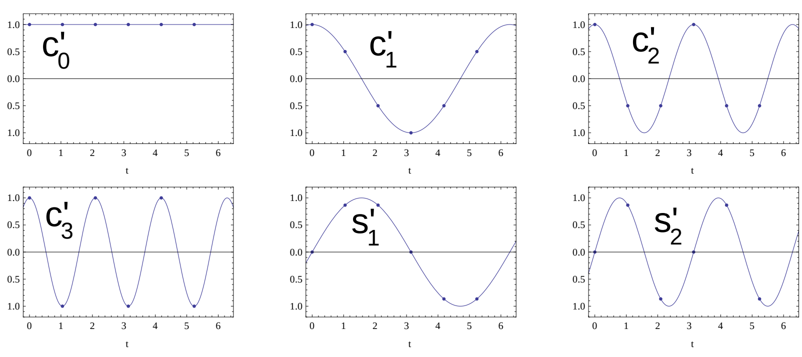



Abbildung 18.3:

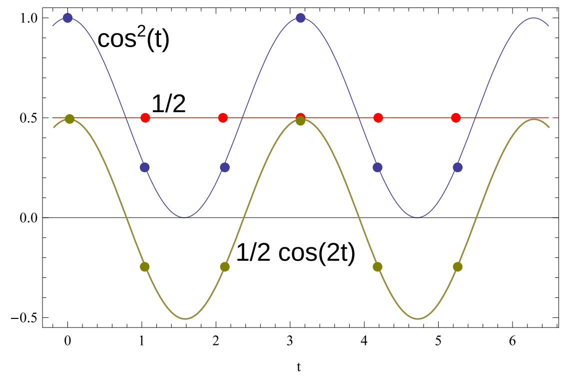



Abbildung 18.4: Die Überlagerung von $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}\cos(2\,t)$ gibt $\cos^2(t)$ .

## 18.1 Theorie: periodische Funktionen

Was sich für $N = 6$ leicht nachrechnen lässt, gilt für jede Anzahl Mess- bzw. Abtastwerte in einer Periode:

**Definition 18.2 Cosinus-Liste/Sinus-Liste für $T$ periodische Signale**

Auf dem Intervall $[0, T]$ ergeben sich die Cosinus- und Sinus-Listen mit der Winkelfrequenz

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

und den Abtastwerten an den Stellen $t_k = k\,\frac{T}{N}$ zu

$$\vec{c}_j = \begin{pmatrix} \cos(t_0 \cdot j\,\omega) \\ \cdots \\ \cos(t_{N-1} \cdot j\,\omega) \end{pmatrix} \text{ und } \vec{s}_j = \begin{pmatrix} \sin(t_0 \cdot j\,\omega) \\ \cdots \\ \sin(t_{N-1} \cdot j\,\omega) \end{pmatrix}$$

**Satz 18.1 Diskrete Fourierbasis, $N$ gerade**

Es sei $N$ gerade und $n = \frac{N}{2}$. Die $n + 1$ Cosinus-Listen $\vec{c}_0, \vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n$ und die $n - 1$ Sinus-Listen $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-1}$ bilden eine orthogonale Basis des Vektorraums aller $N$-Listen. Die Basisvektoren haben die Dimension $N$.

**Satz 18.2 Diskrete Fourierbasis, $N$ ungerade**

Es sei $N$ ungerade und $n = \frac{N-1}{2}$. Die $n+1$ Cosinus-Listen $\vec{c}_0, \vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n$ und die $n$ Sinus-Listen $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_n$ bilden eine orthogonale Basis des Vektorraums aller $N$-Listen. Die Basisvektoren haben die Dimension $N$.

**Infobox 18.1 Vorgehen bei der diskreten Fourier-Transformation**

Zähle die Anzahl Messwerte $N$. Fall $N$ gerade rechne $n = N/2$ sonst $n = (N-1)/2$. Die Abtastwerte sind an den Stellen $t_k = T/N\,k$ für $k = 0$ bis $N-1$. Die $j$-te Cosinus-Liste ist

$$\vec{c}_j = \begin{pmatrix} \cos(t_0 \cdot j \cdot \omega) \\ \cdots \\ \cos(t_{N-1} \cdot j \cdot \omega) \end{pmatrix}$$

und die $j$-te Sinus-Liste ist

$$\vec{s}_j = \begin{pmatrix} \sin(t_0 \cdot j \cdot \omega) \\ \cdots \\ \sin(t_{N-1} \cdot j \cdot \omega) \end{pmatrix}$$

Wir brauchen stets $n+1$ Cosinus-Listen $\vec{c}_0, \vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n$. Die Anzahl der Sinus-Listen hängt von $N$ ab. Für den Fall $N$ gerade sind es $n-1$ Sinus-Listen $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-1}$. Für $N$ ungerade sind es die $n$ Sinus-Listen $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_n$.

**Beispiel 18.4 Fouriertransformation von $f(t) = \sin^2(t)$**

Bestimmen Sie für das Signal $f(t) = \sin^2(t)$ (kontinuierlich) die Fourier-Koeffizienten. Nehmen Sie vorerst an, dass das Signal die Periode $2\pi$ hat. Benutzen Sie 6 Abtastwerte für die diskrete Darstellung des Signals.

**Lösung:**

Das Signal lässt sich diskret darstellen als

| $t$: | $0$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$: | 0 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | 0 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}$ |

Wir fassen die Funktionswerte in einem Vektor zusammen

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Mit den selben 6 Basisvektoren wie im vorherigen Beispiel ergibt sich $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$. Die übrigen Fourierkoeffizienten sind gleich $0$. Synthese (Zusammensetzen der Ergebnisse): Diskret gilt

$$\vec{f} = \frac{1}{2}\,\vec{c}_0 - \frac{1}{2}\,\vec{c}_2$$

oder kontinuierlich

$$f(t) = \sin^2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\,t)$$

## Danksagung

Das Kapitel 18 basiert auf der Vorlage von Rolf Peterhans und Markus Schmidiger, Kantonsschule Zug. Beiden Autoren sei hier herzlich gedankt.

KAPITEL 19

# RCL-Netzwerke mit Wechselstrom

Im Folgenden Wollen wir RCL-Netzwerke mit linearen Elementen betrachten die mit einer festen Wechselspannung der Frequenz oder (Winkelfrequenz)

$$\nu = \frac{1}{T} \text{ oder } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

also $u_Q(t) = \hat{u} \cdot \cos(t\,\omega)$.

**Definition 19.1 Transiente/stationäre Lösung**

Ausserdem interessieren wir uns ausschliesslich für das Verhalten lange nach dem Einschaltvorgang. Dieses Verhalten wird **stationäre** Lösung genannt. Das Verhalten um den Zeitpunkt herum, wo die Wechselspannung ein- oder ausgeschalten wird, heisst **transiente** Lösung.[a]

[a] lateinisch für "vorübergehend".

Die Erfahrung zeigt, dass lineare Netzwerke, die mit einer Wechselspannung der Frequenz $\omega$ betrieben werden, nach kurzer Zeit mit der Frequenz $\omega$ schwingen. D.h. die transiente Lösung fällt schnell ab (sie verschwindet exponentiell), und es bleibt die **stationäre** Lösung bestehen. Diese Lösung wollen wir in diesem Kapitel berechnen.
Da in der stationären Lösung Strom und Spannung mit Frequenz $\omega$ schwingen, führen wir für beide die Basis $\vec{e}_1 \hat{=} \cos(\omega t)$ und $\vec{e}_2 \hat{=} \sin(\omega t)$ ein. D.h. wir stellen Ströme, die aus einer Überlagerung von $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ bestehen, als Vektoren dar, z.B.

$$i(t) = 3\cos(\omega t) + 2\sin(\omega t) \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{i}$$

Bevor wir weiterarbeiten, tragen wir die Grundlagen aus der Elektrotechnik zusammen:

## 19.1 Lineare Elemente

Wir wollen nun den Spannungsabfall an den linearen Elementen betrachten. Wir können dann die Kirchhoff'sche-Maschenregel benutzen um auch im Falle des Wechselstroms zu schreiben

**Satz 19.1 Kirchhoff'sche -Maschenregel**

$$\sum_i u_i = u_q \ .$$

d.h. die Summe der Spannungen über jede geschlossene Masche ist null, dabei sind $u_i(t)$ die Spannungen an den jeweiligen Elementen und $u_q(t)$ ist die Quell-Spannung.

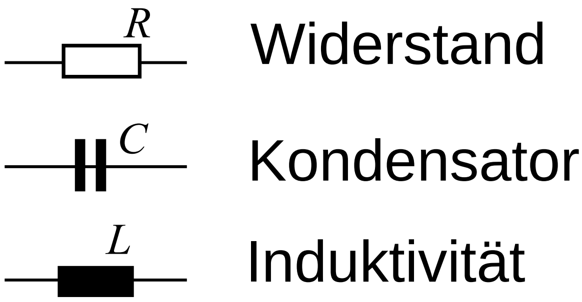



Abbildung 19.1: Die linearen Elemente in einem elektrischen Schaltkreis: Widerstand, Kapazität und Induktivität.

## 19.2 Die Kapazität $C$

Eine Kapazität $C$ ist definiert durch

$$q = C \cdot u$$

d.h. je grösser die Kapazität $C$ und je grösser die angelegte Spannung $u$ desto grösser die Lösung auf der Kapazität.

Um den Strom in Verbindung mit der Spannung zu bringen, leiten wir auf beiden Seiten nach der Zeit ab und erhalten

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} C \cdot u = C \cdot \frac{d}{dt} u$$

**Definition 19.2 Kondensator**

Der Spannungsabfall am Kondensator ist

$$\dot{u} = \frac{i}{C}$$

oder wieder integriert (d.h. auf beiden Seiten $\int \ dt$)

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{i(\tau)}{C} d\tau$$

d.h. wir können den Spannungsabfall nicht direkt berechnen, sondern nur die zeitliche Änderung des Spannungsabfalls $\frac{d}{dt} u = \dot{u}$.

## 19.3 Der Widerstand $C$ und die Induktivität $L$

**Definition 19.3 Widerstand**

An einem Ohmschen Widerstand (R) fällt folgende Spannung ab

$$u(t) = R \cdot i(t)$$

Hier ist der Spannungsabfall schnell berechnet.

Auch bei der Induktivität ergibt sich der Spannungsabfall aus der Definition:

**Definition 19.4 Induktivität**

An einer Induktivität fällt die folgende Spannung ab

$$u(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t)$$

## 19.4 Herleitung Impedanzen in Zeigerdarstellung

Wir kennen den Widerstand $u(t) = R \cdot i(t)$, der erlaubt, aus dem Strom die Spannung zu berechnen und umgekehrt, den Leitwert $G$, mit dem wir den Strom aus der Spannung berechnen $i(t) = G \cdot u(t)$. Es gilt

$$G = \frac{1}{R}$$

In der Basis $\vec{e}_1 \hat{=} \cos(\omega t)$ und $\vec{e}_2 \hat{=} \sin(\omega t)$, lässt sich (zumindest für die stationäre Lösung), dieses Konzept auf $C$ und $L$ verallgemeinern. Wir ersetzen dafür $R \to Z$

$$u(t) = R \cdot i(t) \ \to \ u(t) = Z \cdot i(t)$$

Wir nennen $Z$ die Impedanz.

**Beispiel 19.1 Impedanz der Induktivität**

Bestimmen Sie die Matrix der Impedanz der Induktivität $L$ in der Zeigerdarstellung. **Lösung:**

Wir berechnen die Bilder der Basisvektoren:

$$\begin{aligned}
&\text{Strom } i(t) && \to && \text{Spannung } u(t) = L \cdot \frac{d}{dt} i(t) \\
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \vec{e}_1 \hat{=} \cos(\omega t) && \to && -L\omega \sin(\omega t) \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ -L \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \vec{e}_2 \hat{=} \sin(\omega t) && \to && L\omega \cos(\omega t) \hat{=} \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also

$$\mathbf{Z}_L = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega L \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

**Definition 19.5 Impedanz der Induktivität**

$$\mathbf{Z}_L = \begin{pmatrix} 0 & \omega L \\ -\omega L & 0 \end{pmatrix}$$

**Beispiel 19.2 Impedanz des Widerstandes**

Bestimmen Sie die Matrix der Impedanz des Widerstandes $R$ in der Zeigerdarstellung. **Lösung:**

Wir berechnen die Bilder der Basisvektoren:

$$\begin{array}{rcl} \text{Strom } i(t) & \rightarrow & \text{Spannung } u(t) = R \cdot i(t) \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 \widehat{=} \cos(\omega t) & \rightarrow & R\cos(\omega t) \widehat{=} \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_2 \widehat{=} \sin(\omega t) & \rightarrow & R\sin(\omega t) \widehat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} \end{array}$$

Also

$$\mathbf{Z}_R = \left[ \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} \right]$$

**Definition 19.6 Impedanz des Widerstandes**

$$\mathbf{Z}_R = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

**Beispiel 19.3 Matrix des Leitwerts der Kapazität**

Bestimmen Sie die Matrix des Leitwerts der Kapazität $C$ in der Zeigerdarstellung. **Lösung:**

Wir berechnen die Bilder der Basisvektoren:

$$\begin{array}{rcl} \text{Spannung } u(t) & \rightarrow & \text{Strom } i(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u(t) \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1 \widehat{=} \cos(\omega t) & \rightarrow & -C\omega\sin(\omega t) \widehat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ -C \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_2 \widehat{=} \sin(\omega t) & \rightarrow & C\omega\cos(\omega t) \widehat{=} \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Also

$$\mathbf{G}_C = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega C \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

**Infobox 19.1 Inverse einer $2 \times 2$ Matrix**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Dies gilt, falls $\det(A) \neq 0$.

**Beispiel 19.4 Leitwert/Impedanz**

Berechnen Sie aus

$$\mathbf{G}_C = \begin{pmatrix} 0 & \omega C \\ -\omega C & 0 \end{pmatrix}$$

die Matrix der Impedanz der Kapazität $C$ in der Zeigerdarstellung. **Lösung:**

Wir invertieren die Matrix $\mathbf{G}_C$

$$\mathbf{Z}_C = (\mathbf{G}_C)^{-1} = \frac{1}{0+(\omega C)^2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega C \\ \omega C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\omega C} \\ \frac{1}{\omega C} & 0 \end{pmatrix}$$

**Definition 19.7 Impedanz der Kapazität**

$$\mathbf{Z}_C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\omega C} \\ \frac{1}{\omega C} & 0 \end{pmatrix}$$

## 19.5 Gesamt Impedanz eines Netzwerks

Wir benutzen die Maschenregel um die Impedanz einer Serienschaltung von zwei Impedanzen zu berechnen. Für Widerstände gilt

$$u_Q(t) = R_1 \cdot i_1(t) + R_2 \cdot i_2(t)$$

und da die Ströme $i_1(t)$ und $i_2(t)$ in einer Serienschaltung gleich sind gilt auch

$$u_Q(t) = R_1 \cdot i(t) + R_2 \cdot i(t) = (R_1 + R_2) \cdot i(t) \ ,$$

d.h. Widerstände können addiert werden. Analog gilt deshalb auch für Impedanzen

$$\vec{u}_Q = (\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2) \cdot \vec{i} \ .$$

**Satz 19.2 Gesamt Impedanz**

Serie-Schaltung:

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 \ ,$$

Parallelschaltung:

$$\mathbf{Z}_t = \left[ (\mathbf{Z}_1)^{-1} + (\mathbf{Z}_2)^{-1} \right]^{-1} \ ,$$

**Beispiel 19.5 RCL Schaltkreis**

Ein Schaltkreis besteht aus einer Kapazität und einer Induktivität in Serienschaltung. Berechne den elektrischen Strom im eingeschwungenen Zustand, wenn der Schaltkreis mit einer Wechselspannung $\hat{u} \cdot \cos(t\,\omega)$ der Frequenz $\omega$ betrieben wird.

**Lösung:**

Die Spannungsabfälle an den drei Elementen sind

$$u_C + u_L = u_Q$$

also

$$(\mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_L) \cdot \vec{i} = \begin{pmatrix} \hat{u} & 0 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\begin{pmatrix}\hat{u} & 0\end{pmatrix}$ entspricht der Quellspannnung $\hat{u} \cdot \cos(t\,\omega)$. Wir schreiben die Matrix der Impedanz aus und invertieren sie:

$$\mathbf{Z}_t = \begin{pmatrix} 0 & L\omega - \frac{1}{C\omega} \\ \frac{1}{C\omega} - L\omega & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & \frac{C\omega}{1-C\,L\omega^2} \\ \frac{C\,\omega}{C\,L\omega^2-1} & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{Z}_t)^{-1}$$

Also ist die Lösung ist der Strom

$$\vec{i} = (\mathbf{Z}_t)^{-1} \odot \begin{pmatrix}\hat{u} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{C\hat{u}\omega}{C\,L\omega^2-1} \end{pmatrix}$$

oder

$$i(t) = \frac{C\hat{u}\omega}{C\,L\omega^2 - 1}\sin(\omega\,t)$$

**Infobox 19.2 Phasenwinkel bei Cosinus**

$$A \cdot \cos(\tau + \varphi) = a \cdot \cos(\tau) + b \cdot \sin(\tau)$$

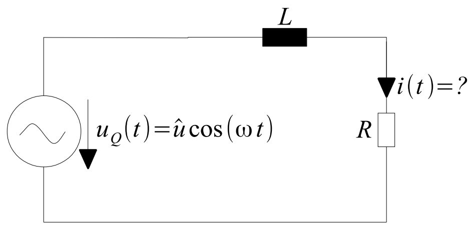
falls

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi &= -\arctan\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

**Beispiel 19.6** $RL$**-Kreis**

Berechne die Amplitude und den Phasenwinkel am Schaltkreis im eingeschwungenen Zustand. Anregung

$$\hat{u} \cdot \cos(t\,\omega)$$




**Lösung:**

Wir schreiben die Matrix der Impedanz aus und invertieren sie:

$$\mathbf{Z}_t = \begin{pmatrix} R & L\omega \\ -L\omega & R \end{pmatrix} \to \frac{1}{1+(L\omega/R)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1/R & -L\omega/R^2 \\ L\omega/R^2 & 1/R \end{pmatrix} = (\mathbf{Z}_t)^{-1}$$

Also ist der Strom

$$\vec{i} = (\mathbf{Z}_t)^{-1} \odot \begin{pmatrix}\hat{u} \\ 0\end{pmatrix} = \frac{\hat{u}}{1+(L\omega/R)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1/R \\ L\omega/R^2 \end{pmatrix}$$

oder

$$i(t) = \frac{\hat{u}/R^2}{(L\omega/R)^2 + 1} \cdot \left[R\cos(t\omega) + L\omega\sin(t\omega)\right]$$

Die Amplitude und Phase sind

$$\begin{aligned} A &= \frac{\hat{u}/R^2}{(L\omega/R)^2+1} \cdot \sqrt{(L\omega)^2+R^2} = \frac{\hat{u}/R}{\sqrt{(L\omega/R)^2+1}} \\ \varphi &= -\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) \end{aligned}$$

also

$$i(t) = \frac{\hat{u}/R}{\sqrt{(L\omega/R)^2+1}} \cdot \cos\left(t\omega - \arctan(\frac{L\omega}{R})\right)$$

## 19.6 Ausblick: Impedanzen und komplexe Schreibweise

Durch Einführung von komplexen Zahlen kann die Lösung von linearen Differenzialgleichungen noch systematischer geschrieben werden. Da die komplexe Zahl

$$e^{j\cdot\omega t} = \cos(t\,\omega) + j\sin(t\,\omega)$$

beide Schwingungen — *cos* und *sin* — enthält, können wir die Basis für die Rechnungen eindimensional statt zweidimensional wählen. Die Impedanzen werden dadurch auch eindimensional nämlich z.B.

$$\mathbf{Z}_C \;\to\; \frac{-j}{\omega\,C}$$

Die obige Gleichung für die Schaltung mit Widerstand und Induktivität

$$(\mathbf{Z}_C + \mathbf{Z}_R)\vec{i} = \begin{pmatrix} U_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wird eindimensional nämlich

$$(R \cdot +L \cdot j \cdot \omega I) \cdot \hat{i} \cdot e^{j\cdot\omega t} = \hat{u} \cdot e^{j\cdot\omega t}$$

Die zeitabhängige Schwingung $e^{j\cdot\omega t}$ kürzt sich auf beiden Seiten heraus

$$(R + L \cdot j \cdot \omega) \cdot \hat{i} = \hat{u}\cdot$$

und die Amplitude des Stromes ist

$$\hat{i} = \frac{\hat{u}}{R + j \cdot \omega L}$$

Wie Sie aus dieser komplexwertigen Amplitude Phasenwinkel und Amplitude bestimmen, gehört zur komplexen Rechnung [Papula, Bd. 1 VII 1-4.3 S. 640-707]. Es ist eindrücklich, dass sich hinter der komplexen Notation keine neue Physik verbirgt. Wir haben nur die $\cos$- und die $\sin$ Funktion in einem Objekt zusammengefasst.

Die Komplexe Rechnung birgt noch weitere Vorteile. Die Fourier-Transformation kann auch systematischer notiert werden. Statt den Cosinus- und Sinus-Listen wie oben beschrieben können wir für $N$ Punkte die komplexe Listen als Basis verwenden

**Definition 19.8 Komplexe-Liste für $T$ periodische Signale**

Für die Abtastwerte an den Stellen $t_l = T/N\,l$ ist die $k$-te komplexe Liste

$$\vec{c}_k = \begin{pmatrix} e^{j\,t_0\cdot\omega k} \\ \dots \\ e^{j\,t_{N-1}\cdot\omega k} \end{pmatrix}$$

mit der Winkelfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

**Satz 19.3 Diskrete komplexe Fourierbasis für $N \in \mathbb{N}$.**

Die komplexen Listen $\vec{c}_0$, $\vec{c}_1$, ..., $\vec{c}_{N-1}$ bilden eine orthogonale Basis des Vektorraums aller $N$-Listen. Die Basisvektoren haben die Dimension $N$.

Das ist die Basis der diskreten Fouriertransformation (DFT) in der Signalverarbeitung benutzt wird [Meyer, 2009, 5.3-5.4, S. 164-202]. Da wird ausgenutzt, dass die Fouriertransformation, das Signal in die einzelnen Frequenzen zerlegt. Wenn die Frequenzen durch ein lineares Netzwerk gehen (nur R,L und C-Elemente), wird ihre Frequenz nicht verändert. Das bedeutet, dass jede Frequenz einzeln behandelt werden kann. Für jede Frequenz entsteht also ein invarianter Unterraum (siehe folgende Kapitel).

KAPITEL 20

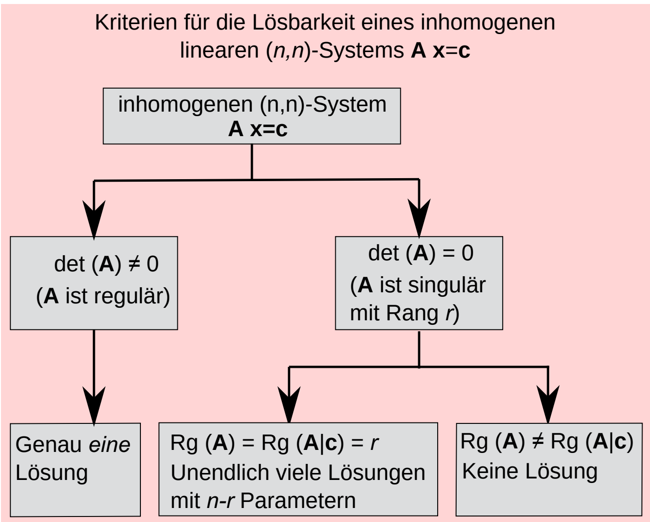
# Lösungstheorie lineare Gleichungssysteme

## 20.1 Struktur inhomogener linearer Gleichungssysteme (ohne Determinante)

**Definition 20.1 Inhomogenes LGS**

Ein lineares Gleichungssystem der Form $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ heisst inhomogen. $\mathbf{A}$ ist die Koeffizienten-Matrix, $\vec{b}$ heisst die Inhomogenität.

In den Beispielen , und haben wir gesehen, dass inhomogene Gleichungssysteme entweder einen Schnittpunkt ergeben, oder keine Lösung oder unendlich viele Lösungen (z.B. eine Schnittgerade. Dies kann man im folgenden Schema zusammenfassen:




[Papula, Bd. 2 I 5.4]

Wir betrachten zunächst nur die unterste Ebene: Eine Lösung bedeutet, dass wir einen Schnittpunkt haben. Unendlich viele Lösungen bedeutet, dass wir z.B. eine Schnittgerade haben und keine Lösung bedeutet, dass sich drei Ebenen keinen gemeinsamen Punkt haben.

Wir wollen lineare Gleichungsysteme betrachten mit n Gleichungen und n Unbekannten. Um deren Lösung effizient zu bestimmen, betrachten wir zuerst die Richtungsvektoren der Lösung (Fall 2: unendlich viele Lösungen, z.B. Schnittgerade). Allgemein kann man über die *Richtungsvektoren* folgendes aussagen:

**Infobox 20.1 Richtungsvektoren**

Hat ein lineares Gleichungssystem (homogen oder inhomogen)

$$\mathbf{A} \odot \vec{x} = \vec{b}$$

mehrere Lösungen, dann hat die Lösung die Struktur

$$\vec{x}_{\text{allg}} = \vec{x}_{\text{part}} + \vec{x}_{\text{hom}} \ .$$

$\vec{x}_{\text{part}}$ ist die partikuläre Lösung. Sie besteht aus einem Punkt:

- für inhomogene LGS: eine Lösung des inhomogenen Problems
- für homogenen LGS: die triviale Lösung $\vec{0}$.

$\vec{x}_{\text{hom}}$ ist die homogene Lösung. Sie ergibt sich aus der Lösung des homogenen Problems $\mathbf{A} \odot \vec{x} = \vec{0}$. Wie wir gleich zeigen werden, enthält die homogene Lösung immer Parameter (z.B. $\lambda$, $\mu$ etc.).

**Beispiel 20.1 Richtungsvektoren** **371684**

Betrachte das inhomogene LGS

$$\begin{bmatrix} 9 & -6 & -5 & -6 \\ 6 & -4 & 8 & 13 \\ 12 & -8 & -4 & -4 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} -16 \\ 12 \\ -16 \\ 4 \end{bmatrix}$$

mit der Lösung

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Prüfe, ob die Richtungsvektoren die homogene LGS erfüllen. **Lösung:**

Wir setzen die Richtungsvektoren in das LGS ein (z.B. durch Multiplikation mit der Koeffizientenmatrix mit dem Richtungsvektor) und erhalten:

$$\begin{bmatrix} 9 & -6 & -5 & -6 \\ 6 & -4 & 8 & 13 \\ 12 & -8 & -4 & -4 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} 9 & -6 & -5 & -6 \\ 6 & -4 & 8 & 13 \\ 12 & -8 & -4 & -4 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wir sehen also, dass wir auch bei inhomogenen LGS auch die Lösung des homogenen LGS interessant ist. Sie ergibt die Richtungsvektoren. Wir werden gleich zeigen (Satz ), dass die Richtungsvektoren gestreckt werden können oder addiert werden können und dann wieder neue Richtungsvektoren ergeben.

**Beispiel 20.2 Richtungsvektoren (Fortsetzung)**

Überprüfe, ob

$$\vec{v} = (-2) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ und } \vec{w} = 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -18 \\ 12 \end{bmatrix}$$

homogene Lösungen des inhomogene LGS

$$\begin{bmatrix} 9 & -6 & -5 & -6 \\ 6 & -4 & 8 & 13 \\ 12 & -8 & -4 & -4 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} -16 \\ 12 \\ -16 \\ 4 \end{bmatrix}$$

sind. **Lösung:**

Wir setzen die neuen Richtungsvektoren in das LGS ein (z.B. durch Multiplikation mit der Koeffizientenmatrix mit dem Richtungsvektor) und erhalten:

$$\begin{bmatrix} 9 & -6 & -5 & -6 \\ 6 & -4 & 8 & 13 \\ 12 & -8 & -4 & -4 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 18 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

und

$$\begin{bmatrix} 9 & -6 & -5 & -6 \\ 6 & -4 & 8 & 13 \\ 12 & -8 & -4 & -4 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -18 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wenn wir uns dies räumlich vorstellen, liegen diese Resultate auf der Hand: die Hyperebenen-Ebenen schneiden sich in einer Ebene aufgespannt durch die zwei Richtungsvektoren. Strecken wir einen Richtungsvektor, liegt dieser immer noch in der Schnittebene; machen wir eine Linear-Kombination von Richtungsvektoren, liegt diese Linear-Kombination ebenfall in der Schnitt-Ebene.

**Infobox 20.2 Vorgehen Lösung inhom. LGS**

Ein inhomogenes LGS

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b} \text{ oder } \left[\mathbf{A}\middle|\vec{b}\right]$$

wird in den folgenden Schritten gelöst:

- LGS schreiben als erweiterte Koeffizientenmatrix $\left[\mathbf{A}\middle|\vec{b}\right]$
- Erweiterte Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform bringen (mit Gauss-Verfahren) $\Rightarrow \left[\mathbf{A}'\middle|\vec{b}'\right]$.
- Überprüfen, ob System konsistent ist (inkonsistent, falls in unteren Zeilen z.B. 0z=3 steht). Fall inkonsistent: Abbrucht, LGS hat keine Lösung.
- Es werden die Pivot- und die freien Variablen bestimmt.
- Bestimmen des Aufpunktes (= partikuläre Lösung); dafür werden alle freien Variablen Null gesetzt.
- Bestimmen der Richtungsvektoren: Für *jede* freie Variable wird das homogene System $\left[\mathbf{A}'\middle|\vec{0}\right]$ gelöst, wobei die eine freie Variable 1 gewählt wird und die anderen 0. Dadurch ergibt sich für jede freie Variable ein Richtungsvektor Z.B für die freien Variablen $x_2$, $x_3$ und $x_6$ werden das homogene System $\left[\mathbf{A}'\middle|\vec{0}\right]$ für $x_2 = 1$, $x_3 = 0$ und $x_6 = 0$ gelöst (1. Richtungsvektor), dann für für $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ und $x_6 = 0$ gelöst (2. Richtungsvektor) und schliesslich für $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ und $x_6 = 1$ gelöst (3. Richtungsvektor).

**Infobox 20.3 Vorgehen Lösung inhom. LGS (Matlab)**

- Erweiterte Koeffizientenmatrix $\left[\mathbf{A}\middle|\vec{b}\right]$ in Zeilenstufenform bringen (`rref`) $\Rightarrow \left[\mathbf{A}'\middle|\vec{b}'\right]$.
- Überprüfen, ob System konsistent ist. Fall inkonsistent: Abbrucht, LGS hat keine Lösung.
- Falls $\left[\mathbf{A}'\middle|\vec{b}'\right]$ Nullzeilen enthält: Richtungsvektoren bestimmen: `null`($\mathbf{A}'$).
- Die Allgemeine Lösung ist $\vec{b}' + \vec{x}_{\text{hom}}$, wobei $\vec{x}_{\text{hom}}$ die Linearkombination der Richtungsvektoren ist.

## 20.2 Struktur homogener linearer Gleichungssysteme (ohne Determinante)

**Definition 20.2 Homogenes LGS**

Ein lineares Gleichungssystem der Form $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$ heisst **homogen**. (A $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Koeffizienten-Matrix und x $\in \mathbb{R}^n$ ist gesuchte Lösung).

Wir haben gelernt, dass in der Gleichung

$$x \cdot a_1 + y \cdot a_2 + z \cdot a_3 = d$$

die Konstante $d' = \frac{d}{\sqrt{(a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2}}$ den Abstand zum Ursprung darstellt. Wenn aber schon $d = 0$, dann ist der Abstand der Ebene zum Ursprung 0.
Homogene lineare enthalten also mehrere Ebenen, die den Abstand 0 vom Ursprung haben, d.h. sie gehen alle durch den Ursprung. Deshalb schneiden sie sich mit Sicherheit bei $\vec{0}$. Dies wird die triviale Lösung genannt.

**Definition 20.3 Triviale Lösungen**

Die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$ nennen wir die *triviale Lösung*.

Zusammen mit den vorherigen Überlegungen zu inhomogenen LGS ergibt sich das folgende Schema für die Lösung von inhomogenen LGS:

**Infobox 20.4 Vorgehen Lösung hom. LGS**

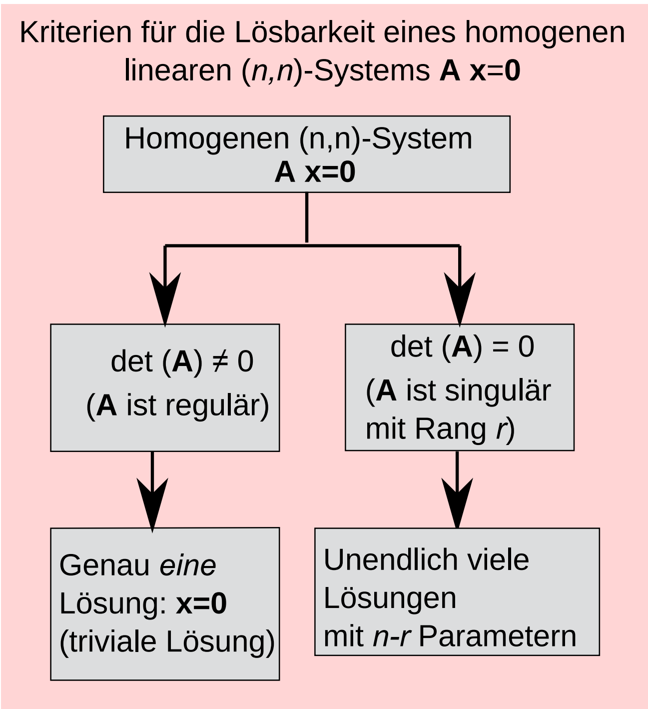
Ein inhomogenes LGS

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0} \text{ oder } \mathbf{A}$$

wird in den folgenden Schritten gelöst:

- LGS schreiben als Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ (der Vektor $\vec{0}$ sollte nicht geschrieben werden, er verändert sich nicht bei der Elimination).
- Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform bringen (mit Gauss-Verfahren) $\Rightarrow$ $\mathbf{A}'$.
- Es werden die Pivot- und die freien Variablen bestimmt.
- Bestimmen der Richtungsvektoren: Für *jede* freie Variable wird das homogene System gelöst, wobei die eine freie Variable 1 gewählt wird und die anderen 0 (wie in Info 20.2).

Da sich die Hyper-Ebenen im Ursprung treffen, ist ein homogenes LGS immer konsistent. Es gibt also nur zwei verschiedene Fälle:




[Papula, Bd. 2 I 5.4]

**Infobox 20.5 Vorgehen Lösung hom. LGS (Matlab)**

- Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ in Zeilenstufenform bringen (`rref`) $\Rightarrow \mathbf{A}'$.
- Falls $\mathbf{A}'$ Nullzeilen enthält: Richtungsvektoren bestimmen (`null`).
- Allgemeine Lösung = Linearkombination der Richtungsvektoren

## 20.3 Struktur homogener linearer Gleichungssysteme (mit Determinante)

**Beispiel 20.3 Homogenes lineares Gleichungssystem**

Welche Lösungen besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -4 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

Berechnet als erstes die Determinante der Koeffizientenmatrix $\det(\mathbf{A})$.

**Lösung:**

Umformungen (erste Spalte eliminieren):

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 + 4\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_4)$$

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -9 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Determinante kann nach der ersten Zeile entwickelt werden.

$$\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 36$$

Da die Determinante existiert, existiert auch $\mathbf{A}^{-1}$. Ausserdem wissen wir, dass für jede Matrix

$$\mathbf{B}\vec{0} = \vec{0}$$

gilt. Das wird auch für die Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ so sein:

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{0} = \vec{0}$$

oder $x_4 = x_3 = x_2 = x_1 = 0$.

**Beispiel 20.4 Homogenes lineares Gleichungssystem**

Bestimme die Lösungen von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0}$$

Berechne dazu zuerst $\det(\mathbf{A})$

**Lösung:**

$\det(\mathbf{A}) = 0$ ( Rang $r$ der Koeffizienten-Matrix ist $r < 3$) und bringe die Koeffizienten-Matrix auf Zeilenstufenform

$$\begin{aligned}\mathbf{A}' &= (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 + 3\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3) \\ \mathbf{A}'' &= (\mathbf{A}'_1, -\frac{1}{3}\mathbf{A}'_2, \mathbf{A}'_3 - 2\mathbf{A}'_2)\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Setze von unten nach oben ein:

$$x_3 = \lambda, \ x_2 = -\lambda, \ x_1 = -\lambda$$

Hat die Lösung einen Parameter, bedeutet dies, dass es *unendlich* viele Lösungen gibt, weil mit jeder Wahl des Parameters $\lambda \in \mathbb{R}$ eine neue Lösung entsteht.

In Matlab ergibt sich die Lösung eines homogenen linearen Gleichungssystems mit dem Befehl `B=rref(A)`. Weist die Matrix $\mathbf{B}$ Nullzeilen auf, ergeben sich freie Parameter. Weist die Matrix $\mathbf{B}$ keine Nullzeilen auf, gibt es nur die *triviale* Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.

**Satz 20.1 Struktur der Lösung eines homogenen LGS**

Multiplizert man eine homogene Lösung $\vec{x}$ mit einer Zahl $c$, so ist das Ergebnis wieder eine homogene Lösung:

$$\mathbf{A}\,(c \cdot \vec{x}) = \vec{0}\,.$$

Addiert man zwei homogene Lösungen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ eines linearen Gleichungssystems (also $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$ und $\mathbf{A}\vec{y} = \vec{0}$), so erhält man wieder eine homogene Lösung:

$$\mathbf{A}\,(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{0}\,.$$

[Goebbels and Ritter, 2011, p.474]

Dieser Satz kann auch so gelesen werden, dass die Lösungsmenge eines homogenen LGS immer auch den Nullvektor einschliesst (wir wählen $c = 0$, dann ist $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$ auch eine Lösung des homogenen LGS). Ist die Lösung eindimensional, geht die Lösungsgerade durch den Ursprung, ist sie zweidimensional, geht die Ebene mit den Lösungen auch durch den Ursprung usw.

**Beispiel 20.5 Beweis Struktur Lösung eines homogenen LGS**

Beweise den vorherigen Satz. **Lösung:**

Dies zeigt man mit den Zeilen

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\,(c \cdot \vec{x}) &= c \cdot (\mathbf{A} \odot \vec{x}) = c \cdot \vec{0} = \vec{0} \\ \mathbf{A}\,(\vec{x} + \vec{y}) &= \mathbf{A}\vec{x} + \mathbf{A}\vec{y} = \vec{0} + \vec{0}\end{aligned}$$

## 20.4 Struktur inhomogener linearer Gleichungssysteme

**Beispiel 20.6 Lösung eines inhomogenen linearen Gleichungssystems**

Bestimme die Lösungen von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Berechne dazu $\det(\mathbf{A})$
**Lösung:**

$$\det(\mathbf{A}) = 18$$

Also ist der Rang von $\mathbf{A}$ $r = 3$. Mit den Umformungen der Erweiterten Koeffizientenmatrix $\mathbf{C} = (\mathbf{A}|\vec{b})$ erhalten wir

$$\mathbf{C}' = (\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2 + 3\mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3) \; \mathbf{C}'' = (\mathbf{C}'_1, -\frac{1}{3}\mathbf{C}'_2, \mathbf{C}'_3 - 2\mathbf{C}'_2)$$

$$\mathbf{C} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -3 & 6 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \end{array}\right) \; \mathbf{C}' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \end{array}\right) \; \mathbf{C}'' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -30 \end{array}\right)$$

Rückwärts Einsetzen:

$$x_3 = 5, x_2 = -3, x_1 = -4$$

In Matlab kann die Lösung in diesem Fall mit den Befehlen `inv(A)*b` berechnet werden.

**Beispiel 20.7 Lösung eines inhomogenen linearen Gleichungssystems**

Bestimme die Lösungen von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Berechne dazu $\det(\mathbf{A})$
**Lösung:**

Mit der Umformung der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_2)$$

ergibt sich

$$(\mathbf{A}'|\vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also ist die Determinante

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \; .$$

Rang von $\mathbf{A}$ ist $r = 2$ aber auch Rang von $(\mathbf{A}|\vec{b})$ ist $r = 2$. Deshalb gibt es eine Lösung. Beachte, dass sich der Rang einer Matrix durch Äquivalenzumformungen nicht verändert. Deshalb können wir den Rang von $\mathbf{A}$ und $(\mathbf{A}|\vec{b})$ auslesen, indem wir $\mathbf{A}'$ und $(\mathbf{A}'|\vec{b}')$ betrachten. Rückwärts Einsetzen:

$$x_4 = \lambda, x_3 = \lambda - 4, x_2 = \frac{5}{2} - \lambda, x_1 = \frac{3}{2} - 3\lambda$$

Lösen in Matlab mit `rref(`$\mathbf{A}|\vec{b}$`)`!

**Beispiel 20.8 Lösung eines inhomogenen linearen Gleichungssystems**

Bestimme die Lösungen von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Berechne dazu $\det(\mathbf{A})$ **Lösung:**

Die Determinante ist Null:

$$\det(\mathbf{A}) = 0$$

Es gibt eine letzte Hoffnung, eine Lösung zu finden nämlich falls der Rang von $\mathbf{A}'$ gleich dem Rang von $(\mathbf{A}'|\vec{b}')$ ist. Mit den Umformungen

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3 - 2\mathbf{A}_2)$$

kommen wir auf

$$(\mathbf{A}'|\vec{b}') = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

Daraus können wir ablesen, dass der Rang von $\mathbf{A}'$ $r = 2$ ist, dass aber Rang von $(\mathbf{A}'|\vec{b}')$ $r = 3$ ist. Deshalb gibt es keine Lösung.

In Matlab kann dieser Schluss gezogen werden, wenn man `rref(`$\mathbf{A}|\vec{b}$`)` betrachtet.

**Satz 20.2 Struktur inhomogener Lösungen**

Man erhält alle Lösungen eines inhomogenen linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$, indem man *eine* inhomogene Lösung berechnet und dann die Lösungen des homogenen Gleichungssystems $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$ hinzuaddiert.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.475]

Merke, dass der zweite Schritt (Lösung des homogenen Systems) nur dann weitere Lösungen bringt, falls $\det(\mathbf{A}) = 0$.

## 20.5 Übrigens

Wir haben früher besprochen, dass man $\mathbf{A}\vec{x}$ z.B. in $\mathbb{R}^{3\times3}$ interpretieren kann als

$$\vec{A}.x_1 + \vec{A}_2 \cdot x_2 + \vec{A}_3 \cdot x_3$$

d.h. als Summe der Spaltenvektoren, und die Komponenten von $\vec{x}$ sind die Koeffizienten. Alle Punkte, die man über diese Linearkombination erreichen kann nennt

man **Spaltenraum** $S(\mathbf{A})$.
Behalten wir das im Kopf! Jetzt betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

bei dem $\mathbf{A}$ und $\vec{b}$ gegeben sind und $\vec{x}$ ist gesucht. Mit der vorherigen Interpretation können wir auch sagen:

**Satz 20.3 Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems**

Das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ ist genau dann lösbar, wenn die Inhomogenität $\vec{b}$ im Spaltenraum von $\mathbf{A}$ liegt, in Symbolen

$$\vec{b} \in S\,(\mathbf{A})$$

[Goebbels and Ritter, 2011, p.476]

## 20.6 Lineare Abhängigkeit

**Infobox 20.6 Spaltenvektoren von Matrizen**

Die Matrix **B** gehe durch elementare Zeilenumformungen aus **A** hervor. Dann gilt:
Die Spaltenvektoren von **A** sind genau dann linear unabhängig, wenn die Spaltenvektoren von **B** linear unabhängig sind.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.465]

Daraus folgt: Die Vektoren $\left(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots, \vec{A}_n\right) = \mathbf{A}$ bilden genau dann eine Basis von $S(\mathbf{A})$, wenn die Vektoren $\left(\vec{B}_1, \vec{B}_2, \ldots, \vec{B}_n\right) = \mathbf{B}$ eine Basis von $S(\mathbf{B})$ bilden.

**Infobox 20.7 Lineare Abhängigkeit**

Die $n$ Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ des $n$-dimensionalen Raumes $\mathbb{R}^n$ sind genau dann linear abhängig,

- wenn die aus diesen Vektoren gebildete $n$-reihige Matrix **A** singulär ist, d.h. $\det(\mathbf{A}) = 0$
- wenn ein Vektor ein Nullvektor ist
- wenn zwei Vektoren kollinear Vektoren sind
- wenn einer der Vektoren als Linearkombination der übrigen Vektoren darstellbar ist.

Unter den Vektoren des $n$-dimensionalen Raumes $\mathbb{R}^n$ gibt es maximal $n$ linear unabhängige Vektoren. Mehr als $n$ Vektoren sind jedoch stets linear abhängig.

[Papula, Bd. 2 I 5]

KAPITEL 21

# Übungen Anwendungen

## 21.1 Umkehrabbildung und Matrixinverse

1. **Matrix-Inverse,** **536550**

Lösen Sie das folgende *inhomogenen* linearen Gleichungssysteme durch Invertierung der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ mit dem Gauss-Jordan-Verfahren. Geben Sie $\mathbf{A}^{-1}$ an.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Lösung**

Die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ berechnen wir durch gleichzeitiges Anwenden von Äquivalenztransformationen auf $\mathbf{A}^{-1}$ und auf $\mathbb{1}$:

$$(\mathbf{A}|\mathbb{1}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -\frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) = (\mathbb{1}|\mathbf{A}^{-1})$$

Die Transformationen sind (hier wird folgende Notation verwendet: $\mathbf{A}_i$ ist die $i$-te *Zeile*)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3 - 2\mathbf{A}_1) \\ \mathbf{A}'' &= (\mathbf{A}'_1, \mathbf{A}'_2/3, \mathbf{A}'_3 - \mathbf{A}'_2/3) \\ \mathbf{A}^{-1} &= (\mathbf{A}''_1 + \mathbf{A}''_3/4, \mathbf{A}''_2 + \mathbf{A}''_3/4, -\mathbf{A}''_3/4) \end{aligned}$$

Die Lösung erhalten wir aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

**2. Eindeutigkeit der Lösung,** **820317**

Für welche Werte des reellen Parameters $\lambda$ besitzt das inhomogene lineare Gleichungssystem (LGS) $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{c}$ genau eine Lösung?

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Lösung**

Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem besitzt genau eine eindeutige Lösung, wenn die Matrix invertierbar ist, d.h. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. Die Determinante ist (Regel von Sarrus):

$$\det(\mathbf{A}) = 12 - 2\lambda + 0 + 4 + 2(1-\lambda) + 0 = 18 - 4\lambda\ .$$

Aus der Bedingung $\det(\mathbf{A}) = 18 - 4\lambda \neq 0$ folgt $\lambda \neq \frac{9}{2}$. Das LGS besitzt eine Lösung, wenn $\lambda$ von $\frac{9}{2}$ verschieden ist.

**3. Eindeutigkeit der Lösung,** **254537**

Für welche Werte des reellen Parameters $\lambda$ besitzt das inhomogene lineare Gleichungssystem genau eine Lösung?

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Lösung**

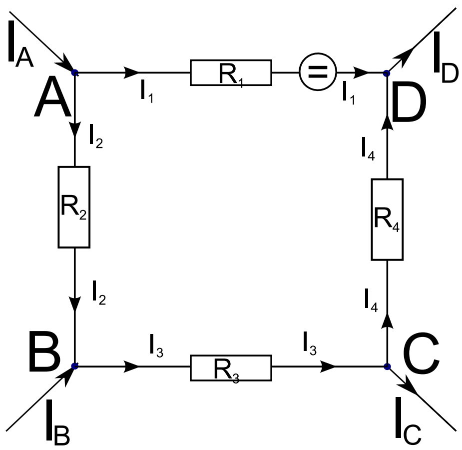
Die Lösung existiert und sie ist eindeutig, wenn die Determinante der Koeffizienten-Matrix $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ erfüllt. Hier ist (Regel von Sarrus):

$$\det(\mathbf{A}) = -3\lambda - 2\lambda + 0 + 2\lambda - 1 + \lambda + 0 = -1 - 2\lambda$$

und die Lösung ist für alle $\lambda \neq -\frac{1}{2}$ eindeutig.

**4. Netzmasche,** **643107**

Eine Netzmasche enthält die ohmschen Widerstände $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 5\,\Omega$ und $R_4 = 2\,\Omega$, sowie die Spannungsquelle mit der Spannung $U_q = 19$ V. Die an den Knotenpunkten $A$ und $B$ zufliessenden Ströme betragen $I_A$ =2 A und $I_B$ =1 A, der am Punkt $C$ abfliessende Strom ist $I_C$=1 A. Berechnen Sie die vier Zweigströme $I_1$, $I_2$, $I_3$ und $I_4$. (Benutzen Sie dreimal die Knotengleichung und einmal die Maschengleichung und schliesslich Matlab für die Inversion der Matrix)



#### Lösung

Die vier Grössen lassen sich aus dem vier linear unabhängigen Gleichungen bestimmen:

- $I_A = I_1 + I_2$ (Zufliessende Ströme = abfliessende Ströme)
- $I_2 + I_B = I_3$ (Zufliessende Ströme = abfliessende Ströme)
- $I_3 = I_C + I_4$ (Zufliessende Ströme = abfliessende Ströme)
- $-I_2R_1 - U_q + I_2R_2 + I_3R_3 + I_4R_4 = 0$ (Maschenregel)

Als lineares Gleichungssystem geschrieben ergibt dies:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 19 \end{pmatrix} ,$$

oder $\mathbf{A}\vec{I} = \vec{c}$

Für die Einheiten gilt: Benutze SI-Einheiten beim Aufstellen der Gleichungen, kümmere dich nicht mehr um die Einheiten, denn das Resultat kommt wieder in den SI-Einheiten heraus.
Das Resultat ergibt sich aus

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\vec{I} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 9 & 7 & -2 & -1 \\ 1 & -7 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 1.6 \\ 2.6 \\ 1.6 \end{pmatrix} .$$

### 5. Kofaktoren, 837230

Zu jedem Matrix-Element $a_{i,j}$ einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ gehört ein Kofaktor $a_{m,n}$. Er ist wie folgt definiert

$$\mathrm{cof}(a_{m,n}) = (-1)^{m+n} \cdot \det(\mathbf{A}_{m,n})$$

Dabei entsteht die Matrix $\mathbf{A}_{m,n}$ durch streichen der $m-$ten Zeile und $n-$ten Spalte in $\mathbf{A}$.
Bestimme die Kofaktoren $\mathrm{cof}(a_{1,1})$ und $\mathrm{cof}(a_{2,3})$ der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} .$$

#### Lösung

Für den Kofaktor $a_{1,1}$ streichen wir die erste Zeile und die erste Spalte:

$$\mathbf{A}_{1,1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

mit der Determinanten

$$\det(\mathbf{A}_{1,1}) = 4 \cdot 4 - 1 \cdot 5 = 11 .$$

Der Kofaktor ist also $\text{cof}(a_{1,1}) = (-1)^{1+1} \cdot 11 = 11$. Für den Kofaktor $a_{2,3}$ streichen wir die zweite Zeile und die dritte Spalte:

$$\mathbf{A}_{2,3} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

mit der Determinanten

$$\det(\mathbf{A}_{2,3}) = -2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -8 \ .$$

Der Kofaktor ist also $\text{cof}(a_{2,3}) = (-1)^{2+3} \cdot 11 = 8$.

## 6. Die Adjungierte, 237356

Die Kofaktoren der Matrix $\mathbf{A}$ können wieder in Matrixform aufgeschrieben werden. Wird die Matrix der Kofaktoren transponiert, erhalten wir die Adjungierte Matrix

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \text{cof}(a_{1,1}) & \dots & \text{cof}(a_{1,n}) \\ & \dots & \\ \text{cof}(a_{m,1}) & \dots & \text{cof}(a_{m,n}) \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$$

Berechnen Sie die Adjungierte der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \ .$$

**Lösung**
Die Matrix der Kofaktoren ist

$$\text{cof}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 11 & 6 & -7 \\ -11 & -10 & 8 \\ 11 & 11 & -11 \end{pmatrix}$$

und die Adjungiert ist also

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = \text{cof}(\mathbf{A})^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 11 & 6 & -7 \\ -11 & -10 & 8 \\ 11 & 11 & -11 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 11 & -11 & 11 \\ 6 & -10 & 11 \\ -7 & 8 & -11 \end{pmatrix}$$

## 7. Die inverse Matrix mit der Adjungierten, 431045

Mit Matrix-Inverse lässt sich mit der Adjungierten schnell berechnen:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \text{adj}(\mathbf{A}) \ .$$

Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\mathbf{A}$ und die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$. Überprüfen Sie Ihr Resultat indem Sie $\mathbf{A} \odot \text{cof}(\mathbf{A})^{\mathsf{T}}$ berechnen.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \ .$$

**Lösung**
Die Determinante ist

$$\det(\mathbf{A}) = -32 + 30 + 1 - 8 + 10 - 12 = -11 \ .$$

Die Inverse Matrix ist also

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-11} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -11 & 11 \\ 6 & -10 & 11 \\ -7 & 8 & -11 \end{pmatrix} .$$

Als Kontrolle berechnen wir

$$\mathbf{A} \odot \operatorname{cof}(\mathbf{A})^\intercal = \begin{pmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

Würde die zweite Matrix noch durch $\det(\mathbf{A}) = -11$ geteilt, wäre das Resultat die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$. Deshalb ist $\frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \operatorname{adj}(\mathbf{A})$ die Inverse von $\mathbf{A}$.

**8. Die inverse Matrix mit der Adjungierten, 332409**

Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\mathbf{F}$ und die Inverse $\mathbf{F}^{-1}$ mit Kofaktoren. Überprüfen Sie Ihr Resultat indem Sie $\frac{1}{\det(\mathbf{F})} \cdot \mathbf{F} \odot \operatorname{cof}(\mathbf{F})^\intercal$ berechnen.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ -3 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & -6 \end{pmatrix} .$$

**Lösung**
Die Determinante ist

$$\det(\mathbf{F}) = -90 - 42 - 18 - 126 - 30 + 18 = -288 .$$

Die Kofaktoren sind

$$\operatorname{cof}(\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} -24 & 24 & -24 \\ 0 & -72 & -12 \\ -24 & -48 & 12 \end{pmatrix} .$$

Die Inverse Matrix ist also

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{-288} \cdot \begin{pmatrix} -24 & 24 & -24 \\ 0 & -72 & -12 \\ -24 & -48 & 12 \end{pmatrix}^\intercal = \frac{1}{-288} \begin{pmatrix} -24 & 0 & -24 \\ 24 & -72 & -48 \\ -24 & -12 & 12 \end{pmatrix} .$$

Als Kontrolle berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\det(\mathbf{F})} \cdot \mathbf{F} \odot \operatorname{cof}(\mathbf{F})^\intercal &= \frac{1}{-288} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ -3 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & -6 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -24 & 0 & -24 \\ 24 & -72 & -48 \\ -24 & -12 & 12 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-288} \cdot \begin{pmatrix} -288 & 0 & 0 \\ 0 & -288 & 0 \\ 0 & 0 & -288 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \end{aligned}$$

Deshalb ist $\frac{1}{\det(\mathbf{F})} \cdot \operatorname{adj}(\mathbf{F})$ die Inverse von $\mathbf{F}$.

**9. Inverse mit der Adjungierten, 246885**

Berechnen Sie die Inverse der Rotations-Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ -\cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Adjungierten. **Übrigens:**
Die Inversion mit der Adjungierten ist auf aufwändig, weil die Berechnung der Determinanten aufwändig ist. Deshalb wird sie nur bei kleinen Matrizen

angewandt oder bei Problemen mit (vielen) Parametern. Das Beispiel hier ist also eine *typische* Anwendung.

**Lösung**

Die Determinante der Matrix ist

$$\det(\mathbf{A}) = \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$$

Deshalb ergibt sich die Inverse direkt aus der Adjungierten:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

**10. Umkehrfunktion,** **081061**

Betrachten Sie die Funktion $f(x) : x \in \mathbb{R} \mapsto y \in \mathbb{R}$ mit $y = m \cdot x + q$ $(m, q \in \mathbb{R})$.

(a) Bestimmen Sie für den Fall, dass $f$ bijektiv ist, die Umkehrfunktion $f^{-1}$.

(b) Bestimmen Sie, für welche Werte von $m$ und $q$ die Funktion $f$ bijektiv ist.

(c) Zeigen Sie, dass die in b) bestimmte Funktion $f^{-1}$ tatsächlich die Umkehrfunktion von $f$ ist, indem Sie nachprüfen, dass $f^{-1} \circ f = 1$ gilt.

**Lösung**

(a) Die Umkehrfunktion berechnet sich durch Vertauschung der Namen der Variablen $x$ und $y$

$$x = m \cdot y + q$$

und Auflösen nach $y$:

$$\begin{array}{rcl|l} x & = & m \cdot y + q & -q \\ x - q & = & m \cdot y & : m \\ \frac{x-q}{m} & = & y & : m \end{array}$$

Die Umkehrfunktion ist also $y = \frac{x-q}{m}$.

(b) Der letzte Schritt der Auflösung funktioniert nur, falls $m \neq 0$. Deshalb ist $f$ für alle $q$, aber nur für $m \neq 0$ bijektiv.

(c) $f^{-1} \circ f = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(m \cdot x + q) = \frac{(mx+q)-q}{m} = x$

**11. Invertierbarkeit,** **980407**

Welche der folgenden Matrizen lassen sich invertieren. Entscheiden Sie anhand der Determinante.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -10 & -5 & 2 & -6 \\ 4 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -4 \\ -7 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

**Lösung**

Für $\det(\mathbf{A}) = 0$ lässt sich eine Matrix nicht invertieren. Die Determinanten sind hier:

**Lösung**

(a) $\det(\mathbf{A}) = 0$

(b) $\det(\mathbf{B}) = -18$

(c) $\det(\mathbf{C}) = 12$

**12. Invertierbarkeit,** **312846**

Welche der folgenden Matrizen lassen sich invertieren. Entscheiden Sie anhand der linearen Abhängigkeit der Zeilen.

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

(d) $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

**Lösung**

Matrizen mit linear abhängigen Zeilen lassen sich nicht invertieren. Wir notieren die $i$-te Zeile der Matrix $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{A}_i$.

(a) Die beiden Zeilen sind linear abhängig, also lässt sich $\mathbf{A}$ nicht invertieren.

(b) Mit der Umformung

$$\mathbf{B}' = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_3 - 2/3\mathbf{B}_1)$$

ergibt sich die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. $\mathbf{B}'_2$ und $\mathbf{B}'_3$ sind linear abhängig, also lässt sich $\mathbf{B}$ nicht invertieren.

(c) Mit der Umformung

$$\mathbf{C}' = (\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_3 - 2 \cdot \mathbf{C}_1)$$

ergibt sich die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}$. Die weitere Umformung

$$\mathbf{C}'' = (\mathbf{C}'_1, \frac{1}{2} \cdot \mathbf{C}'_2, \mathbf{C}'_3 - \frac{3}{2} \cdot \mathbf{C}'_2)$$

führt auf die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Das ist eine obere Dreiecksmatrix, in der die Zeilen (oder Spalten) immer linear unabhängig sind. Also lässt sich $\mathbf{C}$ invertieren.

(d) Mit den Umformung

$$\mathbf{D}' = (\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_3, \mathbf{D}_4)$$
$$\mathbf{D}'' = (\mathbf{D}'_1, \mathbf{D}'_2 - 5\mathbf{D}'_1, \mathbf{D}'_3 - 6\mathbf{D}'_1, \mathbf{D}'_4 + 4\mathbf{D}'_1)$$
$$\mathbf{D}''' = (\mathbf{D}''_1, \mathbf{D}''_2 - \mathbf{D}''_3, \mathbf{D}''_3, \mathbf{D}''_4 + \mathbf{D}''_3)$$
$$\mathbf{D}'''' = (\mathbf{D}'''_1, \mathbf{D}'''_2/3, \mathbf{D}'''_3/17 + \mathbf{D}'''_2/3, \mathbf{D}'''_4 + 3\mathbf{D}'''_2)$$

ergeben sich die Matrizen

$$\mathbf{D}' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{D}'' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -14 & -6 & -6 \\ 0 & -17 & -8 & -8 \\ 0 & 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}''' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -17 & -8 & -8 \\ 0 & -9 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{D}'''' = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{10}{51} & \frac{10}{51} \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{D}''''_3$ und $\mathbf{D}''''_4$ sind linear abhängig, also lässt sich $\mathbf{C}$ nicht invertieren.

**13. Invertierbarkeit,** **465999**

Welche der folgenden Matrizen lassen sich invertieren. Bestimmen Sie dazu den Kern der Abbildungen mit Zeilenoperationen, d.h. löse $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$.

(a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 & -5 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

**Lösung**

Matrizen mit $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) \neq \vec{0}$ lassen sich nicht invertieren. Um dies zu verstehen, halten Sie sich vor Augen, dass eine Abbildung einem Element der Bildmenge nur ein Element der Definitionsmenge zuordnen darf, damit sie invertierbar bleibt.

Betrachten wir kurz den Fall, wo eine Abbildung zwei Elementen $g_1$ und $g_2$ das selbe Element $h$ in der Bildmenge zuordnet. Bei der Umkehrabbildung ist nicht klar, ob $h$ auf $g_1$ oder $g_2$ abgebildet werden soll. Deshalb existiert keine Umkehrabbildung.

In diesem Beispiel betrachten wir alle $\vec{x}$, die auf $\vec{0}$ abgebildet werden:

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}\ .$$

Diese Vektoren heissen Kern von $\mathbf{A}$. Gibt es ausser $\vec{0}$ noch andere Vektoren die auf $\vec{0}$ agebildet werden, ist die Abbildung $\mathbf{A}$ nicht umkehrbar.

Um den Kern zu bestimmen, lösen wir das Gleichungssystem $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$. In der erweiterten Matrix-Form, braucht man die Nullen in der letzten Spalten nicht zu schreiben, da die Äquivalentransformationen, dort stets wieder Nullen ergeben.

Wir notieren die $i$-te *Spalte* der Matrix $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{A}_i$.

(a) Mit den Umformungen

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_2 - \mathbf{A}_1)$$

ergibt sich die Matrix

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sie bildet keinen anderen Vektor ausser $\vec{0}$ auf $\vec{0}$ ab. Der Kern ist also $\vec{0}$. Deshalb lässt sich $\mathbf{A}$ invertieren.

(b) Die erste Spalte ist gleich 0, also ist der Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ im Kern und $\mathbf{B}$ lässt sich nicht invertieren.

(c) Mit den Umformungen

$$\mathbf{C}' = (\mathbf{C}_3, \mathbf{C}_2 + 4\mathbf{C}_3, \mathbf{C}_1 - 7\mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4 - 2\mathbf{C}_3);\ \mathbf{C}'' = (\mathbf{C}'_1, \mathbf{C}'_2, \mathbf{C}'_3, \mathbf{C}'_4 + 3\mathbf{C}'_2)$$

ergeben sich die Matrizen

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}\ \mathbf{C}'' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Aus der letzten Zeile in $\mathbf{C}''$ folgt, dass $x_4$ und damit auch $x_1$, $x_2$, $x_3$ gleich $0$ sind. Deshalb ist nur $\vec{0}$ im Kern von $\mathbf{C}$ und die Matrix lässt sich invertieren.

**14. Gleichung der Parabel,** **044328**

Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel ($f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$) durch die Punkte $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix}$ $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \end{pmatrix}$ $R = \begin{pmatrix} -1 \\ -18 \end{pmatrix}$. Stellen Sie dazu ein Gleichungsystem auf und benützen Sie dann die Cramer'sche Regel. **Lösung**

Die Parabel soll durch die drei Punkte gehen, d.h. für den ersten Punkt soll

$$a + b + c = -8$$

erfüllt sein. Für die weiteren Punkte ergibt sich $4a + 2b + c = -12$ und $a - b + c = -18$. Das lineare Gleichungssystem lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ -18 \end{pmatrix} .$$

Aus der Koeffizienten-Matrix $\mathbf{A}$ und der Inhomogenität $\vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -12 \\ -18 \end{pmatrix}$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= -6 \\ \det(\vec{b}, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3) &= 18 \\ \det(\mathbf{A}_1, \vec{b}, \mathbf{A}_3) &= -30 \\ \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \vec{b}) &= 60 \, . \end{aligned}$$

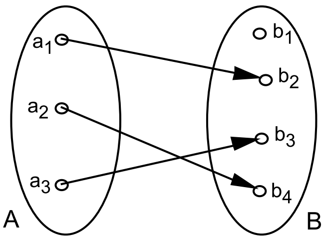
Die Koeffizienten sind also:

$$a = \frac{18}{-6} = -3 \, , \; b = \frac{-30}{-6} = 5 \, , \; c = \frac{60}{-6} = -10 \, , \; .$$

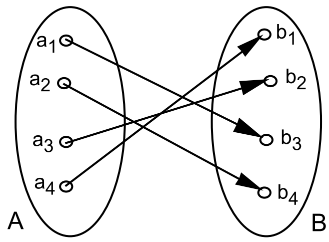
Die Parabel ist also $f(x) = -3 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 10$.

**15. Injektiv, surjektiv, bijektiv;** **089077**

Beurteilen Sie welche Eigenschaften die aufgeführten Funktionen besitzen:




(a)




(b)

(c) $f : x \in \mathbb{R}^- \mapsto y \in \mathbb{R}^+$ mit $y = x^2$

(d) $f : x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \mapsto y \in \mathbb{R}^+$ mit $y = x^2$

**Lösung**

(a) injektiv aber nicht surjektiv

(b) bijektiv

(c) bijektiv

(d) surjektiv aber nicht injektiv

## 21.2 Diskrete Fourier-Transformation

1. **Diskrete Fourier-Transformation,** **603562**

Transformiere die Signale in die Fourier-Basis. Benutze 6 Abtastwerte für die diskrete Darstellung des Signals an den Stellen

$$t \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\} .$$

Nimm an, dass die Signale $2\pi$-periodische fortgesetzt werden. Überprüfe das Ergebnis, indem du die Basis-Vektoren mit den Fourier-Koeffizienten multiplizierst (es sollte das Ursprüngliche diskrete Signal entstehen).

(a) $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \pi \\ -1 & \pi \le t < 2\pi \end{cases}$

(b) $f(t) = t - \pi$

**Lösung:**

a) Das Signal lässt sich diskret darstellen als

| $t$: | $0$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$: | 1 | 1 | 1 | -1 | $-1$ | $-1$ |

Wir fassen die Funktionswerte in einem Mess-Vektor zusammen

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die sechs Basisvektoren sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:

| kont.: | $\cos(0\,x)$ | $\cos(1\,x)$ | $\cos(2\,x)$ |
|---|---|---|---|
| diskret: | $\vec{c}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ | $\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ | $\vec{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ |
| | $\cos(3\,x)$ | $\sin(1\,x)$ | $\sin(2\,x)$ |
| | $\vec{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ | $\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ | $\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ |

Für die Listen der Dimension $N = 6$ bilden diese 4 Cosinus- und 2 Sinuslisten eine orthogonale Basis. Die Fourier-Koeffizienten sind

$$\begin{aligned}
a_0 &= \tfrac{\vec{m}\odot\vec{c}_0}{\vec{c}_0\odot\vec{c}_0} = 0 \\
a_1 &= \tfrac{\vec{m}\odot\vec{c}_1}{\vec{c}_1\odot\vec{c}_1} = \tfrac{2}{3}, \quad b_1 = \tfrac{\vec{m}\odot\vec{s}_1}{\vec{s}_1\odot\vec{s}_1} = \tfrac{2}{\sqrt{3}} \\
a_2 &= \tfrac{\vec{m}\odot\vec{c}_2}{\vec{c}_2\odot\vec{c}_2} = 0, \quad b_2 = \tfrac{\vec{m}\odot\vec{s}_2}{\vec{s}_2\odot\vec{s}_2} = 0 \\
a_3 &= \tfrac{\vec{m}\odot\vec{c}_3}{\vec{c}_3\odot\vec{c}_3} = \tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\vec{m}^F = \{a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{0, 0.6667 - 0.0000, 0.3333, 1.1547, 0\}$$

Als Kontrolle ordnen wir die Fourier-Koeffizienten in einer Liste an $\vec{m}^F$ und multiplizieren $\vec{m}^F$ mit der Basismatrix (bestehend aus den Kosinus und Sinus-Listen)

$$\vec{m}^F \odot [\vec{c}_0,\ \vec{c}_1,\ \vec{c}_2,\ \vec{c}_3,\ \vec{s}_1,\ \vec{s}_2] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dabei erhalten wir das ursprüngliche Signal $\vec{m}$ b) Gleich wie a) Wir erhalten

| $t$: | $0$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)$: | $-\pi$ | $-\frac{2\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $0$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{2\pi}{3}$ |

Und die Fourier-Koeffizienten sind

$$\begin{array}{ll} a_0 = \frac{\vec{m}\odot\vec{c}_0}{\vec{c}_0\odot\vec{c}_0} = -\frac{\pi}{6} & \\ a_1 = \frac{\vec{m}\odot\vec{c}_1}{\vec{c}_1\odot\vec{c}_1} = -\frac{\pi}{3}, & b_1 = \frac{\vec{m}\odot\vec{s}_1}{\vec{s}_1\odot\vec{s}_1} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} \\ a_2 = \frac{\vec{m}\odot\vec{c}_2}{\vec{c}_2\odot\vec{c}_2} = -\frac{\pi}{3}, & b_2 = \frac{\vec{m}\odot\vec{s}_2}{\vec{s}_2\odot\vec{s}_2} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \\ a_3 = \frac{\vec{m}\odot\vec{c}_3}{\vec{c}_3\odot\vec{c}_3} = -\frac{\pi}{6} & \end{array}$$

Oder numerisch

$$\{a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{-0.5236, -1.0472 - 1.0472, -0.5236, -1.8138, -0.6046\}$$

Übrigens lassen sich die beiden Signale automatisch erzeuge mit den beiden Linien

```
ft=(tk<pi)+(tk>=pi)*(-1)   % Signal, Teilaufgabe a)
ft=tk-pi                   % Signal, Teilaufgabe b)
```

Die Logik ist folgende: Wir nehmen die Liste `tk` und vergleichen jeden Eintrag mit $\pi$. Das ergibt eine Liste von der selben Länge wie `tk`. Die Einträge sind 1, falls der Vergleich zutrifft (d.h. der Eintrag ist kleiner als $\pi$) und 0 falls der Eintrag grösser als $\pi$ ist.

**2. Diskrete Fourier-Transformation, 449645**

Transformiere die Signale in die Fourier-Basis. Benutze 16 Abtastwerte für die diskrete Darstellung des Signals. Nimm an, dass die Signale $2\pi$-periodische fortgesetzt werden und überprüfe das Ergebnis.

(a) $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \pi \\ -1 & \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$

(b) $f(t) = t - \pi$

**Lösung:**

a)

$$\begin{aligned} & \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\} \\ = & \Big\{0, 0.2500, -0.0000, 0.2500, 0.0000, 0.2500, 0.0000, 0.2500, 0, 1.2568, \\ & \quad 0.0000, 0.3742, -0.0000, 0.1670, -0.0000, 0.0497\Big\} \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}\\
=&\Big\{-0.1963, -0.3927, -0.3927, -0.3927, -0.3927, -0.3927, -0.3927, -0.3927, -0.1963,\\
&-1.9742, -0.9481, -0.5877, -0.3927, -0.2624, -0.1627, -0.0781\Big\}
\end{aligned}
$$

**3. Diskrete Fourier-Transformation, 070730**

Transformiere die Signale in die Fourier-Basis. Benutze 16 Abtastwerte für die diskrete Darstellung des Signals. Nimm an, dass die Signale nach 10 Einheit periodisch fortgesetzt werden.

(a) $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 5 \\ -1 & 5 \leq t < 10 \end{cases}$

(b) $f(t) = t - 5$

**Lösung:**

Die Aufgabe geht wie die Vorherige, nur dass wir im Skript die Periodizität auf 10 setzen: `T=10`. Die Fourier-Koeffizienten sind numerisch a)

$$
\begin{aligned}
&\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}\\
=&\Big\{-0.2500, 0.6577, -0.1768, 0.1689, 0.2500, -0.0224, 0.1768, 0.1958, 0, 0.9844,\\
&0.4268, -0.0336, 0.2500, 0.1129, -0.0732, 0.1308\Big\}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}\\
=&\Big\{1.5459, -0.6250, -0.6250, -0.6250, -0.6250, -0.6250, -0.6250, -0.6250, -0.3125,\\
&-3.1421, -1.5089, -0.9354, -0.6250, -0.4176, -0.2589, -0.1243\Big\}
\end{aligned}
$$

**4. Dichteste Kugelpackung, 297986**

Die Abbildung 21.1 zeigt, wie Kugeln in der Ebene am dichtesten zueinander ausgelegt werden können: Zuerst legt man eine Reihe. Die zweite Reihe entsteht, indem man jeweils in den Zwischenraum zwischen zwei Kugeln der ersten Reihe eine Kugel der zweiten Reihe legt.
Wir starten mit der kleinsten Einheitszelle (Zelle aufgespannt durch rote Vektoren). [1]

(a) Beschreiben Sie die Position der mittleren dunklen Kugel mit Hilfe der Basisvektoren $\vec{f_i}$ (Lesen Sie die Positionen aus der Grafik aus).

(b) Durch die Winkelhalbierende zwischen den beiden Basisvektoren verläuft eine Spiegelebene. Beschreiben Sie die Spiegelung mit einer Matrix in der Basis $\vec{f_i}$. Wenden Sie dafür die Spiegelung auf die Basisvektoren an und leiten Sie daraus die Matrix her.

[1] Viele Kristalle z.B. elementares Cadmium nehmen diese Struktur an. Ebenen mit der dichtesten Kugelpackung werden aufeinander gelegt und ergeben so die dichteste Kugelpackung in drei Dimensionen. Wobei man nur *annimmt*, dass dies die dichteste Kugelpackung ergibt. Es fehlt bis jetzt der mathematiche Beweis, dass dies die dichtest mögliche Packung ist. Siehe auch “Hexagonal Close Packing (HCP)” auf Wikipedia.

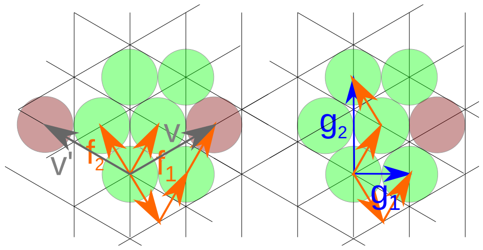



Abbildung 21.1: Dichtest mögliche Packung von Kugeln in der Ebene.

(c) Wenden Sie die Spiegelungmatrix auf die Position der grauen Kugel $\vec{v}$ an und berechnen Sie die Position des gespiegelten Punktes $\vec{v}'$.

(d) Stellen Sie die Vektoren $g_1$ und $g_2$ mit Hilfe der Basisvektoren $f_1$ und $f_2$ dar. Bestimmen Sie daraus die Matrix für die Basistransformation $\mathbf{T}$ von der Basis $\vec{f}_i$ zu $\vec{g}_i$.

(e) Welches sind die Positionen der dunklen Kugel $\vec{v}$ und ihr Spiegelbild $\vec{v}'$) in der Basis $\vec{g}_i$ (wenden Sie die Transformationsmatrix an).

(f) Wie lautet die Matrix $\mathbf{M}_F$ der Spiegelebene aus der vorhergehenden Teilaufgabe in der Basis $\vec{g}_i$? (bestimmen durch anwenden der Transformationsmatrix).

(g) In der Basis $\mathbf{G}$: Spiegeln Sie den Punkt $\vec{v}$ mit der Matrix (bestimmen durch anwenden von $\mathbf{M}_F$). Vergleichen Sie $\vec{v}'$ mit $\vec{v}'$ aus der vorherigen Teilaufgabe.

## Lösung

(a) Die Kugel liegt bei $\vec{v} = -\vec{f}_2 + 2\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) Die Spiegelung bildet die Vektoren folgendermassen ab

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &\rightarrow \vec{f}_2 \\ \vec{f}_2 &\rightarrow \vec{f}_1 \end{aligned}$$

oder in Komponentenschreibweise

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{f}_1' \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{f}_2' \end{aligned}$$

Schreiben wir die Bildvektoren in Komponentenschreibweise in die Spalten einer Matrix, dann erhalten wir die Matrix der Abbildung. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) Die Spiegelung ergibt

$$\vec{v}' = \mathbf{M} \odot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(d) Es gilt (grafisch bestimmt in der Zeichnung):

$$\begin{aligned} \vec{g}_1 &= \vec{f}_1 - \vec{f}_2 \\ \vec{g}_2 &= \vec{f}_1 + \vec{f}_2 \end{aligned}$$

oder geschrieben in der Basis $\vec{f}_i$

$$\begin{aligned}\vec{g}_1 &= \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\ \vec{g}_2 &= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die Basis-Matrix der ersten Basis ist $\mathbf{F} = \mathbb{1}$ und die der zweiten Basis $\mathbf{G}$ besteht aus den neuen Basisvektoren $\vec{g}_1$ und $\vec{g}_2$, dargestellt mit Hilfe der Basisvektoren $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$, die in die Spalten geschrieben werden:

$$\mathbf{G} = \{\vec{g}_1; \vec{g}_2\} = \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

Schliesslich ist die Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \mathbf{B}^{-1} \odot \mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

(e) Die Kugel befindet sich also bei

$$\vec{v}^G = \mathbf{T}\vec{v} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

und

$$\vec{v'}^G = \mathbf{T}\vec{v'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$$

(f) Die Spiegelungmatrix in der Basis $\mathbf{G}$ berechnet sich wie folgt

$$\mathbf{M}^G = \mathbf{T} \odot \mathbf{M} \odot \mathbf{T}^-1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

(g) Führen wir die Spiegelung in der Basis $\mathbf{G}$ aus, erhalten wir

$$\vec{v'}^G = \mathbf{M}^G \cdot \vec{v}^G = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \odot \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$$

Diese Koordinaten stimmen mit dem Punkt überein, der in der Basis $\mathbf{G}$ gespiegelt wurde und dann in die Basis $\mathbf{F}$ transformiert wurde. Also ist die Koordinaten-Transformation sowohl für die Koodinaten wie auch für die Abbildungen konsistent.

**5. Ableitung als linearer Operator 1,** **886667**

Benutze die Basis $\cos(t)$ und $\sin(t)$ und berechne die Matrix des Operators $-\frac{d}{dt}$. Benutze das Resultat um die 7-te Ableitung von $a\cdot\cos(t)+b\cdot\sin(t)$ zu berechnen.

**Lösung**

Es gilt $\frac{d}{dt}\cos(t) = -\sin(t)$ und $\frac{d}{dt}\sin(t) = \cos(t)$. In der Basis $\vec{e}_1 = \cos(t)$ und $\vec{e}_2 = \sin(t)$ gilt also:

$$\frac{d}{dt} : \vec{e}_1 \mapsto -\vec{e}_2 \text{ und } \vec{e}_2 \mapsto \vec{e}_1$$

In Matrix-Schreibweise ist dies $-\frac{d}{dt} \leftrightarrow \mathbf{D} = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$.

Die 7-te Ableitung schreibt sich deshalb als

$$\underbrace{\mathbf{D} \odot \ldots \odot \mathbf{D}}_{7mal}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$$

6. **Ableitung als linearer Operator 2,** **480231**

Benutze die Basis $\cos(\omega \cdot t)$ und $\sin(\omega \cdot t)$ und berechne die Matrix des Operators ($\omega$ ist eine feste reelle Zahl) $-\frac{d}{dt}$.
Berechne damit die 4-te Ableitung von $c \cdot \cos(\omega \cdot t) + d \cdot \sin(\omega \cdot t)$.

**Lösung**

Es gilt $\frac{d}{dt}\cos(\omega \cdot t) = -\omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$ und $\frac{d}{dt}\sin(\omega \cdot t) = \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$. In der Basis $\vec{e}_1 = \cos(\omega \cdot t)$ und $\vec{e}_2 = \sin(\omega \cdot t)$ gilt also:

$$\frac{d}{dt} : \ \vec{e}_1 \mapsto -\omega \cdot \vec{e}_2 \text{ und } \vec{e}_2 \mapsto \omega \cdot \vec{e}_1$$

In Matrix-Schreibweise ist dies $-\frac{d}{dt} \leftrightarrow \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$.

Die 4-te Ableitung schreibt sich deshalb als

$$\underbrace{\mathbf{D} \odot \ldots \odot \mathbf{D}}_{4mal} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \omega^4 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

7. **Ableitung als linearer Operator 3,** **600643**

Lösen Sie die Differenzialgleichung $p'(t) = 3\sin(\omega t) + 4\cos(\omega t)$. Schreiben Sie dazu die Differenzialgleichung als lineare Gleichung in der Basis $\cos(\omega \cdot t), \sin(\omega \cdot t)$.

**Lösung**

Wir benutzen die Basis und die Operatoren wie oben ($\vec{e}_1 = \cos(\omega \cdot t)$ und $\vec{e}_2 = \sin(\omega \cdot t)$). Dann entspricht die DGL dem Gleichungsystem ($a$ und $b$ sind die noch unbekannten Koeffizienten der Lösung)

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Durch Inversion der Matrix erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\omega} \\ \frac{1}{\omega} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Also ist die Lösung der DGL:

$$p(t) = \frac{4\sin(\omega x)}{\omega} - \frac{3\cos(\omega x)}{\omega}$$

**Übrigens:**

Mit dieser Technik haben wir nur einen Teil der Lösung gefunden, nämlich $p_{ihom}(x)$, die partikuläre Lösung. Normalerweise gilt:

$$p(x) = p_{\text{hom}}(x) + p_{ihom}(x) \ .$$

d.h. die vollständige Lösung besteht aus zwei Teilen, wobei der erste Teil die homogene Lösung ist. Sie erfüllt die Differentialgleichung, in der die rechte Seite gleich 0 gesetzt wird:

$$[p_{\text{hom}}(x)]' = 0 \ .$$

Hier kann man ihn bestimmen z.B. durch Trennung der Variablen

$$\begin{array}{rcl|l} \frac{dp}{dx} & = & 0 & \cdot dx \\ dp & = & 0 & \int \\ \int dp & = & 0 & \\ p(x) & = & C & \end{array}$$

Die homogene Lösung ist hier also nur eine Konstante und die gesammte Lösung ist dann

$$p(t) = \frac{4\sin(\omega x)}{\omega} - \frac{3\cos(\omega x)}{\omega} + C$$

8. **Polynome als Vektoren,** **835639**

Unter Benutzung von Matlab und der Befehle `polyder, polyval` und `roots` führen Sie folgende Operationen für die Polynome $p(t) = 1 + t + 2t^2 + 3t^3$ und $q(t) = 2 + 4t^5$ aus.

(a) Bestimme $p(0), p(-2)$ und $p(2)$.

(b) Bestimme $q(0), q(-2)$ und $q(2)$.

(c) Bestimme die Nullstellen von $q(t)$.

(d) Bestimme $\frac{d}{dt}q(t)$ und $\frac{d}{dt}q(t) \cdot p(t)$.

**Lösung**

Initialisierung durch `p = [3 2 1 1]` und `q = [4 0 0 0 0 2]`

(a) Befehl `polyval(p,[0 -2 2])` gibt 1, -17 und 35.

(b) Befehl `polyval(q,[0 -2 2])` gibt 2, -126 und 130.

(c) Befehl `roots(q)` gibt die Lösungen $t = -0.870551$,$t = -0.269015-0.827943i$,$t = 0.70429 - 0.511697i$,$t = 0.70429 + 0.511697i$,$t = -0.269015 + 0.827943i$.

(d) Befehl `polyder(q)` und `polyder(q,p)` gibt die Koeffizienten [ 1 4 9] und [96, 56,24,20,0,18,8,2].

## 21.3 Lineare Regression

1. **Interpolationspolynom,** **329850**

Bestimmen Sie das Interpolationspolynom zu den Punkten $\{(1,4),(2,2),(3,6),(5,17)\}$. Benutzen Sie MATLAB. Stellen Sie die Punkte und das Polynom anschliessend mit MATLAB grafisch dar.

**Lösung:**

- Ansatz

$$y = At^3 + Bt^2 + Ct + D$$

- Punkte einsetzen:

$$\begin{aligned}
(1,4) &\Rightarrow A + B + C + D = 4 \\
(2,2) &\Rightarrow 8A + 4B + 2C + D = 2 \\
(3,6) &\Rightarrow 27A + 9B + 3C + D = 6 \\
(5,17) &\Rightarrow 125A + 25B + 5C + D = 17
\end{aligned}$$

- Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ 125 & 25 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \\ 17 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} \\ \frac{27}{4} \\ -\frac{143}{8} \\ \frac{63}{4} \end{pmatrix}$$

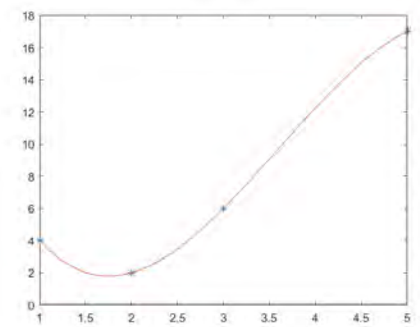
- Gesuchtes Interpolationspolynom:

$$y(t) = -\frac{5}{8}t^3 + \frac{27}{4}t^2 - \frac{143}{8}t + \frac{63}{4}$$

Numerisch:

$$y(t) = -0.625 \cdot t^3 + 6.75 \cdot t^2 - -17.875 \cdot t + 15.75$$

```
% Punkte für die Interpolation
pkl=[ 1, 4;2, 2;3, 6;5, 17] ;
% Matrix
A=[pkl(:,1).^3 pkl(:,1).^2 pkl(:,1).^1 pkl(:,1).^0 ]
cfs=inv(A)*pkl(:,2) %Koeffizienten a_3, a_2, a_1, a_0
% cfs =   -0.6250     6.7500    -17.8750     15.7500

% Visualisierung:
% Pkt generieren für Graphen der Interpolation
xl=1:0.1:5 ;
yl=[xl.^3 ; xl.^2 ; xl.^1 ;xl.^0  ]'*cfs ;

% Originalpunkte plotten als *
plot(pkl(:,1),pkl(:,2),'*')
hold on

% Interpolation plotten als -
plot(xl,yl)
```




2. **Abhängigkeit Ohm'scher Widerstand,** **212351**

Mit einem Experiment wird die Temperatur-Abhängigkeit eines Ohm'schen Widerstandes $R$ in Abhängigkeit der Temperatur $T$ bestimmt. Es resultiert die folgende Messreihe

| $T_i[^oC]$ | 20 | 25 | 30 | 40 | 50 | 60 | 65 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_i[\Omega]$ | 16.3 | 16.4 | 16.6 | 16.8 | 17.1 | 17.4 | 17.4 | 17.9 |

(a) Zeichnen Sie die Punkte in ein $T-R$-Diagramm ein. Welcher Zusammenhang lässt sich vermuten?

(b) Aus physikalischen Überlegungen verwenden wir den Ansatz $R(T) = \beta + \alpha T$. Bestimmen Sie die Parameter $\alpha$ und $\beta$.

**Lösung:**

(a) Vermutung: linearer Zusammenhang!

(b) • Punkte im Ansatz einsetzen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 25 \\ 1 & 30 \\ 1 & 40 \\ 1 & 50 \\ 1 & 60 \\ 1 & 65 \\ 1 & 80 \end{pmatrix}}_{F} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 16.3 \\ 16.4 \\ 16.6 \\ 16.8 \\ 17.1 \\ 17.4 \\ 17.4 \\ 17.9 \end{pmatrix}}_{\vec{y}}$$

• Normalensystem:

$$Fx = b \Rightarrow F^{\mathsf{T}}Fx = F^{\mathsf{T}}\vec{y}$$

$$\begin{pmatrix} 20250 & 370 \\ 370 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6368 \\ 135.9 \end{pmatrix}$$

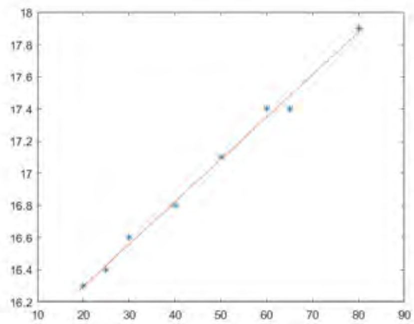
• Lösung:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20250 & 370 \\ 370 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6368 \\ 135.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0263 \\ 15.7695 \end{pmatrix}$$

• Gesuchte Funktion:

$$R(T) = 15.77\Omega + 0.0263\frac{\Omega}{^\circ C}T$$

```
% Punkte für die Regression
pkl = [ 20 16.3;  25 16.4; 30 16.6; 40 16.8; 50 17.1; 60 17.4; 65 17.4; 80
% Matrix
F=[ pkl(:,1).^0  pkl(:,1).^1]
M= F'*F
ys=F'*pkl(:,2)
cfs=inv(M)*ys %Koeffizienten a_0, a_1
% cfs =    15.7695     0.0263

% Visualisierung:
% Pkt generieren für Graphen der Interpolation
xl=19:1:81  ;
yl=[xl.^0  ;  xl.^1    ]'*cfs  ;

% Originalpunkte plotten als *
plot(pkl(:,1),pkl(:,2),'*')
hold on

% Interpolation plotten als -
plot(xl,yl)
```



3. **Lineare Regression,** **720107**

Die Bevölkerung in der Schweiz wächst von Jahr zu Jahr. Die Daten gemäss der Statistik des Bundesamtes für Statistik BFS (25.08.2011) sind unten gegeben (Daten für ständige Wohnbevölkerung am Ende des Jahres).

(a) Bestimmen die lineare Regression $n(t) = n_0 + a \cdot t$.

(b) Bestimmen Sie $n(2007.5)$ (die Bevölkerung zur Jahresmitte) und $n(2015)$ die Schätzung für die Bevölkerung Ende 2015.

| Jahr | no | Anz. [in 1000] |
|---|---|---|
| 2007 | 1 | 7593 |
| 2008 | 2 | 7702 |
| 2009 | 3 | 7786 |
| 2010 | 4 | 7870 |

**Lösung**

Das LGS lautet

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2007 \\ 1 & 2008 \\ 1 & 2009 \\ 1 & 2010 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}} \begin{pmatrix} n_0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7593 \\ 7702 \\ 7786 \\ 7870 \end{pmatrix} .$$

Durch die Multiplikation mit $\mathbf{F}^\intercal$ wird es in das Normalensystem überführt:

$$\begin{pmatrix} 4 & 8034 \\ 8034 & 16136294 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30951 \\ 62165541 \end{pmatrix} .$$

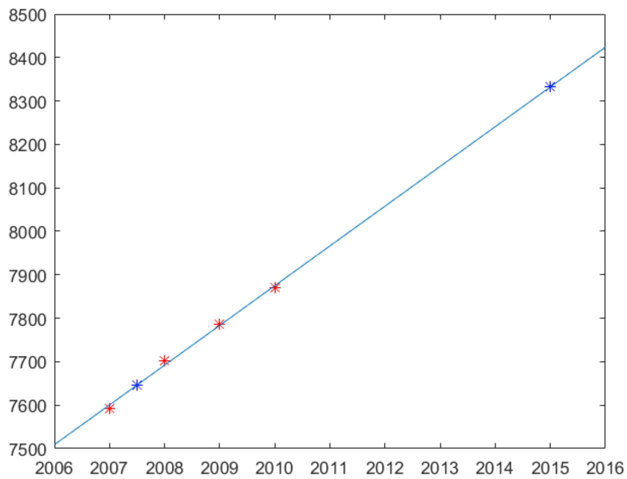
Die Lösung des LGS ergibt:

$$\begin{pmatrix} n_0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -176040 \\ 91.5 \end{pmatrix}$$

Damit lassen sich nun die Werte $n(2007.5) = -176040 + 91.5 \cdot 2007.5 = 7646.25$ und $n(2015) = -176040 + 91.5 \cdot 2015 = 8332.5$ berechnen (die Einwohner sind immer in Einheiten von 1000 gezählt).

```
% Punkte für die Regression
pkl = [2007 7593;2008 7702;2009 7786;2010 7870] ;
% Matrix
F=[ pkl(:,1).^0 pkl(:,1).^1]
M= F'*F
ys=F'*pkl(:,2)
cfs=inv(M)*ys %Koeffizienten a_0, a_1
% cfs = [ 1.0e+05 *-1.7604,1.0e+05 *0.0009]

% Interpolation, Extrapolation
jahr=[ 2007.5  2015 ]
bef=[jahr.^0 ; jahr.^1   ]'*cfs
%bef = 7646.3 8332.5

% Visualisierung:
% Pkt generieren für Graphen der Interpolation
xl=2006:0.1:2016 ;
```

```
yl=[xl.^0 ; xl.^1   ]'*cfs ;

% Originalpunkte plotten als *(rot)
plot(pkl(:,1),pkl(:,2),'r*')
hold on

% Interpolation/Extrapolation als *(blau)
plot(jahr,bef,'b*')

% Interpolation plotten als -
plot(xl,yl)
```




**4. Lösungen eines homogenen LGs,** **282095**

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Gaussschen Algorithmus:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{aligned} 3u + v - 1w &= 0 \\ -1u + 2v + 3w &= 0 \\ 5u - 3v - 7w &= 0 \end{aligned}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Lösung**

Für homogene lineare Gleichungssysteme genügt es, das Gauss Verfahren auf die Matrix anzuwenden.

(a) Durch die Umformung

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_1 - 3\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_2 - 4\mathbf{A}_3)$$

erhalten wir die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 9 & -5 \end{pmatrix}$. Die letzten beiden Zeilen sind nicht linear abhängig. Deshalb gibt es nur die triviale Lösung $x = y = z = 0$;

(b) Durch die Umformung

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_1 + 3\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3 + 5\mathbf{A}_2)\ \mathbf{A}'' = (\mathbf{A}'_1, \mathbf{A}'_2, \mathbf{A}'_3 - \mathbf{A}'_2)$$

erhalten wir die Matrizen

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

x und y sind Pivot-Variablen, z ist eine freie Variable. Wir setzen $z = \lambda$ und berechnen dann $y = -8 \cdot \lambda/7,\ x = 5 \cdot \lambda/7$.

(c) Durch die Umformung

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 - 2\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3 - 3\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_1),\ \mathbf{A}'' = (\mathbf{A}'_1, \mathbf{A}'_2/3, \mathbf{A}'_3 - 7 \cdot \mathbf{A}'_2/3, \mathbf{A}'_4 + \mathbf{A}'_2/3)$$

erhalten wir die Matrizen

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & -3 & 6 & -6 \\ 0 & -7 & 14 & -14 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$x_1$ und $x_2$ sind Pivot-Variablen, $x_4$ und $x_3$ sind freie Variable. Wir setzen $x_4 = \lambda,\ x_3 = \nu$ und berechnen dann $x_2 = -2 \cdot (\lambda - \nu),\ x_1 = 2 \cdot \lambda - \nu)$.

**5. Unterbestimmte/überbestimmte LGS, 861766**

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Gaussschen Algorithmus:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 11 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b)
$$\begin{aligned} u + 3v + 2w &= 19 \\ 2u - 18v + w &= -85 \\ -6u + 2v + 3w &= 1 \\ 3u + v + 5w &= 16 \end{aligned}$$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -9 \\ -6 & 6 & -9 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -21 \end{pmatrix}$

**Lösung**

(a) Dies ist ein überbestimmtes Gleichungsystem. Es kann nur Lösungen haben, falls zwei Gleichungen linear abhängig sind. Doch die Umformung

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 - 7\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3 - 2\mathbf{A}_1)$$

führt auf die erweiterte Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -24 & -7 \\ 0 & -13 & 0 \end{pmatrix}$. Aus $\mathbf{A}'$ kann man ablesen, dass die Gleichungen nicht linear abhängig sind. Deshalb gibt es keine Lösung.

(b) Dies ist ein überbestimmtes Gleichungssystem. Es kann nur Lösungen haben, falls zwei Gleichungen linear abhängig sind. Die Umformungen

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 - 2\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3 + 6\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_4 - 3\mathbf{A}_1),\ \mathbf{A}'' = (\mathbf{A}'_1, \mathbf{A}'_2, \mathbf{A}'_3, 3 \cdot\ \mathbf{A}'_4 - \mathbf{A}'_2)$$

ergeben die Matrizen

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -24 & -3 & -123 \\ 0 & 20 & 15 & 115 \\ 0 & -8 & -1 & -41 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -24 & -3 & -123 \\ 0 & 20 & 15 & 115 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. Die letzte Zeile in $\mathbf{A}''$ ist die linear abhängige Gleichung. Sie bringt keine Einschränkung für die Lösungsvariablen. Wir fahren weiter mit der Umformung

$$\mathbf{A}''' = (\mathbf{A}''_1, \mathbf{A}''_3/5, \mathbf{A}''_2 + 6\mathbf{A}''_3/5, \mathbf{A}''_4)$$

und erhalten

$$\mathbf{A}''' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & 4 & 3 & 23 \\ 0 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Stufenweises Einsetzen ergibt

$$z = 1, \ y = 5, \ x = 2 .$$

(c) Dies ist ein unterbestimmtes System. Mit der Umformung $\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 + 6\mathbf{A}_1)$ erhalten wir

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -9 & -1 \\ 0 & 36 & -15 & -39 & -27 \end{pmatrix}$$

. $x_4$ und $x_3$ sind freie Variablen. Wir wählen deshalb $x_4 = \lambda$ und $x_3 = \nu$. Dann ergeben sich von unten nach oben die Pivot-Variablen

$$x_2 = \frac{1}{12}(13\lambda + 5n - \nu)$$

und

$$x_1 = \frac{1}{12}(43\lambda - 13\nu + 33)$$

.

### 6. Lösungen eines LGS, 085229

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & 2 \\ -2 & 2 & a \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems hängt noch vom Wert des Parameters $a$ ab. Wann gibt es

(a) eine eindeutige Lösung

(b) unendlich viele Lösungen

(c) keine Lösung

**Lösung**

Die Anzahl der Lösungen hängt von der Determinante der Koeffizienten-Matrix ab.

$$\det(\mathbf{A}) = a - 4 - 2a + 2 - 4 + a^2 = -6 - a + a^2$$

. Sie verschwindet für

$$-6 - a + a^2 = 0 \ \Rightarrow a_1 = -2 \text{ und } a_1 = 3$$

(a) Eine eindeutige Lösung existiert für $a \neq -2$ und $a \neq 3$.

(b) Wir setzen $a = 3$. Mit der Umformung

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 + 3\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3 + 2\mathbf{A}_1)$$

ergeben sich die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \; \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 5 \end{pmatrix} .$$

In $\mathbf{A}'$ sind die letzten beiden Zeilen linear abhängig. Also gibt es unendlich viele Lösungen.

(c) Wir setzen $a = -2$. Für $\mathbf{A}$ ergeben sich dann die Umformungen

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 - 2\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3 + 2\mathbf{A}_1), \; \mathbf{A}'' = (\mathbf{A}_1', \mathbf{A}_2', \mathbf{A}_3' + 4\mathbf{A}_2')$$

und die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \; \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \; \mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} .$$

Die letzte Zeile von $\mathbf{A}''$ kann nicht erfüllt werden, also gibt es keine Lösung.

**7. Eigenvektor,** **841299**

Bestimmen Sie den Vektor $\vec{x}$ in

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{x}$$

d.h. den Vektor, der durch die Matrix $\mathbf{A}$ auf sich selber abgebildet wird.
Hinweis: Forme die Gleichung so um, dass $\vec{x}$ nur noch auf einer Seite vorkommt.

**Lösung**

Wir lösen die Gleichung nach $\vec{x}$ auf, indem wir auf beiden Seiten $\vec{x}$ abziehen, $\vec{x}$ mit $\mathbb{1}$ multiplizieren

$$\mathbf{A}\vec{x} - \vec{x} = \vec{0}$$

und dann $\vec{x}$ ausklammern

$$\underbrace{(\mathbf{A} - \mathbb{1})}_{=\mathbf{B}} \odot \vec{x} = \vec{0}$$

Für die Matrix $\mathbf{B}$ können wir also das homogene LGS lösen und erhalten so $\vec{x}$. Die Umformungen

$$\mathbf{B}' = (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1), \; \mathbf{B}'' = (\mathbf{B}_1', \mathbf{B}_2', \mathbf{B}_3' + 2\mathbf{B}_2')$$

von $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ führen auf

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{B}'' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Jetzt kann man von unten einsetzen. $x_3$ ist eine freie Variable und wir setzen $x_3 = \lambda$. Wir berechnen die Pivot-Variablen zu $x_2 = -\frac{\lambda}{2}$ und $x_1 = \frac{\lambda}{6}$. Um ganze Zahlen zu erhalten, multiplizieren wir die Lösung und 6, klammern $\lambda$ aus und schreiben die Lösung als Vektor

$$\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

## 21.4 Gruppen und Räume

### 1. Gruppe der Permutationen

$$\epsilon = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix} \quad \phi_3 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix} \quad \phi_4 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$$
$$\phi_5 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix} \quad \phi_6 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix} \quad \phi_7 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix} \quad \phi_8 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$$
$$\phi_9 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} \quad \phi_{10} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix} \quad \phi_{11} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix} \quad \phi_{12} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

(a) Jede Permutation kann zerlegt werden in Transitionen, d.h. in Vertauschungen von zwei Elementen. Z.B. $\phi_2$ ist die Verkettung der Vertauschung von Element 2 und 3 und anschliessende Vertauschung von Element 3 und 4. Bestimme die Vertauschungen mit der man $\phi_3$ erhält.

(b) In dieser Aufgabe betrachten wir die geraden Permutationen von vier Elementen. Sie heissen gerade, weil sie in eine gerade Anzahl von Permutationen zerlegt werden können und sind in der vorangehenden Tabelle aufgeführt. Berechne die Verknüpfungen $\phi_2 \circ \phi_3$ und $\phi_3 \circ \phi_4$ und verifiziere, dass das Resultat stets eine gerade Permutation ist.

(c) Berechne alle Verknüpfungen von zwei Elemente , in denen zuerst $\phi_2$ angewendet wird.

(d) Berechne alle Verknüpfungen von zwei Elemente , in denen zuerst $\phi_3$ angewendet wird.

(e) Bestimme mit Hilfe der vorherigen Teilaufgaben die Inversen von $\phi_2$ und $\phi_3$.

(f) Ist die Verknüpfung $\circ$ kommutativ für die geraden Permutationen?

### Lösung

(a) $\phi_3$ ist die Verkettung der Vertauschung von Element 2 und 4 und anschliessende Vertauschung von Element 3 und 4.

(b) Die Verknüpfungen sind

$$\phi_2 \circ \phi_3 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\\1&3&4&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} = \epsilon$$

$$\phi_3 \circ \phi_4 = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\\1&4&2&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix} = \phi_4$$

(c) $\phi_i \circ \phi_2 = \phi_j$

| $i =$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $j =$ | 2 | 3 | 1 | 7 | 9 | 8 | 10 | 12 | 11 | 4 | 5 | 6 |

(d) $\phi_i \circ \phi_3 = \phi_j$

| $i =$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $j =$ | 3 | 1 | 2 | 10 | 11 | 12 | 4 | 6 | 5 | 7 | 9 | 8 |

(e) $(\phi_2)^{-1} = \phi_3$ und $(\phi_3)^{-1} = \phi_2$ (Herauslesen aus den Tabellen, die vorhin aufgestellt wurden).

(f) Nein, die Verknüpfung ist nicht kommutativ, denn z.B. $\phi_3 \circ \phi_4 = \phi_5$ aber $\phi_4 \circ \phi_3 = \phi_{10}$.

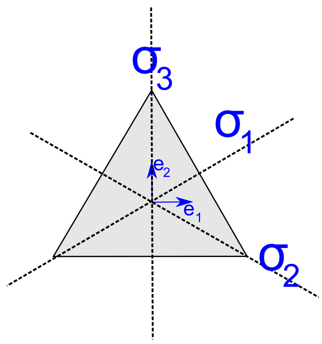



Abbildung 21.2: Spiegelsymmetrien eines Dreiecks

**2. Die Symmetrien eines Dreiecks,** **193177**

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad C_3^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Matrizen der Verknüpfungen $C_3 \odot C_3^2$ und $C_3 \odot \sigma_3$.

(b) Wie Abb. 21.2 zeigt, sind die angegebenen Matrizen die Symmetrien eines Dreiecks in der Ebene. Stelle mit Hilfe der Multiplikation der Matrizen (und auch durch Visualisierung am Dreieck) die Gruppentafel auf .

(c) Ist die Gruppe kommutativ?

(d) Bestimme mit Hilfe der Gruppentafel die Inversen für die Elemente der Gruppe.

(e) Vergleiche die Transponierte von $C_3$ und die Inverse von $C_3$. Stelle eine Vermutung auf.

(f) Verifiziere, dass die obige Vermutung für alle Elemente der Gruppe gilt.

**Lösung**

(a)
$$C_3 \odot C_3^2 = \mathbb{1}$$

(die Drehung um 240° und anschliessende Drehnung um 120° ergibt die Identität).

$$C_3 \odot \sigma_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \sigma_1$$

.

(b) Gruppentafel von $C_{3v}$:

| $C_{3v}$ | $E$ | $C_3$ | $C_3^2$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $E$ | $E$ | $C_3$ | $C_3^2$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ |
| $C_3$ | $C_3$ | $C_3^2$ | $E$ | $\sigma_3$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ |
| $C_3^2$ | $C_3^2$ | $E$ | $C_3$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $\sigma_1$ |
| $\sigma_1$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $E$ | $C_3$ | $C_3^2$ |
| $\sigma_2$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $\sigma_1$ | $C_3^2$ | $E$ | $C_3$ |
| $\sigma_3$ | $\sigma_3$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $C_3$ | $C_3^2$ | $E$ |

(c) Nein, die Gruppe ist nicht kommutativ (der Unterblock, mit den Drehungen ist kommutativ; dieser Unterblock ist symmetrisch).

(d)
$$\begin{array}{ccc} (E)^{-1} = E & (C_3)^{-1} = C_3^2 & (C_3^2)^{-1} = C_3 \\ (\sigma_1)^{-1} = \sigma_1 & (\sigma_2)^{-1} = \sigma_2 & (\sigma_3)^{-1} = \sigma_3 \end{array}$$

(e) $(C_3)^\intercal = (C_3)^{-1}$.

(f) Für orthogonale Matrizen gilt: $\mathbf{A}^\intercal = \mathbf{A}^{-1}$

**3. Gauss-Jordan-Verfahren,** **001653**

Bestimme die Inverse der Matrix $\mathbf{A}$ und die Lösung $\vec{x}$ des Gleichungssystems $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Lösung**

Die Schritte des Gauss-Jordan-Verfahrens sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3 - 2\mathbf{A}_1) \\ \mathbf{A}'' &= (\mathbf{A}'_1, \mathbf{A}'_3, \mathbf{A}'_2 - 3\mathbf{A}'_3) \\ \mathbf{A}''' &= (\mathbf{A}''_1 - \mathbf{A}''_3/12, \mathbf{A}''_2/3 - \mathbf{A}''_3/12, \mathbf{A}''_3/12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} &\quad | \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} &\quad | \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} &\quad | \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\quad | \quad \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \end{aligned}$$

Durch Anwenden von $\mathbf{A}^{-1}$ auf $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhalten wir die Lösung $\vec{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

**4. Lösungen eines inhomogenen LGS,** **151951**

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden inhomogenen linearen Gleichungssysteme durch elementare Zeilenumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 15 & -9 \\ -3 & -18 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Lösung**

(a) Mit den Umformungen

$$\begin{aligned}\mathbf{A}' &= (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 - 3\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3 + 3\mathbf{A}_1)\\ \mathbf{A}'' &= (\mathbf{A}'_1, \mathbf{A}'_2/6, \mathbf{A}'_3/7)\\ \mathbf{A}''' &= (\mathbf{A}''_1, \mathbf{A}''_2, \mathbf{A}''_3 + \mathbf{A}''_2)\end{aligned}$$

Erhalten wir die erweiterten Koeffizienten-Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2\\ 3 & 15 & -9 & 6\\ -3 & -18 & 11 & 6\end{pmatrix};\ \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 18 & -12 & 0\\ 0 & -21 & 14 & 12\end{pmatrix};\ \mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -2 & 0\\ 0 & -3 & 2 & \frac{12}{7}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}''' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{12}{7}\end{pmatrix};$$

Die letzte Zeile in $\mathbf{A}'''$ zeigt, dass das LGS inkonsistent ist, denn es gibt keine reelle Zahl $z$, die $0 \cdot z = \frac{12}{7}$ erfüllt.

(b) Durch die Umformung

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_1 - 5\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_2 - 2\mathbf{A}_3)\ , \mathbf{A}'' = (\mathbf{A}'_1, \mathbf{A}'_3/5, \mathbf{A}'_2 - 3\mathbf{A}'_3)$$

erhalten wir die erweiterten Koeffizienten-Matrizen

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 1\\ 0 & -15 & 9 & -3 & -3\\ 0 & -5 & 3 & -1 & -1\end{pmatrix}, \mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass $z$ eine freie Variable ist und setzen $z = \lambda$. Dann berechnen wir für die Pivot-Variablen von unten nach oben $y = \frac{1}{5}(1+3\lambda),\ x = (2+\lambda)/5.$

# Literaturverzeichnis

I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, and G. Musiol nad H. M Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. VERLAG EUROPA-LEHRMITTEL, 2009.

S. Goebbels and S. Ritter. *Mathematik verstehen und anwenden – von den Grundlagen bis zu Fourier-Reihen und Laplace-Transformation*. Spektrum Akademischer Verlag, 2011. ISBN 9783827427618.

Martin Meyer. *Signalverarbeitung*. Springer, 2009.

Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler – Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium*, volume 1 und 2. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 12 edition.