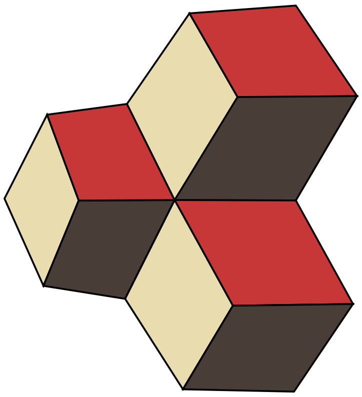
Lineare Algebra 1



Dr. D. Adams
Institut für Mathematik und Naturwissenschaften (IMN)
donat.adams@fhnw.ch
Büro: 5.1C01

Zürich, 31. Januar 2018

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Vektoren

KAPITEL 1

Begriffe: Vektoren

1.1 Notation

Ab 1934 verfasst eine Gruppe von französischen Mathematikern ein Lehrbuch der Mathematik, das “Éléments de mathématique”. Sie publizieren das Buch nicht unter ihrem richtigen Namen sondern unter dem Pseudonym “Nicolas Bourbaki”. Die Verfasser gehören zu einer Strömung innerhalb der Mathematik, die sich *axiomatische Mathematik* nennt. Sie sind der Überzeugung, dass man die Mathematik durchwegs mit eindeutigen Symbolen darstellen kann und soll. Indem man die nicht immer eindeutigen *Worte* vermeidet, gewinnt die Mathematik an Genauigkeit. Einige der Symbole, die die Gruppe eingeführt hat tauchen immer wieder auf.

Infobox 1.1 Bourbaki-Notation

- $\Rightarrow$ “hat zur Folge”
  BSP: $4 > 2$ und $2 > 1 \;\Rightarrow\; 4 > 1$
- $\iff$ “gilt genau dann, wenn”
  BSP: $a + b = c \iff a = c - b$
- $\to$ Zuweisung
  BSP: $\cos(x) : \; x \;\to\; \cos(x)$
- $\forall$ “gilt für alle”
  $\forall x > 4 : \; x > 3$
- $\mathbb{N}, \ldots, \mathbb{Q}$ Grundmengen von Zahlen
  - $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ natürliche Zahlen
  - $\mathbb{Z} = \{\ldots - 3, -2, -1, 01, 2, 3, \ldots\}$, ganze Zahlen
  - $\mathbb{Q}$, rationale Zahlen
  - $\mathbb{R}$, reelle Zahlen
  - $\mathbb{C}$, komplexe Zahlen
- $\{\}$ Mengen, wie in $\{0, 1, 2, 3\}$
- $\in$ “ist Element von”
  BSP: $1 \in \{0, 1, 2, 3\}$
- $\notin$ “ist kein Element von”
  BSP: $4 \notin \{0, 1, 2, 3\}$
- $=$ Identität; das gilt für jede Wahl der Variablen
  BSP: $(x + y)\,(x - y) = x^2 - y^2$
- $\overset{!}{=}$ definiert Lösungsmenge; Gleichung gilt nur für eine spezielle Wahl der Variablen
  BSP: $x^2 + 10x + 10 \overset{!}{=} 0$
- $:=$ Definition
  BSP: $x := 3$ “der freien Variablen x wird der Wert 3 zugewiesen”, ab dann können wir x schreiben oder 3. Das bedeutet das Gleiche.
- $\exists$ “es gibt”
  BSP: $\exists x : x > 5$ (es gibt eine Zahl x, so dass $x > 5$).
- $!\exists$ “es gibt genau ein”
  BSP: $existsx : x > 5$ und $x < 7$ (es gibt keine Zahl x, so dass $x > 5$ und $x < 7$).
- $\nexists$ “es gibt kein” BSP: $existsx : x > 5$ und $x < 6$ (es gibt keine Zahl x, so dass $x > 5$ und $x < 6$).

Beispiel 1.1 Übersetze die Symbole in einen Satz **302229**

- $\forall k \in \mathbb{R}$ und $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$: $k\,\vec{0} = \vec{0}$
- Für $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$: $0\,\vec{u} = \vec{0}$
- $k \in \mathbb{R}$ und $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$: $k\,\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$ oder $k = 0$
- $k \in \mathbb{R}$ und $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$: $(-k)\,\vec{u} = k\,(-\vec{u})$

In der axiomatischen Mathematik werden Definitionen gemacht. Definitionen nennt man auch Axiome. Sie bedürfen keiner weiterer Begründungen. Die Definitionen werden dann durch Sätze miteinander verknüpft. In diesem Skript sind die Definitionen grün markiert, die Sätze rot. In der modernen Mathematik versucht man mit möglichst wenigen und einfachen Definitionen auszukommen. Ausserdem dürfen die Axiome nicht zu Widersprüchen führen und sich in der Thematik nicht überschneiden sondern nur ergänzen. Im Fachjargon: Die Axiome müssen widerspruchsfrei und unabhängig sein.

1.2 Eliminationsverfahren von Gauss I

Definition 1.1 Kollinear

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **kollinear**, wenn es eine Zahl λ gibt, so dass $\vec{a} = \lambda\vec{b}$. Dann gilt auch

$$\vec{a} - \lambda\vec{b} = \vec{0}$$

Beispiel 1.2 Spezielle Lage von zwei Vektoren **014841**

Untersuche ob die Paare von Vektoren kollinear sind (durch Addition von Vielfachen der Vektoren).

1. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -12 \\ -12 \end{pmatrix}$
3. $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
4. $\vec{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{h} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
5. $\vec{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{l} = \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ -36 \end{pmatrix}$

Nehmen wir die Gleichung $\vec{a} - \frac{1}{6} \cdot \vec{b} = \vec{0}$, dann gilt z.B. auch $7 \cdot \vec{a} - 7 \cdot \frac{1}{6} \cdot \vec{b} = \vec{0}$ oder allgemein

$$x_1 \cdot \vec{k} + x_2 \cdot \vec{l} = \vec{0}$$

d.h. wir können beide Vektoren mit einer Vorzahl multiplizieren. Erhalten wir so den Null-Vektor, dann sind sie kollinear.

Beispiel 1.3 Spezielle Lage von zwei Vektoren **429102**

Untersuche ob die Paare von Vektoren kollinear sind (durch Addition von Vielfachen der Vektoren).

1. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$
2. $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

Definition 1.2 Linearkombination

Eine **Linearkombination** der Objekte $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_N\}$ ist die Summe

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_N\vec{a}_N$$

mit $x_i \in \mathbb{R}$

Die Linearkombination lässt sich auch mit dem Summenzeichen schreiben

$$\sum_{i=1}^{N} x_i\vec{a}_i \ .$$

Wir betrachten nun die spezielle Lage von drei Vektoren. Wie Fig. 1.2 zeigt, gilt für drei Vektoren, die in einer Ebene liegen

$$x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{0} \ .$$

Definition 1.3 Komplanar

Drei Vektoren sind komplanar, falls es eine Linearkombination

$$x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{0}, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

gibt mit $x_i \neq 0$ für mindestens einen Koeffizienten.

Nebenbei: Liegen die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ nicht in einer Ebene, dann ist die einzige Möglichkeit um aus der Summe der Vektoren den Nullvektor zu bekommen wie folgt

$$0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + 0 \cdot \vec{a}_3 = \vec{0}$$

Um herauszufinden, ob Vektoren komplanar sind, wenden wir das Gauss-Eliminationsverfahren an:

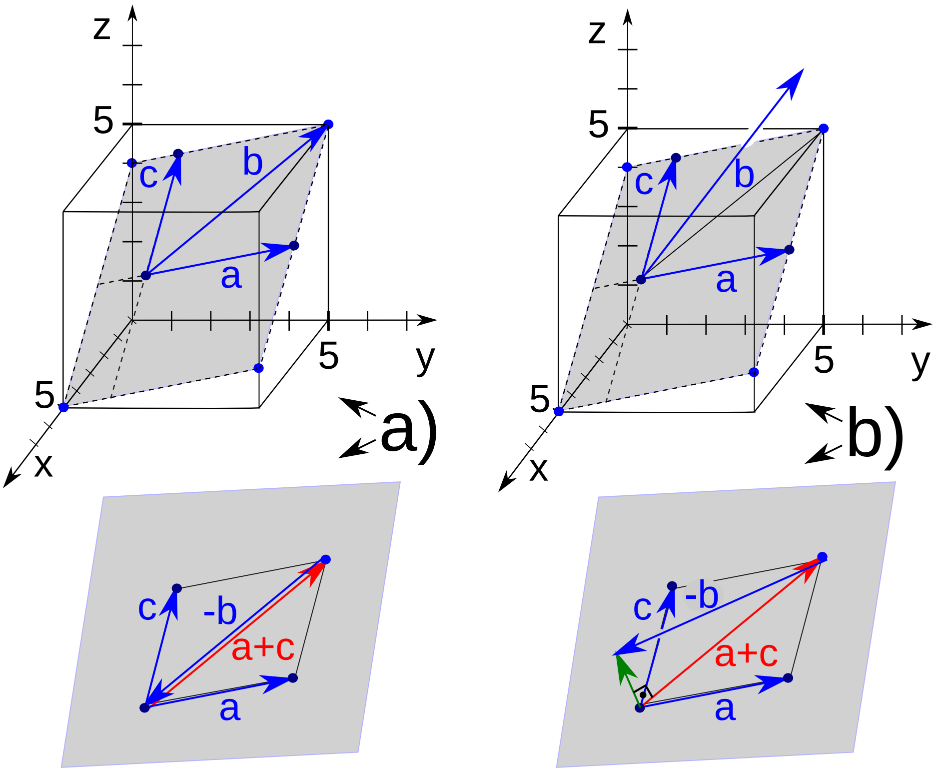


Abbildung 1.1: a) Drei Vektoren, die in einer Ebene liegen, lassen sich immer so addieren, dass der Nullvektor entsteht. b) Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ definieren eine Ebene. Zeigt der Vektor $\vec{b}$ aus dieser Ebene heraus, gibt es keine Linearkombination $x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{0}$ (abgesehen von der Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$).

Beispiel 1.4 Gauss-Eliminationsverfahren **782891**

Bestimme Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Falls ja: Geben Sie an, welche Linearkombination den Nullvektor ergibt.

Beispiel 1.5 Gauss-Eliminationsverfahren **854654**

Bestimme Sie, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ komplanar sind.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Falls ja: Geben Sie an, welche Linearkombination den Nullvektor ergibt.

Lineare Abhängigkeit ist nun die Verallgemeinerung von "kollinear" und "komplanar" für beliebig viele Vektoren.

Definition 1.4 Lineare Abhängigkeit

Die Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_N\}$ heisst **linear abhängig** genau dann, wenn die Gleichung

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_N\vec{a}_N = \vec{0}, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

eine Lösung besitzt mit $x_i \neq 0$ für mindestens einen Koeffizienten.

[Papula, Bd. 1 II 2.4] [Goebbels and Ritter, 2011, 3.3.2, p.429]

- Linear abhängige Vektoren haben eine spezielle Lage zueinander. Zwei kollineare Vektoren sind linear abhängig, drei komplanare Vektoren sind linear abhängig. Die spezielle Lage erlaubt, dass man entlang der Vektoren wieder zum Ursprung zurück gelang.
- In 2 Dimensionen sind mehr als 2 Vektoren *immer* linear abhängig. In 3 Dimensionen sind mehr als 3 Vektoren *immer* linear abhängig usw.
- Linear unabhängige Vektoren haben keine spezielle Lage zueinander. Zwei linear unabhängige Vektoren spannen einen Fläche auf, drei linear unabhängige Vektoren spannen ein Volumen auf, vier linear unabhängige Vektoren spannen ein Hyper-Volumen. Wenn man entlang von jedem Vektor geht, kommt man nie wieder zum Ursprung zurück, ausser man setzt alle Schrittlängen auf 0.

1.3 Gleichungen lösen mit dem Gauss-Verfahren

Beispiel 1.6 Einsetzen in die Dreiecksform **14841**

Löse das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\left| \begin{array}{cccrr} 2x & -3y & +5z & = & 12 \\ & 5y & -z & = & 6 \\ & & 7z & = & 28 \end{array} \right|$$

Wir sehen, dass die Dreiecksform eines Gleichungssystems den Vorteil hat, dass man von unten nach oben einsetzen kann. Deshalb ist es nützlich, Gleichungssysteme in diese Form zu bringen. Dies geschieht mit dem Gauss-Verfahren.

Beispiel 1.7 Dreiecksform **601555**

Bestimmen sie für das vorliegende lineare Gleichungssystem die Dreiecksform mit dem Gaussverfahren.

Löse das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\begin{vmatrix} 2x & -3y & +5z & = & 12 \\ 4x & -y & +9z & = & 30 \\ 8x & -2y & +25z & = & 88 \end{vmatrix}$$

1.4 Der Vektorraum oder: Was ist ein Vektor?

Definition 1.5 Vektorraum

Ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist eine Menge V mit einer Addition $+ \colon V \times V \mapsto V$ und einer skalaren Multiplikation $\cdot \colon \mathbb{R} \times V \mapsto V$. Seien $\vec{v}$, $\vec{w}$ beliebige Elemente des Vektorraums, dann muss gelten:

- Die Addition ist kommutativ: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
- Es gibt ein Element $\vec{0}$ (das **neutrale Element der Addition**), das folgendes erfüllt:
$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$
- $\vec{v} + \vec{w}$ und $a \cdot \vec{v}$ liegen ebenfalls in V (Abgeschlossenheit).
- Zu jedem $\vec{v}$ gibt es einen **Gegenvektor**[a] $-\vec{v}$, so dass
$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$
- Die skalare Multiplikation ist assoziativ: $a \cdot (b \cdot \vec{v}) = (a \cdot b) \cdot \vec{v}$
- Die skalare Multiplikation ist distributiv: $a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}$ und $(a+b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$
- Das neutrale Element (1) der Multiplikation in $\mathbb{R}$ ist auch in V ein neutrales Element $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

Dabei sind a, b beliebige Elemente von $\mathbb{R}$.

[a] man spricht auch vom Inversen von $\vec{v}$

Beispiel 1.8 Die Ebene $\mathbb{R}^2$ **14841**

Zeige, dass die Tupel $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation

$$\begin{aligned} (x, y) + (p, k) &= (x + p, y + k) \\ (x, y) \cdot \lambda &= (x \cdot \lambda, y \cdot \lambda) \end{aligned}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beispiel 1.9 Die Gerade in $\mathbb{R}^2$ **234208**

Zeige, dass die Tupel $a \cdot (1, 3) \in \mathbb{R}^2$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation.

Beispiel 1.10 Die Gerade in $\mathbb{R}^2$ **234208**

Prüfe, ob die Tupel $(a + 1, 3a) \in \mathbb{R}^2$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation.

Beispiel 1.11 Die Ebene $\mathbb{R}^3$ **826816**

Wie wir später sehen werden, liegen die Punkte, die man bilden kann mit dem Gesetz

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a+b \end{pmatrix}$$

in einer Ebene (die den Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ einschliesst). Zeige, dass die Tripel in $\begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a+b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ einen Vektorraum bilden. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation.

Definition 1.6 Unterraum

Eine Teilmenge $U \subseteq V$ eines Vektorraums nennt man Unterraum, falls für alle $\vec{u} \in U$ und $\vec{u}' \in U$

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{u}' &\in U \\ a \cdot \vec{u} &\in U \end{aligned}$$

Dabei ist $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl.

Infobox 1.2 Unterräume in $\mathbb{R}^N$

Typische Unterräume in $\mathbb{R}^N$ sind Geraden und Ebenen, die $\vec{0}$ beinhalten (sie gehen durch den Ursprung).

Beispiel 1.12 Die Ebene $\mathbb{R}^2$ **014841**

Bilden die Tupel in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0,\ y > 0$ und $x < 20$ und $y < 30$ einen Vektorraum. Betrachte nur die Abgeschlossenheit mit der Addition und der Multiplikation

$$\begin{array}{rcl} (x, y) + (p, k) & = & (x + p, y + k) \\ (x, y) \cdot \lambda & = & (x \cdot \lambda, y \cdot \lambda) \end{array}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beispiel 1.13 Polynome bis Grad 4 **625994**

Zeige, dass die Polynome mit Grad Null bis 4 einen fünfdimensionalen Vektorraum P^4 bilden.

1.5 Komponentenweise Notation von Vektoren

Wie wir später sehen werden, benutzt man in der Anwendungen meist eine komponentenweise Notation, d.h. man betreibt Mathematik mit den Komponenten. Bei dieser Notation sind folgende Regeln wichtig:

Infobox 1.3 Gesetze für die komponentenweise Notation von Vektoren

Betrachte $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$:

- Die Vektoren werden addiert, indem die Komponenten addiert werden.

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} -3+2 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Die Addition ist kommutativ: $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
- Das neutrale Element der Addition ist

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Wir nennen diesen Vektor den Nullvektor.

- Komponentenweise Multiplikation mit einer Zahl:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_N \end{pmatrix} \text{ z.B. } 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Der Gegenvektor zu $\vec{w}$ ist $-\vec{w}$. Wir berechnen ihn, indem wir alle Komponenten mit (-1) multiplizieren:

$$-\vec{w} = (-1) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Der Betrag $|\vec{a}|$ eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ ist (in einer Orthogonalbasis)

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + \ \dots \ + (a_N)^2}$$

  .

- Für den Betrag eines Vektor gilt immer

$$|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$$

Den Betrag eines Vektor nennen wir in der Geometrie auch seine **Länge**. Folgende Begriffe aus der Geometrie sind noch wichtig:

Vektoren können verwendet werden um den Ort eines Punktes anzugeben. Diese Vektoren können nicht verschoben werden (im Gegensatz zu einem allgemeinen Vektor).

Definition 1.7 Ortsvektor

Als Ortsvektor eines Punktes bezeichnet man einen Vektor, der vom Ursprung zu diesem Punkt zeigt.

Wir verwenden die Konvention, dass Ortsvektoren mit Grossbuchstaben $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \dots$ und Vektoren (ohne Bindung an einen Ort) mit Kleinbuchstaben $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ geschrieben werden. Ausserdem geben wir Punkte stets anhand von Koordinaten bezüglich einer Basis an. Deshalb identifizieren jeden abstrakten Punkt mit seinem Ortsvektor.

Definition 1.8 Normierter Vektor

Der Vektor $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ hat die Länge 1 und heisst deshalb **normiert**.
Achtung: Den Vektor mit $|\vec{a}| = 0$ kann man nicht normieren.

Heute wird die Vektorrechnung oft auf abstrakte Objekte (Signale, Funktionen, etc.) angewandt. Deshalb wird meist mit der Abstrakten Definition des Vektorraums in Definition 5 gearbeitet. Die ursprüngliche geometrische Deutung des Vektorraum — wie sie vollständigkeitshalber im nächsten Abschnitt dargestellt wird — wird selten verwendet.

Beispiel 1.14 Gesetze für die komponentenweise Notation von Vektoren 490953

Gib den Nullvektor in $\mathbb{R}^5$ an und bestimme für die angegebenen Vektoren die Komponenten

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Benutze, wann immer möglich, mathematische Gesetzte

1. $\vec{v} + \vec{w}$
2. $5\vec{v}$, $5\vec{w}$ und $5 \cdot (\vec{v} + \vec{w})$
3. $-\vec{v}$
4. $|\vec{v}|$
5. $|\vec{v} \cdot 5|$

Beispiel 1.15 Normierung 492646

Normiere die Vektoren.

1. $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$
2. $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$
3. $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$
4. $\vec{d} = \begin{pmatrix} -20 \\ 99 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.6 Geometrische Deutung der Vektoren*

Beispiel 1.16 Verschiebung eines Dreiecks **326024**

Vektoren entstehen aus einer Verschiebung.
Verschieben Sie das Dreieck

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

so dass die Ecke $\vec{A}$ auf $\vec{A}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu liegen kommt. Führe die Verschiebung grafisch, d.h. mit Lineal und Geodreieck aus.

Durch die Verschiebung entsteht eine Menge von Pfeilen, die die Ecken des Dreiecks verschieben. Sie haben alle die selbe Länge und die selbe Richtung. All die Pfeile denken wir als ein Objekt, als Vektor. Er hat also keinen Anfangspunkt, sondern nur Länge und Richtung.

Definition 1.9 Vektor

Ein **Vektor** ist durch eine Länge (Grösse) und Richtung gegeben.

[Papula, Bd. 1 II 1.1]
Wir verwenden zur Kennzeichnung von Vektoren den Pfeil über dem Namen der Variablen.

Beispiel 1.17 Verschiebung eines Dreiecks, forts. **844255**

Berechne den Vektor der Verschiebung mit Zahlen. Führe dann die Verschiebung rechnerisch aus.

Wie das Beispiel zeigt, kann die Verschiebung durch Berechnung von Koordinaten oder durch eine Konstruktion durchgeführt werden. Das Resultat ist das gleiche.
Dabei haben wir einige Begriffe und Konzepte verwendet, ohne sie ausdrücklich zu benennen. Sie sollen im Nachfolgenden Schritt für Schritt eingeführt werden.

Beispiel 1.18 Verkettung von Verschiebungen **145238**

Verschiebe das Dreieck

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \end{pmatrix}$$

um den Verschiebungs-Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Verschiebe dann $\vec{A}', \vec{B}', \vec{C}'$ um den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wie kommen wir direkt zur Verschiebung

$$\vec{A}\vec{B}\vec{C} \rightarrow \vec{A}''\vec{B}''\vec{C}'' \text{ ?}$$

Definition 1.10 Vektoradditon

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden addiert, indem

- $\vec{b}$ parallel verschoben wird, bis sein Anfangspunkt mit dem Endpunkt von $\vec{a}$ zusammenfällt.
- Der Summenvektor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ geht vom Anfangspunkt von $\vec{a}$ bis zum Endpunkt von $\vec{b}$

Definition 1.11 Gegenvektor = inverser Vektor

Zu jedem Vektor $\vec{a}$ gibt es einen Gegenvektor $-\vec{a}$. Er besitzt den gleichen Betrag aber die entgegengesetzte Richtung.

Definition 1.12 Differenz-Vektor

Der Differenz-Vektor $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ ist die Summe von $\vec{a}$ und $-\vec{b}$

Definition 1.13 Multiplikation mit einer Zahl

Durch die Multiplikation von $\vec{a}$ mit einer reellen Zahl λ entsteht ein neuer Vektor $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ mit Betrag $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$. $\vec{b}$ ist parallel (Fall $\lambda > 0$) oder antiparallel (Fall $\lambda < 0$) zu $\vec{a}$ gerichtet.

KAPITEL 2

Trigonometrie

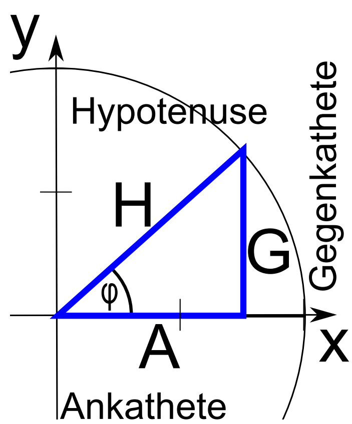
2.1 Definition der Trigonometrischen Funktionen

Definition 2.1 Winkelfunktionen

$$\sin(\alpha) = \frac{G}{H};\ \cos(\alpha) = \frac{A}{H}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{G}{A};\ \cot(\alpha) = \frac{A}{G}$$

Mit den Abkürzungen A für Ankathete, G für Gegenkathete und H für Hypotenuse.

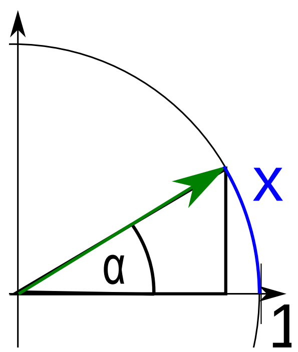


[Papula, Bd. 1 III 9.1]

Definition 2.2 Bogenmass

Unter dem Bogenmass x eines Winkels α (in Grad) verstehen wir die Länge des Bogens auf dem Einheitskreis.

$$\frac{x}{2\pi} = \frac{\alpha}{360°}$$



Für die Umrechnung von Bogenmass auf Winkel-Grad oder umgekehrt benutzen wir eine Tabelle und den Innen-Winkel eines vollen Kreises in den beiden Masseinheiten.

Beispiel 2.1 Rechne die Masseinheit um **245307**

Berechne die Winkel $x = \frac{\pi}{7}$ und $\varphi = 12°$ in beiden Masseinheiten.

Definition 2.3 Arkustangens-Funktion

Die Arkustangens-Funktion ordnet den Stücken $x > 0$ und y den Winkel φ zu.

$$\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$$

Im 2. und 3. Quadranten (d.h. $x < 0$) rechne $\varphi = 180° + \arctan(y/x)$ oder im Bogenmass $\varphi = \pi + \arctan(y/x)$

Beispiel 2.2 Neigungswinkel **084725**

Berechne den Neigungswinkel für ein Gelände mit 5%, 50%, 100% und 200% Neigung.

2.2 Geraden, Ebenen in Parameterform

2.2.1 Geradengleichung

Beispiel 2.3 Bestimme die Punkte auf der Geraden durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$ **814251**

Gegeben seien die Punkte

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Berechne zunächst zwei weitere Punkte auf der Geraden durch $\vec{A}$ und $\vec{B}$. Überlege dann, wie man alle Punkte auf der Geraden berechnen kann.

Definition 2.4 Parameterdarstellung einer Geraden

Die Parameterdarstellung einer Geraden g ist $g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$

- $\vec{A}$ heisst **Aufpunkt** (oder auch Stütz-Pfeil).
- $\vec{u}$ heisst **Richtungsvektor**

[Papula, Bd. 1 II 4.1]

Beispiel 2.4 Punkte einer Geraden **702095**

Die Gerade ist gegeben durch

$$g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Liegen die Punkte auf der Geraden g?

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}, \vec{S} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

In $\mathbb{R}^2$ gibt es die Parameterdarstellung der Geraden und die Darstellung in Koordinatenform (wir werden sie später kennenlernen).
In $\mathbb{R}^3$ und in $\mathbb{R}^N$ mit $N > 3$ gibt es nur die Parameterdarstellung der Geraden.

2.2.2 Ebenengleichung

Durch einen festen Punkt (den Aufpunkt) und eine gegebene Richtung (den Richtungsvektor) erhält man eine Gerade. Nimmt man einen zweiten Richtunsvektor hinzu, dann entsteht eine Ebene.

Definition 2.5 Parameterdarstellung einer Ebene in $\mathbb{R}^3$

Die Parameterdarstellung einer Ebene in $\mathbb{R}^3$ ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{P} + \lambda \vec{u} + \nu \vec{v}$$

- $\vec{P} \in \mathbb{R}^3$ heisst **Aufpunkt** (oder Stützpfeil)
- $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ heissen **Richtungsvektoren**
- $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$ sind freie Parameter

Die Richtungsvektoren müssen nicht unbedingt senkrecht aufeinander stehen. Sie dürfen aber *nicht kollinear* sein.

Beispiel 2.5 Bestimme die Ebene in Parameterdarstellung **787135**

Die Ebene E geht durch die Punkte

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} .$$

Beispiel 2.6 Liegen die Punkte in der Ebene E? **642893**

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} -22 \\ 28 \\ -22 \end{pmatrix}, \ \vec{R} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \ \vec{S} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

2.3 Parameterform vs. Geradengleichung

In $\mathbb{R}^2$ kann eine Gerade mit dem Aufpunkt und dem Richtungsvektor dargestellt werden z.B.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder in Form einer Gleichung, der Geradengleichung

$$y = m\,x + c$$

geschrieben werden. Als Vorbereitung auf die späteren Kapitel nummerieren wir die Koordinatenachsen. Dazu schreiben wir x_1 und x_2 statt x und y. Mit dieser Benennung lautet die Koordinatengleichung:

$$x_2 = m\,x_1 + c$$

Um von Parameterform auf die Koordinatenform zu gelangen können wir mit dem Richtungsvektor die Steigung berechnen

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{-3}$$

Ausserdem soll der Aufpunkt auf der Geraden liegen. Deshalb kann man ihn in die unfertige Geradengleichung einsetzen und es muss gelten:

$$2 = -\frac{1}{3}\,10 + c \Rightarrow c = \frac{16}{3}$$

Damit ist auch die Konstante der Geradengleichung bestimmt:

$$x_2 = -\frac{1}{3}\,x_1 + \frac{16}{3} .$$

KAPITEL 3

Skalarprodukt, Orthogonal-Basis

3.1 Basis, Komponenten

Definition 3.1 Basis

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ heissen Basis des Vektorraums V, falls

- sie linear unabhängig sind
- und jeder Vektor in V als Linearkombination von $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ geschrieben werden kann.

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ heissen **Basisvektoren**.

[Goebbels and Ritter, 2011, 3.12,p.433]

Definition 3.2 Dimension

Die Anzahl der Basisvektoren eines Vektorraums V heisst **Dimension** von V

Definition 3.3 Koordinate (Komponente)

Seien die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ eine Basis eines Vektorraums und

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \ \ldots \ + v_n\vec{e}_n \ ,$$

dann nennen wir $(v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_n)$ die **Koordinaten** von $\vec{v}$ (oder auch die **Komponenten** von $\vec{v}$).

Wir werden später zeigen, dass sich jeder Vektor in Komponenten zerlegen lässt, auch bezüglich einer Basis, die weder aus senkrechten noch normierten Basisvektoren besteht.

Beispiel 3.1 Vektor vs. Komponente **785039**

Schreiben Sie die Vektoren mit den Komponenten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ in mit den verschiedenen Basen.

1. $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = t$, $\vec{e}_3 = t^2$

2. $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = t^2 - 1$, $\vec{e}_3 = t^2 - t$

4. $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}_2 = \cos(t)$, $\vec{e}_3 = \sin(t)$

Beispiel 3.2 Vektorkomponenten **128857**

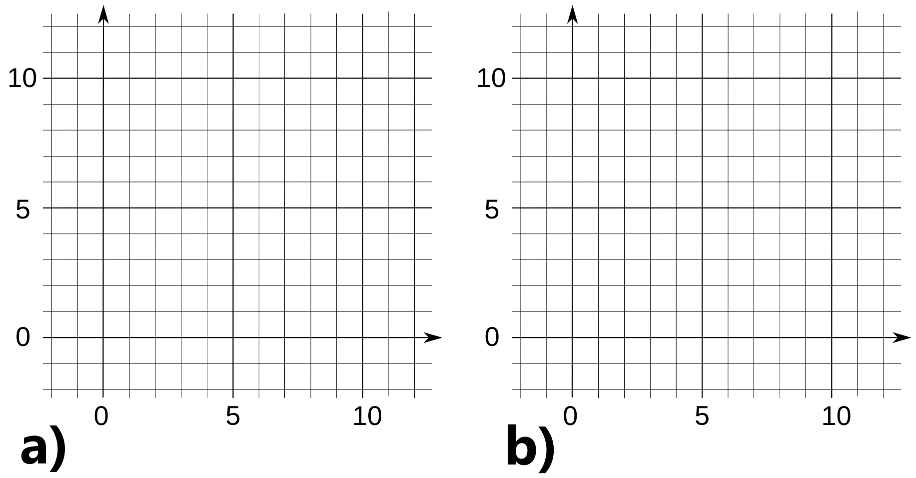
Zeichnen Sie die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$. Die Basis-Vektoren sind

1. $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Komponenten der Vektoren sind in jeder Basis

$$\vec{U} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \vec{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \; \vec{W} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$



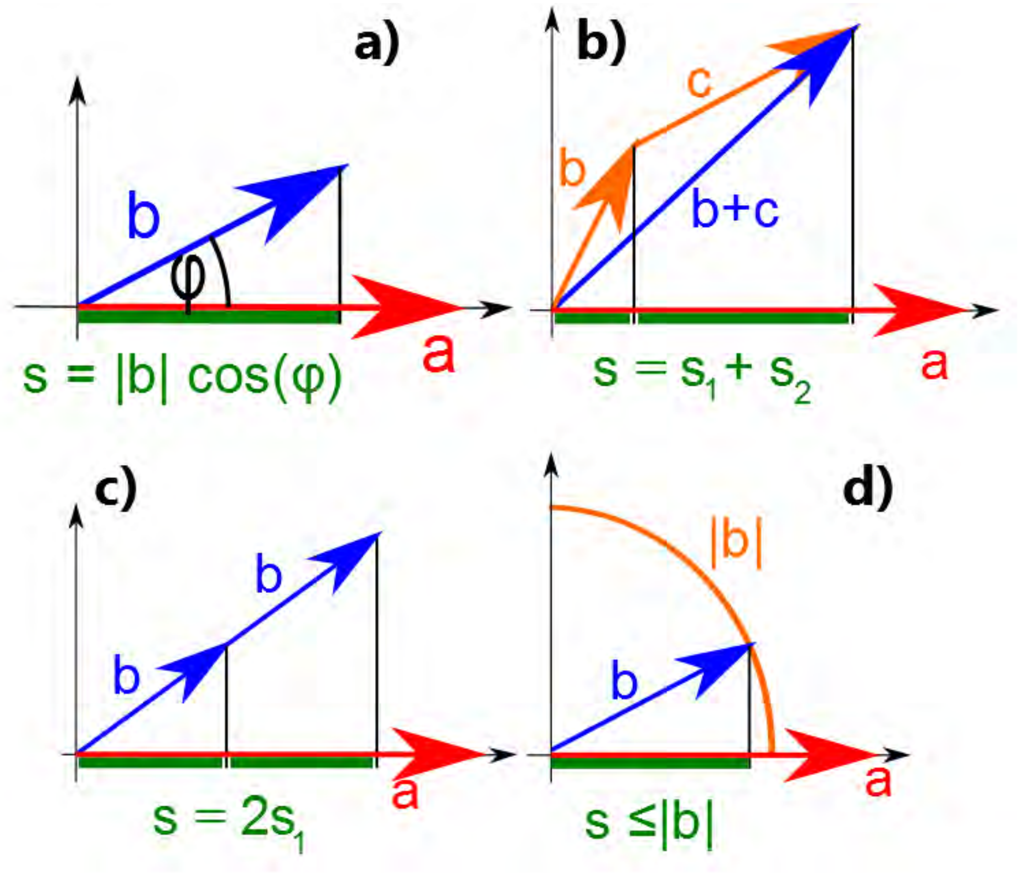


Abbildung 3.1: Die ersten Gesetzmässigkeiten für das Skalarprodukt folgen direkt aus geometrischen Betrachtungen.

Definition 3.4 Orthogonal-Basis

Eine Basis $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$, ... $\vec{g}_n$ heisst **orthogonal**, wenn die Basisvektoren rechtwinklig zu einander stehen.

Definition 3.5 Normierte Basis

Eine Basis heisst **normiert**, wenn die Basisvektoren $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$, ... $\vec{g}_n$ die Länge 1 haben.

Definition 3.6 Orthonormalbasis

Ist die Basis sowohl orthogonal wie auch normiert, heisst sie **Orthonormalbasis**.

3.2 Skalarprodukt

Dieses Kapitel ist ein schönes Beispiel für die axiomatische Arbeitsweise der modernen Mathematik. Am Anfang steht eine gescheite Definition

Definition 3.7 Skalarprodukt

Für $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die den Winkel φ einschliessen, ist das Skalarprodukt

$$\vec{a} \odot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

[Papula, Bd. 1 II 2.3]

Daraus werden verschiedene Eigenschaften abgeleitet. Zuerst stellen wir fest, dass

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \vec{b} \odot \vec{a}$$

denn

$$\vec{a} \odot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(\varphi) = \vec{b} \odot \vec{a} \ .$$

Danach finden wir

$$(\lambda\, \vec{a}) \odot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \odot \vec{b})$$

Um dies zu zeigen müssen wir den folgenden Ausdruck anschauen:

$$(\lambda\, \vec{a}) \odot \vec{b} = |\lambda\, \vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) \ .$$

Ist $\lambda > 0$ dann wird der Zwischenwinkel bei der Multiplikation mit $\vec{a}$ nicht verändert, also gilt

$$|\lambda\, \vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = \lambda \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = \lambda \cdot (\vec{a} \odot \vec{b}) \ .$$

Ist $\lambda < 0$ dann wird durch die Multiplikation der Zwischenwinkel verändert: $\varphi \to \varphi'$, aber es gilt $\cos(\varphi') = -\cos(\varphi)$. Also

$$|\lambda\, \vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) = -\lambda \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot [-\cos(\varphi)] = \lambda \cdot (\vec{a} \odot \vec{b}) \ .$$

Wir finden also, dass das Skalarprodukt alle (für positive und negative) Faktoren λ assoziativ ist.

Der Spezialfall $|a| = 1$ ist nun besonders anschaulich:

3.3 Spezialfall $|a| = 1$

Gemäss der Definition ist hier $\vec{a} \odot \vec{b} = |b| \cdot \cos(\varphi)$. Aus der Skizze in Abb. 3.1 a) ist aber ersichtlich, dass $|b| \cdot \cos(\varphi)$ genau die Länge des Schattens (grün) von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ ist. Das merken wir uns. Wir wollen nun $(\vec{b} + \vec{c}) \odot \vec{a}$ berechnen, d.h. den Schatten von $(\vec{b} + \vec{c})$ auf $\vec{a}$. Gemäss Abb. 3.1 b) ist dieser Schatten gleich der Summe der Schatten von $\vec{b}$ und von $\vec{c}$. Also gilt

$$(\vec{b} + \vec{c}) \odot \vec{a} = \vec{b} \odot \vec{a} + \vec{c} \odot \vec{a} \ . \tag{3.1}$$

Jetzt interessieren wir uns für den Schatten von $r \cdot \vec{b}$ auf $\vec{a}$, d.h. der Schatten des Vektors $\vec{b}$, der um den Faktor r gedehnt wurde. Gemäss Abb. 3.1 c) muss dieser Schatten um den selben Faktor gedehnt sein:

$$(r \cdot \vec{b}) \odot \vec{a} = r \cdot (\vec{b} \odot \vec{a}) \ . \tag{3.2}$$

Wie Abb. 3.1 c) zeigt, müssen wir auch zulassen, dass ein Schatten eine "negative Länge" hat, sollte λ mal negativ ausfallen. Schliesslich stellen wir noch fest, dass der Schatten (bei einem rechtwinkligen Lichteinfall) nie länger als das reale Objekt sein kann

$$\left|\vec{b} \odot \vec{a}\right| \leq \left|\vec{b}\right| \ . \tag{3.3}$$

3.4 Allgemeiner Fall

Wir wollen nun die Gleichungen 3.1 bis 3.3 benutzen um Gesetze für den allgemeinen Fall $|a| \neq 1$ zu finden. Zuerst stellen wir fest, dass aus der Definition des Skalarprodukts folgt

$$\vec{v} \odot \vec{v} = |v| \cdot |v| \cdot \underbrace{\cos(\varphi)}_{=1} = |v|^2$$

Dann stellen wir fest, dass jeder Vektor[1] $\vec{v}$ auf die Länge 1 gebracht werden kann, indem wir ihn durch seine Länge dividieren:

$$\vec{v}' = \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} \,.$$

Nun ist Eqn. 3.1 nur gültig, wenn $\vec{a}$ die Länge 1 hat. Deshalb müssen wir darin $\vec{a}$ jeweils mit $\frac{\vec{a}}{|a|}$ ersetzen:

$$(\vec{b} + \vec{c}) \odot \frac{\vec{a}}{|a|} = \vec{b} \odot \frac{\vec{a}}{|a|} + \vec{c} \odot \frac{\vec{a}}{|a|} \,. \tag{3.4}$$

Diese Gleichung kann auf beiden Seiten mit $|a|$ multipliziert werden und wir erhalten

$$(\vec{b} + \vec{c}) \odot \vec{a} = \vec{b} \odot \vec{a} + \vec{c} \odot \vec{a}$$

Daraus ergeben sich die

Satz 3.1 Gesetze für das Skalarprodukt

1. $\vec{a} \odot \vec{b} = \vec{b} \odot \vec{a}$
2. $(r \cdot \vec{b}) \odot \vec{a} = r(\vec{b} \odot \vec{a})$
3. $(\vec{b} + \vec{c}) \odot \vec{a} = \vec{b} \odot \vec{a} + \vec{c} \odot \vec{a}$
4. $\left|\vec{a} \odot \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|$

[Goebbels and Ritter, 2011, 3.1,p.394] [Papula, Bd. 1 II 3.3]

Für die erste Gleichung wurde verwendet, dass

$$\vec{a} \odot \vec{b} = |a| \cdot |b| \cdot \cos(\varphi) = |b| \cdot |a| \cdot \cos(\varphi) = \vec{b} \odot \vec{a}$$

Bisher haben wir ausschliesslich die abstrakte Schreibweise für Vektoren benutzt. Im Folgenden werden wir herleiten, wie man das Skalarprodukt für Vektoren in Komponenten-Schreibweise berechnet.

3.5 Komponenten-Schreibweise in Orthogonalbasis

Wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in Komponenten-Schreibweise als

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \,,$$

wie berechnen wir dann das Skalarprodukt $\vec{a} \odot \vec{b}$? Die meisten werden wohl antworten

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 \,,$$

[1] Um genau zu sein, jeder Vektor mit Ausnahme von $\vec{0}$

was zwar richtig ist, solange man mit einer Orthonormalbasis arbeitet. Für jede andere Basis ist diese Antwort aber *falsch*. Z.B. nehmen wir die Basis

$$\{\vec{f}_1,\, \vec{f}_2,\, \vec{f}_3\} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_E,\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_E,\; \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}_E\}\,.$$

Mit dem Index E drücken wir aus, dass die Vektoren in der Standardbasis $\mathbf{E} = \{\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \vec{e}_3\}$ gegeben sind. Die Basisvektoren sind normiert aber *nicht orthogonal*. Die Basisvektoren geschrieben in dieser Basis sind

$$\vec{f}_1 = 1\cdot\vec{f}_1 + 0\cdot\vec{f}_2 + 0\cdot\vec{f}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_F,\; \vec{f}_2 = 1\cdot\vec{f}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_F,\; \vec{f}_3 = 1\cdot\vec{f}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_F$$

Wenn wir hier naiv die Komponentenschreibweise für das Skalarprodukt benutzen, dann erhielten wir

$$\vec{f}_1 \odot \vec{f}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_F \odot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_F = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 = 0$$

Das würde ja bedeuten, dass $\vec{f}_1$ senkrecht auf $\vec{f}_2$ steht, aber das ist eben falsch. Die Basisvektoren stehen gerade nicht senkrecht aufeinander.
Wir werden deshalb hier die Berechnung des Skalarprodukts für Vektoren in Komponenten-schreibweise einer Orthonormalbasis herleiten. Für andere Basen kann das Skalarprodukt auf gleiche Weise hergeleitet werden.

Beispiel 3.3 Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$ für die Basisvektoren **195709**

Berechnen Sie das Skalarprodukt zwischen den Basisvektoren, d.h. der Schatten von $\vec{e}_1$ auf $\vec{e}_2$, von $\vec{e}_2$ auf $\vec{e}_1$, von $\vec{e}_1$ auf $\vec{e}_1$, von $\vec{e}_2$ auf $\vec{e}_2$?

Beispiel 3.4 Skalarprodukt in $\mathbb{R}^2$ für beliebige Vektoren **536234**

Berechne das Skalarprodukt zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$. Schreibe dafür die Vektoren als Summe der Basisvektoren und wenden dann die Gesetze für das Skalarprodukt (Satz 1) an.

Satz 3.2 Skalarprodukts für Vektoren in Komponenten-Schreibweise einer Orthonormalbasis

Das Skalarprodukt in einer Orthonormalbasis in $\mathbb{R}^N$ ist

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_N b_N \\ &= \sum_{i=1}^{N} a_i b_i\end{aligned}$$

Mit diesem Resultat können wir nun Winkel zwischen Vektoren berechnen. Die Definition des Skalarprodukts aufgelöst nach dem Winkel gibt

$$\frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{|a| \cdot |b|} = \cos(\varphi)$$

oder sogar

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{|a| \cdot |b|}\right) .$$

Anderseits wissen wir nun wie wir das Skalarprodukt und die Längen der Vektoren berechnen. Beachte, dass der Ausdruck $\frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{|a| \cdot |b|}$ gemäss der Schwarz'schen Ungleichung im Bereich $[-1; 1]$ liegt und dass deshalb der Winkel stets eindeutig definiert ist.

Infobox 3.1 Cos/ArcCos

Bei der Berechnung des Zwischenwinkels mit Hilfe des Skalarprodukts und $\arccos$ entstehen **keine** Probleme.

Beispiel 3.5 Berechne das Skalarprodukt und den Zwischenwinkel 599954

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.6 Skalarprodukt in nicht orthogonaler Basis*

Wir betrachten das Beispiel der Basis

$$\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\} = \{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_E, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_E, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_E\}$$

Die Basisvektoren sind normiert aber *nicht orthogonal*. Um das Skalarprodukt in dieser Basis zu berechnen, berechnen wir zuerst das Skalarprodukt zwischen den

Basisvektoren. Dafür verwenden wir die Schreibweise der Basisvektoren in der Orthonormalbasis

$$\vec{f_1} \odot \vec{f_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_E \odot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_E = 1 \qquad \vec{f_1} \odot \vec{f_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_E \odot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_E = \frac{1}{2}$$

$$\vec{f_1} \odot \vec{f_3} = \frac{1}{2} \qquad \vec{f_2} \odot \vec{f_2} = 1$$

$$\vec{f_2} \odot \vec{f_3} = \frac{1}{2} \qquad \vec{f_3} \odot \vec{f_3} = 1$$

Nun berechnen wir das Skalarprodukt zwischen den Vektoren $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_F$ und $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_F$ in dieser Basis und wenden dann die Gesetze für das Skalarprodukt 1 an:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_F \odot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}_F &= \left(a_1\vec{f_1} + a_2\vec{f_2} + a_3\vec{f_3}\right) \odot \left(b_1\vec{f_1} + b_2\vec{f_2} + b_3\vec{f_3}\right) \\
&= (a_1\vec{f_1}) \odot (b_1\vec{f_1}) + (a_1\vec{f_1}) \odot (b_2\vec{f_2}) + (a_1\vec{f_1}) \odot (b_3\vec{f_3}) \\
&\quad +(a_2\vec{f_2}) \odot (b_1\vec{f_1}) + (a_2\vec{f_2}) \odot (b_2\vec{f_2}) + (a_2\vec{f_2}) \odot (b_3\vec{f_3}) \\
&\quad +(a_3\vec{f_3}) \odot (b_1\vec{f_1}) + (a_3\vec{f_3}) \odot (b_2\vec{f_2}) + (a_3\vec{f_3}) \odot (b_3\vec{f_3}) \\
&= a_1b_1 + \frac{1}{2}a_1b_2 + \frac{1}{2}a_1b_3 + \frac{1}{2}a_2b_1 + a_2b_2 + \frac{1}{2}a_2b_3 + \frac{1}{2}a_3b_1 + \frac{1}{2}a_3b_2 + a_3b_3 \\
&= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_1b_2 + a_2b_3 + a_3b_1
\end{aligned}$$

Als Kontrolle berechnen wir das Skalarprodukt zwischen den orthogonal Vektoren $\vec{a} = \vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_F$ und dem Vektor $\vec{b} = \vec{f_2} + \vec{f_3} - \vec{f_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_F$.

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_F \odot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_F = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$$

Tatsächlich ergibt die Rechnung, dass die Vektoren orthogonal aufeinander stehen.

3.7 Orthogonale Projektion und Lot

Satz 3.3 Projektion und Lot

Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei Vektoren. Der Vektor $\vec{b}$ lässt sich eindeutig als $\vec{b} = \vec{f} + \vec{h}$ schreiben, wobei $\vec{f}$ parallel zu $\vec{a}$ steht und $\vec{h}$ senkrecht zu $\vec{a}$. Dabei sind $\vec{f}$ und $\vec{h}$ eindeutig festgelegt über:

$$\vec{f} = \left(\vec{b} \odot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad \text{und} \quad \vec{h} = \vec{b} - \vec{f}$$

Definition 3.8 Projektion und Lot

$\vec{f}$ heisst die **Projektion** von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ und $\vec{h}$ heisst das **Lot** von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

[Goebbels and Ritter, 2011, 3.1, p.398]
Die “Logik dahinter” ist, dass wir mit dem Ausdruck $\vec{b} \odot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ die Länge des Schattens von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ berechnen. Merke, dass die Länge des Schattens nur dann richtig berechnet wird, wenn auf einen Vektor der Länge 1 — hier auf $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ — projiziert wird. Danach wird die Länge des Schattens mit einem Vektor der Länge 1 — auch das ist $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ — multipliziert. Deshalb hat $\vec{f}$ genau die Länge des Schattens von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ und die Richtung von $\vec{a}$.

Beispiel 3.6 Zerlege $\vec{b}$ in Projektion und Lot bezüglich $\vec{a}$ **251965**

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Satz 3.4 Projektion und Spiegelung (an einer Geraden durch $\vec{0}$).

Ein Punkt $\vec{P} \in \mathbb{R}^2$ wird durch

$$\vec{P'} = \vec{P} - \vec{P} \odot \vec{n} \cdot \vec{n} \tag{3.5}$$

auf die Gerade $g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ projiziert, wobei

$$\vec{n} = \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} \text{ und } \vec{n}' = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} \text{ oder } \vec{n}' = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} .$$

Durch

$$\vec{P''} = \vec{P} - 2\vec{P} \odot \vec{n} \cdot \vec{n}$$

wird der Punkt $\vec{P}$ an der Geraden gespiegelt.

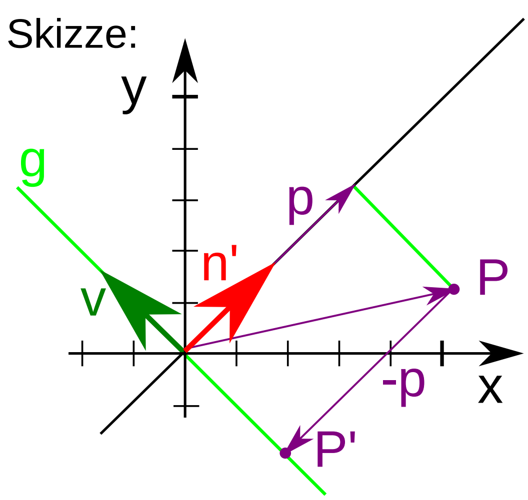


Abbildung 3.2: Illustration der Projektion mit der Benennung $\vec{p} = (\vec{P} \odot \vec{n}) \cdot \vec{n}$.

Beachte, dass eine Gerade die Ebene in zwei Halbebenen zerschneidet. Die Projektion $\vec{P} \odot \vec{n} \cdot \vec{n}$ zeigt stets in die selbe Halbebene wie $\vec{P}$, egal ob $\vec{n}$ in der selben Halbebene liegt wie $\vec{P}$. Deshalb bringt $\vec{P} - \vec{P} \odot \vec{n} \cdot \vec{n}$ den Punkt zurück auf die Gerade (Fig. 3.2), d.h. wir brauchen uns mit dem Vorzeichen in Gleichung 3.5 nicht beschäftigen. Es ist automatisch richtig.

3.8 Orthogonal Basis

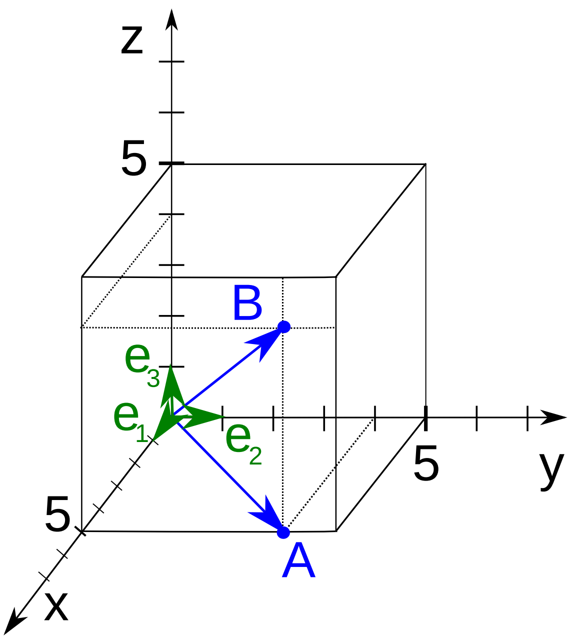
Wir schreiben die Komponenten meist in eine vertikale Liste

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Beachte, dass diese Liste noch kein geometrischer Vektor ist! Um den Vektor $\vec{v}$ zu erhalten müssen die Komponenten mit den Basisvektoren multipliziert und dann addiert werden.

3.8.1 Komponenten in einer Basis

Beispiel 3.7 Drücke $\vec{A}$ und $\vec{B}$ als Linearkombination von $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_3$ aus **158844**



$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definition 3.9 Standard-Basis

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ heissen **Standard-Basis** (auch kartesische Basis, kartesisanisches Koordinatensystem)

Was wir also bis jetzt indutitiv[2] gemacht haben, ist die Zerlegung von Vektoren in Komponenten entlang der Standardbasis. Diese Komponenten werden dann in Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ untereinander notiert.

Infobox 3.2 Spaltenvektoren vs. Zeilenvektoren

Papula benutzt Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und keine Zeilenvektoren (a_x, a_y)

[Papula, Bd. 1 II 2.1]

Beispiel 3.8 Basis-Wechsel (orthonormal) **585056**

Drücke die Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ in der Basis $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ aus (alle Vektoren sind in der Standard-Basis angegeben).

$$\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\} = \{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}\}$$

$$\{\vec{A}, \vec{B}\} = \{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}\}$$

Satz 3.5 Komponenten in einer Orthonormal-Basis

Bei der Basis-Transformation von der Standard-Basis in die Orthonormal-Basis $\mathbf{F} = \left\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots\right\}$ sind die Komponenten gegeben durch:

$$B_{j,F} = \vec{B} \odot \vec{f}_j$$

Beispiel 3.9 Basis-Wechsel (orthogonal) **304231**

Drücke die Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ in der Basis $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ aus (alle Vektoren sind in der Standard-Basis angegeben).

$$\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\} = \{\begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}\}$$

$$\{\vec{A}, \vec{B}\} = \{\begin{pmatrix} -60 \\ -80 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}\}$$

[2] d.h. ohne viel nachzudenken

Satz 3.6 Komponenten in einer Orthogonal-Basis

Bei der Basis-Transformation von der Standard-Basis in die Orthogonal-Basis $\mathbf{F} = \left\{\vec{f}_1,\, \vec{f}_2,\, \ldots\right\}$ sind die Komponenten gegeben durch:

$$B_{j,F} = (\vec{B} \odot \vec{f}_j) \cdot \frac{1}{|\vec{f}_j|^2}$$

Beispiel 3.10 Basis-Wechsel (orthonormal) **101909**

Drücke die Vektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ in der Basis $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ aus (alle Vektoren sind in der Standard-Basis angegeben).

$$\{\vec{f}_1,\, \vec{f}_2,\, \vec{f}_3\} = \{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}\}$$

$$\{\vec{A},\, \vec{B},\, \vec{C}\} = \{\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\10\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10\\0\\5\end{pmatrix}\}$$

Beispiel 3.11 Basis-Wechsel (orthogonal) **723703**

Drücke die Vektoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ in der Basis $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ aus (alle Vektoren sind in der Standard-Basis angegeben).

$$\{\vec{f}_1,\, \vec{f}_2,\, \vec{f}_3\} = \{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\}$$

$$\{\vec{A},\, \vec{B},\, \vec{C}\} = \{\begin{pmatrix}6\\-6\\12\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\11\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\10\\-14\end{pmatrix}\}$$

Der Basis-Wechsel für nicht orthogonale Basen ist rechnerisch aufwendig. Wir werden dies später betrachten.

3.8.2 Was ist eine Basis?

Infobox 3.3 Basis von $\mathbb{R}^3$

Jeder Satz von 3 Vektoren (die nicht in einer Ebene liegen) ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

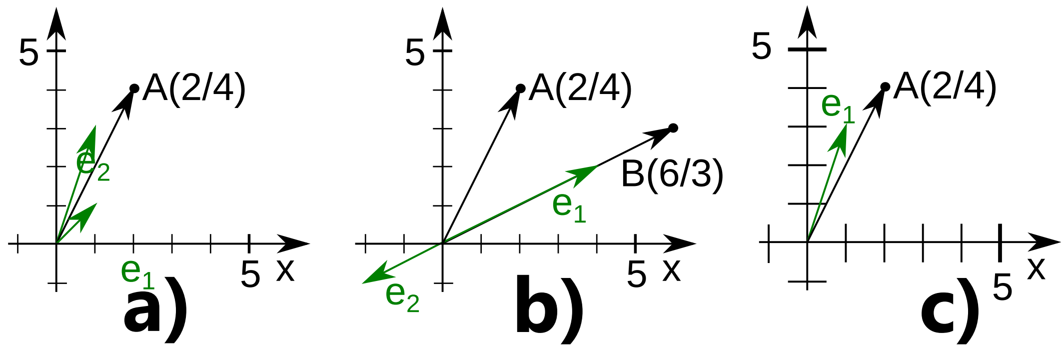


Abbildung 3.3: Die Darstellung eines Punktes in der Ebene als Summe von (zwei) Vektoren.

Wir haben gesehen, dass sich jeder Punkt in der Ebene schreiben lässt als die Summe von zwei Vektoren. Wir wollen kurz analysieren, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit dies möglich ist. Wählen wir $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ wie in Abb. 3.3 a), ist die Zerlegung immer möglich. Im Beispiel ist $\vec{A} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Wählen wir $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ wie in Abb. 3.3 b), ist die Zerlegung des Vektors $\vec{B}$ zwar möglich, es gibt sogar mehrere Möglichkeiten für die Zerlegung. Der Vektor $\vec{A}$ hingegen kann nicht dargestellt werden! $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ liegen auf einer Geraden — sie sind kollinear — und mit einer Addition dieser Vektoren ist es nicht möglich, von dieser Geraden wegzukommen. In Abb. 3.3 c) hingegen ist nur der Vektor $\vec{e}_2$ gegeben. Er reicht nicht um die Ebene abzudecken und um den Vektor $\vec{A}$ zu erreichen.

Mit den Fachbegriffen ausgedrückt, bedeutet dies: Für alle Situationen in Abb. 3.3 gilt, dass wir uns in der Ebene bewegen. Die Ebene $\mathbb{R}^2$ hat zwei Dimensionen, also brauchen wir mindestens zwei Basisvektoren. Deshalb ist der Vektor in Abb. 3.3 c) keine Basis. In Abb. 3.3 b) sind die Basisvektoren linear abhängig. Deshalb bilden sie keine Basis. Nur in Abb. 3.3 a) handelt es sich um eine Basis: Wir haben zwei Basisvektoren die linear unabhängig sind.

KAPITEL 4

Vektorprodukt

Auch hier gehen wir axiomatisch vor, genau so wie wir es bereits beim Skalarprodukt getan haben. Wir definieren dafür zuerst, welche Eigenschaften wir für das Vektorprodukt wünschen. Erst später kümmern wir uns darum, wie man das Vektorprodukt in einer gegebenen Basis berechnet.

Definition 4.1 Vektorprodukt

Für $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^3$, die den Winkel φ einschliessen, ist das **Vektorprodukt** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, mit den Eigenschaften:

- $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$
- $\vec{c}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bilden ein Rechtssystem

[Papula, Bd. 1 II 3.4], [Goebbels and Ritter, 2011, p.401]

Wie Abb.4.1 a) zeigt, ist der Betrag des Vektorprodukts gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Mit $|b| \sin(\varphi)$ wird die Komponente (rot) von $\vec{b}$ berechnet, die senkrecht auf $\vec{a}$ steht. Wie Abb.4.1 b) zeigt, kann die Fläche des grossen blauen Parallelogramms auf zwei Arten berechnet werden: entweder direkt als $|\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})|$ oder als Summe der kleinen roten Rechtecke, die sich zu $|\vec{a} \times \vec{b}|$ und $|\vec{a} \times \vec{c}|$ berechnen. Also muss gelten

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Abb.4.1 c) zeigt, dass eine Streckung um den Faktor Zwei, auch zur Verdoppelung des blauen Parallelogramms — d.h. des Skalarprodukts — führt. Dies muss für alle Streckungsfaktoren gelten also folgt

$$\vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \ .$$

Schliesslich zeigt Abb.4.1 d), dass die Fläche des blauen Parallelogramms meistens kleiner — höchstens aber gleich gross — ist, als die des Rechtecks mit dem Seitenlängen $|a|$ und $|b|$. Deshalb gilt für das Vektorprodukt

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \ .$$

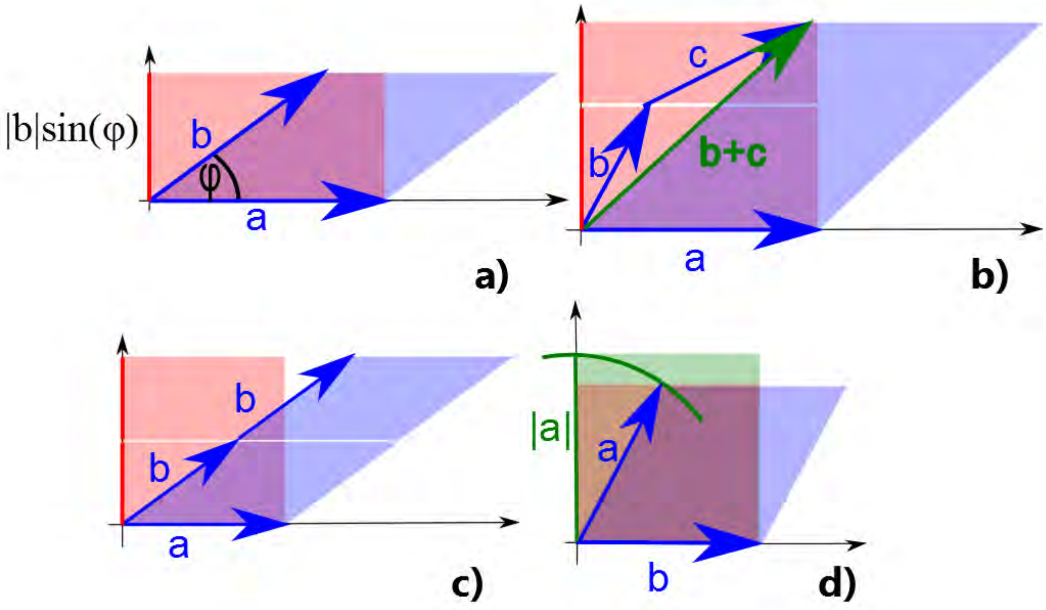


Abbildung 4.1: Die ersten Gesetzmässigkeiten für das Vektorprodukt folgen direkt aus geometrischen betrachtungen.

Satz 4.1 Gesetze für das Vektorprodukt

1. Betrag des Vektorprodukts: Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
2. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
3. $\vec{a} \times (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$
4. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
5. $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|$

Das letzte Gesetz lässt sich nachvollziehen, indem Sie zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ festlegen, z.B. $\vec{a}$ nach rechts und $\vec{b}$ nach vorne. Dann zeigt $\vec{a} \times \vec{b}$ mit der Rechten-Hand-Regel nach oben und $\vec{b} \times \vec{a}$ nach unten.

4.1 Das Vektorprodukt in einer rechtshändigen Orthonormalbasis

Beispiel 4.1 Vektorprodukt für Basisvektoren **745623**

Berechne das Vektorprodukt zwischen allen Basisvektoren in einer rechtshändigen Orthonormalbasis.

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = ?, \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = ? \; \ldots$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = ?, \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = ? \; \ldots$$

Beispiel 4.2 Vektorprodukt für allgemeine Vektoren **936044**

Berechne das Vektorprodukt zwischen zwei allgemeinen Vektoren in einer rechtshändigen Orthonormalbasis. Drücke dazu $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Basisvektoren aus:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

Berechne dann das Vektorprodukt für die allgemeinen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$
Übrigens gilt auch $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$

4.2 Vektorprodukt konkret berechnen

Infobox 4.1 Praktische Berechnung des Vektorprodukts

Zur Berechnung des Vektorprodukts von zwei Vektoren, benutzen wir folgende Vorgehensweise:

- Wir schreiben die Produktvektoren auf
- Wir erstellen ein Skelett aus Minuszeichen (–) und zusätzlich einem Ausdruck $-()$ in der zweiten Zeile
- Wir füllen jede Zeile im Skelett, indem wir die selbe Zeile in den Produktvektoren abdecken und das Kreuz der verbleibenden Einträge ins Skelett einfüllen.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} - \\ -(\,-\,) \\ - \end{pmatrix}}_{\text{Skelett}} \to \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -(a_1b_3 - a_3b_1) \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

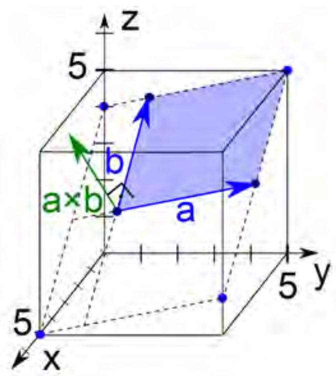
Beispiel 4.3 Vektorprodukt **306988**

Berechne das Vektorprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4.4 Berechne die Fläche des Parallelogramms aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **519844**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Infobox 4.2 "Vektorprodukt" für $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

In $\mathbb{R}^2$ lässt sich ein Vektor, der senkrecht auf $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ steht schnell finden:

$$\vec{n}' = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} \ .$$

4.3 Spatprodukt

Im Folgenden betrachten wir drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ und den Ausdruck

$$\vec{a} \odot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \ .$$

Wir stellen fest, dass das Vektorprodukt $\vec{f} = \vec{b} \times \vec{c}$ senkrecht auf dem Parallelogramm aufgespannt durch $\vec{b} \times \vec{c}$ steht und dass $|\vec{f}|$ gleich der Fläche des Parallelogramm aufgespannt durch $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ist. Durch das Skalarprodukt $\vec{a} \odot \vec{f} = \underbrace{\cos(\varphi) \cdot |\vec{a}|}_{=:a_{\|}} \cdot |\vec{f}|$ wird der Schatten $a_{\|}$ von $\vec{a}$ auf $\vec{f}$ berechnet. Dies ist genau die Höhe des Körpers aufgespannt durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Diese Höhe wird noch mit der Grundfläche $|\vec{f}|$ multipliziert. Zusammenfassend haben wir also

$$\vec{a} \odot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \text{Grundfche} \cdot \text{Hhe} = \text{Volumen}$$

Definition 4.2 Spatprodukt

Das Parallelepiped aufgespannt durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ nennen wir **Spat**. Für die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ heisst die Zahl

$$\left[\vec{a},\, \vec{b},\, \vec{c}\right] := \vec{a} \odot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$$

das **Spatprodukt**.
Der Betrag des Spatprodukts ist gleich dem Volumen des Spats.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.403] [Papula, Bd. 1 II 3.5]

Satz 4.2 Gesetze für das Spatprodukt

- Paarweise Vertauschung :

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}]$$

- Zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$$

Merke also: Das Volumen des Spats ist unabhängig von Reihenfolge in der ich $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufzähle. Nur das Vorzeichen kann eventuell ändern, wenn die Reihenfolge vertauscht wird.

Beispiel 4.5 Berechne das Volumen des Spats aufgespannt durch $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ 340107

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4.6 Bestimme, ob die Vektoren linear abhängig sind 340107

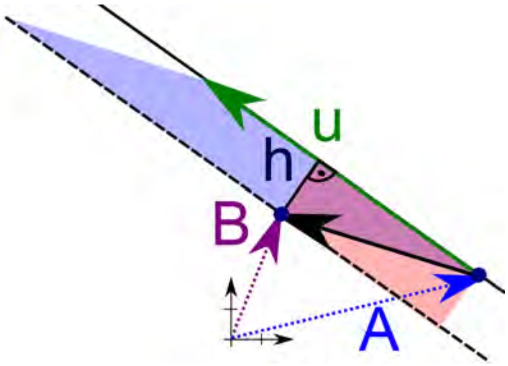
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Benutze dazu das Spatprodukt.

4.4 Abstände, Schnittpunkte, Schnittwinkel

Beispiel 4.7 Abstand Punkt-Gerade im Raum **094524**

Berechne den Abstand eines Punktes $\vec{B}$ zur Gerade gegeben durch $g : \vec{A} + \lambda\vec{u}$ aus.



Drücke dazu die Fläche des Parallelogramms einmal mit Hilfe des Vektorprodukts aus und einmal mit Hilfe des Abstands aus

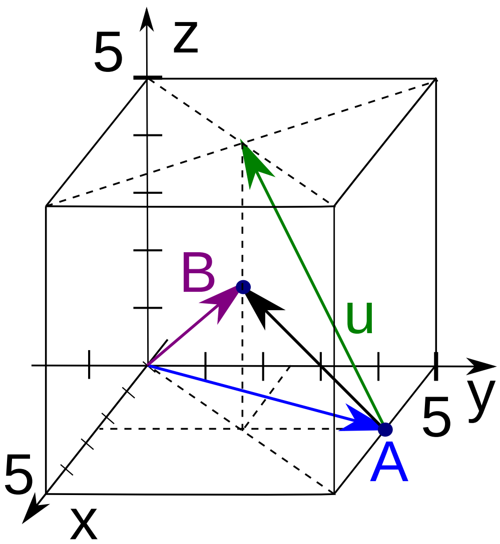
Satz 4.3 Abstand Punkt Gerade

Der Abstand eines Punktes $\vec{B}$ von der Geraden $g : \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$ ist $h = \frac{|\vec{u}\times(\vec{B}-\vec{A})|}{|\vec{u}|}$

[Papula, Bd. 1 II 4.1.3]

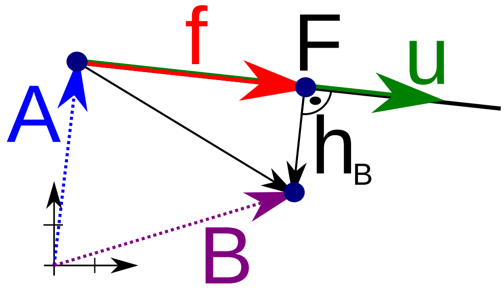
Beispiel 4.8 Abstand Punkt-Gerade im Raum **292982**

Wie gross ist der Abstand zum Raum-Mittelpunkt des Würfels $5 \times 5 \times 5$?



Achtung, dieser Satz ist eine Eigenheit von $\mathbb{R}^3$. Er basiert darauf, dass in $\mathbb{R}^3$ das Vektorprodukt existiert. In $\mathbb{R}^N$ mit $N > 3$ gibt es keine Vektorprodukt. Deshalb muss dort der Abstand zwischen dem Punkt $\vec{B}$ und der Geraden $g : \vec{A} + \lambda\vec{u}$ über den Fusspunkt $\vec{F} = \vec{A} + \vec{f}$ und das Lot $\vec{h}_B = \vec{B} - \vec{F}$ berechnet werden.

Beispiel 4.9 Bestimme den Fusspunkt von $\vec{B}$ auf g **14259**



Zerlege dazu $\vec{B} - \vec{A}$ in eine Komponente $\vec{f}$ parallel ($\|$) und in eine Komponente $\vec{h}_B$ senkrecht ($\perp$) zu $\vec{u}$. Zur Kontrolle kann die Länge des Verbindungsvektors von Fusspunkt zu $\vec{B}$. Sie sollte gleich lang sein, wie der Abstand, der in der vorherigen Aufgabe berechnet wurde.

Beispiel 4.10 Normaleneinheitsvektor **014259**

Bestimme für die Ebene $\vec{A} + \mu\vec{u} + \nu\vec{v}$ einen Vektor, der senkrecht auf der Ebene steht und der normiert ist.

Definition 4.3 Normaleneinheitsvektor

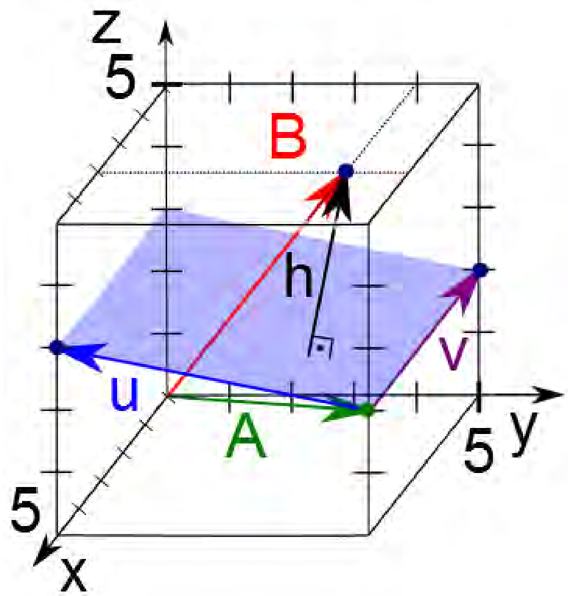
Für die Ebene $\vec{A} + \mu\vec{u} + \nu\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ definieren wir den Normaleneinheitsvektor

$$\vec{n} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} .$$

Im Folgenden werden wir die Notation beibehalten, dass $\vec{n}$ stets normiert ist, während $\vec{n}'$ zwar senkrecht auf der Ebene steht, jedoch keine definierte Länge hat, wie im vorhergehenden Beispiel. Wir nennen $\vec{n}'$ den Normalenvektor.

- Der **Normalenvektor** $\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v}$ steht senkrecht auf Ebene
- Der **Normaleneinheitsvektor** $\vec{n}$ steht senkrecht auf der Ebene *und* hat Länge 1. Er ist normiert.

Beispiel 4.11 Abstand Punkt-Ebene im Raum **026648**



Lesen Sie die Punkte $\vec{A}$ und $\vec{B}$ und die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ aus der Grafik aus. Projizieren Sie dann den Verbindungsvektor $\vec{B} - \vec{A}$ auf den Normaleneinheitsvektor der Ebene. Berechnen Sie daraus den Abstand von $\vec{B}$ zur Ebene E.

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v}$$

Satz 4.4 Abstand Punkt-Ebene im Raum

Der Abstand eines Punktes $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ von der Ebene $E: \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ ist $|h|$ und berechnet sich aus

$$h = \left(\vec{x} - \vec{A}\right) \odot \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \left(\vec{x} - \vec{A}\right) \odot \vec{n}$$

[Papula, Bd. 1 II 4.2.4]

Damit kann man zwei Dinge tun:

- Wir können $h(\vec{x})$ benutzen Abstände von Punkten $\vec{x}$ von der Ebene E zu berechnen.
- Wir können mit $\left(\vec{x} - \vec{A}\right) \odot \vec{n} = 0$ implizit alle Punkte in einer Ebene definieren. Oder umgekehrt: Alle Vektoren $\vec{x}$, die $\left(\vec{x} - \vec{A}\right) \odot \vec{n} = 0$ erfüllen liegen in der Ebene.

Beispiel 4.12 Abstand Punkt-Ebene im Raum **007592**

Berechnen Sie den Abstand des Punktes $\vec{R}$ von den Ebenen.

1. $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{R} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{R} = \begin{pmatrix} 18 \\ 19 \\ -4 \end{pmatrix}$

3. $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right) \odot \begin{pmatrix} 0.8 \\ -0.6 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{R} = \begin{pmatrix} 13.8 \\ 20.9 \\ 0 \end{pmatrix}$

Satz 4.5 Projektion und Spiegelung (an einer Ebene durch $\vec{0}$).

Ein Punkt $\vec{P} \in \mathbb{R}^3$ wird durch

$$\vec{P}' = \vec{P} - \vec{P} \odot \vec{n} \cdot \vec{n} \tag{4.1}$$

auf die Ebene $E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mu\vec{u} + \nu\vec{v}$ projiziert, wobei $\vec{n}$ der Normalenvektor der Ebene E ist. Durch

$$\vec{P}'' = \vec{P} - 2(\vec{P} \odot \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

wird der Punkt $\vec{P}$ an der Ebene gespiegelt.

Beachte, dass eine Ebene den Raum $\mathbb{R}^3$ in zwei Halbräume zerschneidet. Die Projektion $(\vec{P} \odot \vec{n}) \cdot \vec{n}$ zeigt stets in den selben Halbraum wie $\vec{P}$, egal ob $\vec{n}$ im selben Halbraum liegt wie $\vec{P}$. Deshalb bringt $\vec{P} - (\vec{P} \odot \vec{n}) \cdot \vec{n}$ den Punkt zurück in die Ebene, d.h. wir müssen uns mit dem Vorzeichen in Gleichung 4.1 nicht beschäftigen. Es ist automatisch richtig.

KAPITEL 5

Normalenform der Ebene

Beispiel 5.1 Gleichungen der Ebene im Raum **173961**

Bestimme für die Ebene E

$$E:\ \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v}$$

den Normalenvektor. Drücke dann mathematisch aus, dass der Verbindungsvektor von einem Punkt $\vec{x}$ *in der Ebene* zum Aufpunkt den Abstand Null zur Ebene hat.

Definition 5.1 Normalenform der Ebene im Raum

Ebene E ist definiert durch den Normalenvektor $\vec{n}'$ und den Ortsvektor des Aufpunktes $\vec{A}$. Für den allgemeinen Punkt $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in der Ebene gilt $E:$ $(\vec{x} - \vec{A}) \odot \vec{n}' = 0$

Beispiel 5.2 Gleichungen der Ebene im Raum **409770**

Bestimme die Normalenform der Ebene E

$$E:\ \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechne dazu den Normalenvektor. Vereinfache soweit, dass keine Vektoren mehr in der Normalenform auftreten.

Definition 5.2 Koordinatenform der Ebene im Raum

Eine Ebene ist definiert durch die vier Parameter n'_1, n'_2, n'_3 und d'. Für den allgemeinen Punkt $\vec{x}$ in der Ebene gilt $E:\ n'_1 \cdot x + n'_2 \cdot y + n'_3 \cdot z + d' = 0$

Die Koordinatenform ergibt sich z.B. durch das Auswerten der Normalenform. Die Koeffizienten n'_1, n'_2, n'_3 sind die Komponenten des Normalenvektors.

Beispiel 5.3 Hessesche-Normalenform **854087**

Wie gross ist der Abstand der Ebene E vom Ursprung?

$$E:\ \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Werte dann $\left(\vec{x} - \vec{A}\right) \odot \vec{n}$ für $\vec{x} = \vec{0}$ aus. Beachte, dass hier der Normaleneinheitsvektor und nicht der Normalenvektor verwendet wird. Betrachte die Resultate und formuliere eine Vermutung.

Definition 5.3 Hessesche-Normalenform der Ebene im Raum

$E:\ \vec{n} \odot (\vec{x} - \vec{A}) = 0$

[Goebbels and Ritter, 2011, p.418] [Papula, Bd. 1 II 4.2.3]

Definition 5.4 Hessesche-Normalenform der Ebene im Raum, Koordinatenform

Eine Ebene ist definiert durch die vier Parameter n_1, n_2, n_3 und d. Dabei gilt $(n_1)^2 + (n_2)^2 + (n_3)^2 = 1$. Für den allgemeinen Punkt $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in der Ebene gilt $E:\ n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z + d = 0$

In der Hesseschen-Normalenform sind die Parameter n_1, n_2, n_3 die Komponenten des Normaleneinheitsvektors und die Konstante $|d|$ ist der Abstand vom Ursprung.

Beispiel 5.4 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen **440325**

Berechne die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen

$$E:\ 21x + 70y + 15z - 105 = 0$$

Teile dann die Koordinatenform durch 105. Dadurch wir die Konstante auf -1 gesetzt. Vergleich nun die Koordinatenform mit den Schnittpunkten und formuliere deine Vermutung.

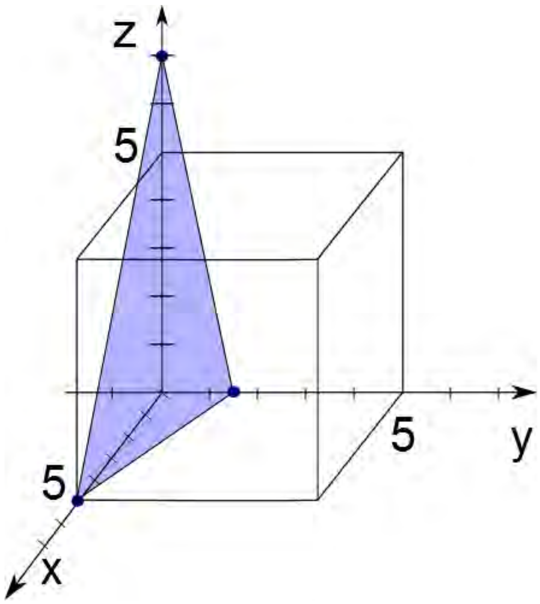


Abbildung 5.1: In der Achsenabschnittsform lassen sich die Schnittpunkte mit den jeweiligen Koordinatenachsen direkt ablesen.

Definition 5.5 Achsenabschnitts-Form

$E: \; c_1x + c_2y + c_3z - 1 = 0$

Die Achsenabschnittsform zeichnet sich dadurch aus, dass die Konstante den Wert -1 hat. Die Schnittpunkte mit den jeweiligen Koordinatenachsen können direkt abgelesen werden und sind bei $1/c_1, 1/c_2, 1/c_3$ wie Abb. 5.1 zeigt.

KAPITEL 6

Darstellung der Ebene im Raum

Wir kennen drei unterschiedliche Darstellungen der Ebene im Raum. Es sind dies die Parameter-Form, die Normalen-Form und die Koordinaten-Form.

Jede Form kann in die beiden anderen überführt werden. Wie dies am effizientesten gemacht wird, wird hier besprochen.

6.1 Von der Koordinaten-Form $1x + 2y + 3z - 6 = 0$ zu ...

Infobox 6.1 Koordinaten-Form zur Parameter-Form

Es können drei Punkte erzeugt werden. Meist gelingt dies am schnellsten mit den Punkten

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun kann $\vec{P}$ als Aufpunkt gewählt werden und

$$\vec{u} = \vec{Q} - \vec{P} \text{ und } \vec{v} = \vec{R} - \vec{P}$$

als Richtungsvektoren. Die Ebenengleichung ist dann

$$E : \vec{x} = \vec{P} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v}$$

Es kann vorkommen, dass die Ebene parallel zu einer Koordinaten-Achse liegt. Dann müssen die Punkte $\vec{P}$, $\vec{Q}$, $\vec{R}$ anders gewählt werden. Ist die Ebene z.B. parallel zur z-Achse, dann könnten dies z.B. die folgenden Punkte sein

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ y' \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 6.1 Von der Koordinaten-Form zur Parameterform **467643**

Berechnen Sie eine Parameterform der Ebene gegeben durch

$$E : 1x + 2y + 3z - 6 = 0$$

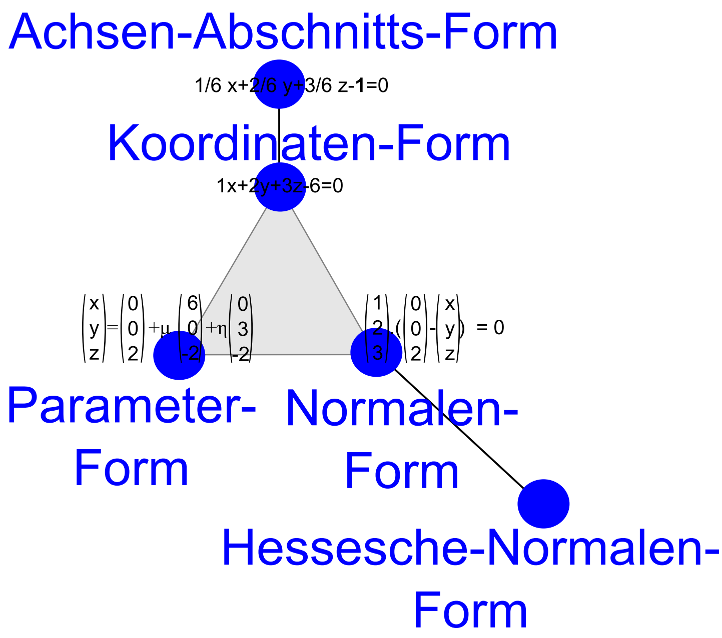


Abbildung 6.1: Die verschiedenen mathematischen Darstellungen der Ebene in $\mathbf{R}^3$.

Infobox 6.2 Koordinaten-Form zur Normalen-Form

Es kann ein Punkt erzeugt werden, z.B.

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

Die Normale kann aus der Koordinatenform abgelesen werden. Sie besteht aus den Koeffizienten

$$E : n_1' \, x + n_2' \, y + n_3' \, z - d = 0$$

Die Normalenform ist dann

$$E : \begin{pmatrix} n_1' \\ n_2' \\ n_3' \end{pmatrix} \odot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \vec{P} \right) = 0$$

Beispiel 6.2 Von der Koordinaten-Form zur Normalen-Form **211568**

Berechnen Sie eine Normalen-Form der Ebene gegeben durch

$$E : 1x + 2y + 3z - 6 = 0$$

6.2 Von der Parameter-Form ...

Infobox 6.3 Von der Parameter-Form zur Koordinaten-Form

Mit dem Vektorprodukt kann aus dem Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Normalenvektor berechnet werden.

$$\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v}$$

Die Ebene schreibt sich nun als

$$n_1' \, x + n_2' \, y + n_3' \, z + d = 0$$

wobei d die Konstante durch Einsetzen der Koordinaten des Aufpunktes bestimmt wird.

Beispiel 6.3 Von der Parameter-Form zur Koordinaten-Form **211568**

Berechnen Sie die Koordinaten-Form der Ebene gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Infobox 6.4 Von der Parameter-Form zur Normalen-Form

Mit dem Vektorprodukt kann aus dem Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Normalenvektor berechnet werden.

$$\vec{n}' = \vec{u} \times \vec{v}$$

Der Aufpunkt und die Normale kann dann direkt in die Normalen-Form eingesetzt werden.

Beispiel 6.4 Von der Parameter-Form zur Normalen-Form **995397**

Berechnen Sie die Normalen-Form der Ebene gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

6.3 Von der Normalen-Form ...

Der Weg von der Normalen-Form zur Koordinaten-Form besteht aus dem Ausmultiplizieren.

Beispiel 6.5 Von der Normalen-Form zur Koordinaten-Form **849600**

Berechnen Sie die Koordinaten-Form der Ebene gegeben durch

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \odot \left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \right) = 0$$

Infobox 6.5 Von der Normalen-Form zur Parameter-Form

Durch Ausmultiplizieren berechnen wir zuerst die Koordinatenform

$$n_1' \, x + n_2' \, y + n_3' \, z + d = 0$$

wobei sowohl die Koeffizienten wie auch die Konstante bekannt sind. Wir erzeugen dann drei Punkte

$$\vec{P} = \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}, \; \vec{Q} = \begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}, \; \vec{R} = \begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}$$

wählen $\vec{P}$ als Aufpunkt und bestimmen die Richtungsvektoren

$$\vec{u} = \vec{Q} - \vec{P} \text{ und } \vec{v} = \vec{R} - \vec{P}$$

Die Ebenengleichung ist dann

$$E : \vec{x} = \vec{P} + \lambda\vec{u} + \nu\vec{v}$$

Beispiel 6.6 Von der Normalen-Form zur Parameter-Form **763463**

Berechnen Sie die Parameter-Form der Ebene gegeben durch

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \odot \left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \right) = 0$$

KAPITEL 7

Übungen Vektorgeometrie

7.1 Koordinatensystem, Vektoraddition, Kollinearität

1. Koordinatensystem in 3D, **704458**

Der Punkt $\vec{P} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ wird gespiegelt

(a) an der xy-Ebene

(b) an der xz-Ebene

(c) an der x-Achse

(d) an der z-Achse

(e) am Ursprung

(f) am Punkt $\vec{S} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. Koordinatensystem in 3D **998998**

Welche besondere Lage haben diese Punkte?

(a) $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$

(d) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 4 \end{pmatrix}$

(e) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 3 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(f) $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$

(g) $\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(h) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ a \end{pmatrix}$

3. Vektoraddition **651680**

Es sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Berechne den Vektor $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$.

(b) Überprüfe die Richtigkeit der Rechnung mit einer Konstruktion.

4. Vektoraddition **884360**

Es sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Berechne den Vektor $\vec{d} = 5\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$.

(b) Überprüfe die Richtigkeit der Rechnung mit einer Konstruktion.

5. Vektoraddition **654349**

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ gegeben. Berechne die Komponenten der Vektoren

(a) $\vec{u} = 2\vec{a} - 1.5\vec{b} + 3\vec{c}$

(b) $\vec{v} = 2\vec{a} - 3(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c})$

(c) $\vec{w} = 3(\vec{a} - 4\vec{b}) - 5\vec{c}$

(d) $\vec{x} = 5\vec{a} - 2(\vec{b} + 3\vec{c})$

6. Kollinear/Parallel **631401**

Überprüfe, ob die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear sind.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -3.5 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 28 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -18 \\ 36 \\ -63 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -0.1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2.25 \\ 0.75 \\ 0 \end{pmatrix}$

7. Kollinear/Parallel **588716**

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sollen kollinear sein. Bestimme die fehlenden Komponenten.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -4 \\ z \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ y \\ 8 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$

8. Kollinear/Parallel **745674**

Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(a) $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} x \\ -2 \end{pmatrix}$ sollen kollinear sein. Bestimme x.

(b) $\vec{f} = 3\vec{a} + 4\vec{b} - 2\vec{c}$ und $\vec{e} = \begin{pmatrix} -4 \\ y \end{pmatrix}$ sollen kollinear sein. Bestimme y.

9. Kollinear/Parallel **036721**

Gegeben sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2.5 \end{pmatrix}$.

Die Vektoren $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$ und $\vec{w}$ sollen kollinear sein. Bestimme x und y.

10. Geraden **503523**

Liegt der Punkt $\vec{A}$ auf der Geraden durch die Punkte $\vec{B}$ und $\vec{C}$?

(a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{C} = \begin{pmatrix} -4 \\ 22 \\ -18 \end{pmatrix}$

11. **Dreiecke** 801407

Zeige, dass die Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{78} \\ 0 \end{pmatrix}$ die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind.

12. **Parallelogramm** 668357

Ergänze die Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ zum Parallelogramm ABCD. Berücksichtige die alphabetische Reihenfolge.

13. **Parallelogramm** 459912

Ergänze die Punkte $\vec{A}$, $\vec{B}$ und $\vec{C}$ zum Parallelogramm ABCD. Berücksichtige die alphabetische Reihenfolge.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

14. **Parallelogramm** 464658

Die Punkte $\vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$ sind die Ecken eines Parallelogramms. Bestimme die Koordinaten der vierten Ecke $\vec{D}$, ohne die alphabetische Reihenfolge zu berücksichtigen. Wie viele Lösungen gibt es?

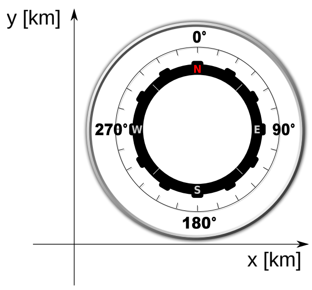
15. **Parallelogramm**

Sind $\vec{A} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$ die Ecken eines Parallelogramms?

7.2 Parameterform der Geraden

1. **Kurs eines Schiffes**

Ein Segelschiff fährt zuerst 10 km in Richtung Nordwesten, dann 20 km in Richtung 30° (Nord-Ost) und schliesslich 35 km in Richtung Süden. Gib die End-Position der Reise an gemessen vom Ausgangspunkt der Reise. Verifiziere die Rechnung mit einer Konstruktion.

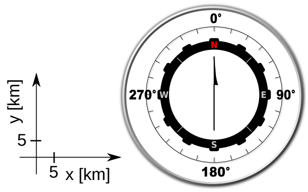


2. **Kurs eines Schiffes** 818717

Ein Segelschiff fährt zuerst 20.7 km in Richtung 30.6°, dann 45.2 km in Richtung 159°, 11 km in Richtung 210° und schliesslich 40 km in Richtung 328°. Gib die End-Position der Reise an gemessen vom Ausgangspunkt der Reise.

3. UFOs **686174**

Berechnen Sie den Azimut (Winkel zwischen Norden und dem Objekt im Uhrzeigersinn gemessen) und die Distanz vom Kontrollturm der folgenden UFOs. Beachten Sie die spezielle Lage des Koordinaten-Systems.



	Pithoi	Angel hair	Utsuro-bune
x [km]	-3.8	1.5	1.4
y [km]	4	-6.2	4.7

4. Parameterform der Geraden in $\mathbb{R}^n$ **773587**

Welche Punkte erhält man für die angegebenen Parameterwerte $t = -5;\ t = 0$ und $t = -0.1$?

(a) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(c) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

5. Parameterform der Geraden **132207**

Prüfe, ob der Punkt X auf der Geraden g liegt:

(a) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $X = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $g : \vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

(c) $X = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$, $g : \vec{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$

6. Parameterform der Geraden **656861**

Gib je zwei verschiedene Parameterdarstellungen der Geraden g durch die Punkte $\vec{A}$ und $\vec{B}$ an.

(a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 12 \\ -7 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

7. Gerade als Gleichung: Geradengleichung **48726**

Durch die Gleichung $x_2 = mx_1 + c$ wird eine Gerade im x_1x_2-Koordinatensystem beschrieben. Dabei ist m die Steigung und c der y-Achsenabschnitt. Gib die Parameterdarstellung der Geraden an für

(a) $m = 3,\ c = 3$

(b) $m = 0,\ c = 2$

(c) $x_1 + x_2 = 3$

(d) $2x_1 + x_2 = 5$

(e) $x_1 = 5$

8. Von der Parameterform zur Geradengleichung **94899**

Bestimme die Gleichung $x_2 = m \cdot x_1 + c$ der Geraden g:

(a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

9. Schnittpunkt von zwei Geraden **339474**

Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g und h:

(a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$

(b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

10. Spurpunkte **132207**

Bestimme die Spurpunkte[1] folgender Geraden

(a) $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

(b) $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

11. Schatten/Projektion **409552**

Stelle die Koordinatengleichung der Projektion der Geraden $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$ auf die xy-Ebene auf.

7.3 Skalarprodukt

1. Rechenregeln Skalarprodukt **790282**

Berechne für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgende Skalarprodukte. Gehe dabei möglichst effizient vor und benutze die Ergebnisse aus den ersten Teilaufgaben um die Resultate späteren zu berechnen.

(a) $\vec{a} \odot \vec{b}$

(b) $\vec{a} \odot \vec{c}$

(c) $\vec{b} \odot \vec{c}$

(d) $\vec{a} \odot \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

(e) $\vec{b} \odot (\vec{a} + \vec{c})$

(f) $\vec{c} \odot \left(\vec{b} + \vec{a}\right)$

(g) $\vec{a} \odot \left(\vec{b} - \vec{c}\right)$

(h) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \odot \left(\vec{b} - \vec{c}\right)$

(i) $\left(\vec{a} \odot \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$

(j) $\left(\vec{b} \odot \vec{c}\right) \cdot \vec{a}$

(k) $(\vec{a} \odot \vec{c}) \cdot \vec{b}$

[1] Spurpunkte sind die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen ($\mathbb{R}^2$) oder mit Ebenen aufgespannt durch jeweils zwei Koordinatenachsen ($\mathbb{R}^3$).

2. Rechenregeln Skalarprodukt **989383**

Drücke mit Hilfe des Skalarprodukts aus,

(a) dass die Vektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$ orthogonal sind.

(b) dass $\vec{q}$ den Betrag 2 hat.

(c) dass $\vec{p}$ ein Einheitsvektor ist.

(d) dass $\vec{p}$ und $\vec{q}$ linear abhängig sind.

3. Skalarprodukt, Orthogonalität **337372**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}-2\\14\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}u\\1\\v\end{pmatrix}$$

Bestimme die Parameter u und v so, dass der Vektor $\vec{c}$ zu $\vec{a}$ und auch zu $\vec{b}$ *orthogonal* ist.

4. Winkel zwischen Vektoren **853562**

Berechne die Winkel der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}5\\0\\3\end{pmatrix}$

(d) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$

5. Winkel zwischen Vektoren **451565**

Ein Quader ist 8 cm lang, 5 cm breit und 3 cm hoch. A, B, C, D seien die Ecken seiner Grundfläche, M der Schnittpunkt seiner Raumdiagonalen.

(a) Veranschauliche den Quader in einem räumlichen Koordinatensystem.

(b) Berechne die Winkel $\angle$AMB

(c) Berechne die Winkel $\angle$BMC

6. Orthogonale Vektoren **573665**

Bestimme einen Vektor $\vec{c}$, der zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal ist mit Hilfe des Skalarprodukts

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix}$

(c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}4\\-1\\5\end{pmatrix}$

7. Abstände **845423**

(a) Bestimme x_3 so, dass $P = \begin{pmatrix}3\\2\\x_3\end{pmatrix}$ von $A = \begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$ die Entfernung 7 hat.

(b) Bestimme x_1 so, dass $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ von $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$ die Entfernung 9 hat.

(c) Bestimme x_x so, dass $P = \begin{pmatrix} 4 \\ x_2 \\ -13 \end{pmatrix}$ von $A = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$ die Entfernung 13 hat.

7.4 Vektorprodukt

1. **Rechenregeln Vektorprodukt** **020196**

Berechne für die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Benutzen Sie die Teilresultate der ersten Teilaufgaben für die Berechnung der letzteren.

(a) $\vec{a} \times \vec{b}$

(b) $\vec{a} \times \vec{c}$

(c) $\vec{b} \times \vec{c}$

(d) $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$

(e) $\vec{a} \times \left(\vec{b} - \vec{c}\right)$

(f) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{b} - \vec{c}\right)$

(g) $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$

2. **Welche der Mengen von Vektoren bilden eine Basis?** **279728**

Welche eine Orthogonal-Basis, welche eine Orthonormal-Basis von $\mathbb{R}^3$?

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

3. **Welche der Mengen von Vektoren bilden eine Basis?** **133855**

Welche eine Orthogonal-Basis, welche eine Orthonormal-Basis von $\mathbb{R}^3$?

(a) $\left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

4. **Komponenten und Projektion** **176782**

Berechnen Sie die Komponenten des Vektors $\vec{b}$ in der Basis

$$\mathbf{F} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}_E$$

wobei die Komponenten von $\vec{b}$ und von $\mathbf{F}$ in der Standardbasis gegeben sind. Überprüfen Sie Ihr Resultat, indem Sie die Komponenten in der Basis $\mathbf{F}$ mit den Basisvektoren multiplizieren.

5. **Komponenten und Projektion** **507550**

Berechnen Sie die Komponenten des Vektors $\vec{b}$ in der Orthogonal-Basis $\mathbf{F}$, wobei die Komponenten von $\vec{b}$ und von $\mathbf{F}$ in der Standardbasis gegeben sind.

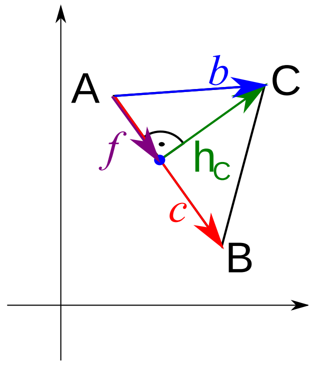


Abbildung 7.1: Zur Aufgabe 6

(a)

$$\mathbf{F}=\left\{\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\right\}\text{ und }\vec{b}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{F}=\left\{\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\right\}\text{ und }\vec{b}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

(c) Siehe Aufgabe 176782

6. **Geometrie am Dreieck** **713581**

Berechne für das Dreieck ABC die Koordinaten des Fusspunktes $\vec{F_C}$ und die Höhe h_C.

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix},\ \vec{B}=\begin{pmatrix}7\\2\\3\end{pmatrix},\ \vec{C}=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix},$$

Siehe auch Skizze Abbildung 7.1.

7. **Lot** **381963**

Fällen Sie das Lot vom Punkt $\vec{C}$ auf die Gerade g und berechnen Sie den Abstand des Punktes $\vec{C}$ zur Geraden g:

(a) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{C}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

(b) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{C}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

8. **Abstand** **797792**

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $\vec{C}$ von der Geraden g:

(a) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{C}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

(b) $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{C}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

9. **Spiegelung an Geraden durch Ursprung** **659289**

Spiegeln Sie das Dreieck $\vec{A}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{B}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{C}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ an der Geraden

$$g:\vec{x}=k\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

10. Spiegelung 109810

Spiegeln Sie das Dreieck $\vec{A} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{B} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{C} = \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ an der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

11. Lot auf Ebene 386301

Fällen Sie das Lot vom Punkt $\vec{C}$ auf die Ebene E und berechnen Sie den Abstand des Punktes $\vec{C}$ zur Ebene E.
Kontrollieren Sie ihre Resultat, indem Sie den Abstand des Fusspunkes $\vec{F}$ von der Ebene E berechnen.

(a) $\vec{C} = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$

$$E : \vec{x} = \vec{A} + \mu\vec{u} + \nu\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

(b) $\vec{C} = \begin{pmatrix}6\\7\\3\end{pmatrix}$

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix}-7\\-2\\-7\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}4\\7\\-3\end{pmatrix}$$

12. Spiegelung an Ebene durch den Ursprung 542603

Spiegeln Sie den Punkt $\vec{P}$ an der Ebene durch den Ursprung mit dem Normalenvektor $\vec{n}'$.

$$\vec{P} = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}, \ \vec{n}' = \begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$$

13. Spiegelung* 379940

Spiegeln Sie die Gerade $g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-7\\15\\3\end{pmatrix}$ an der Ebene $E : \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-2\\-3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

7.5 Abstände, Ebenengleichung

1. Abstand Punkt-Gerade 961497

Berechne den Abstand des Punktes $\vec{B}$ von der Geraden g.

(a) $\vec{B} = \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$, und $g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$

(b) $\vec{B} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, und $g: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}$

2. Abstand Punkt-Ebene 212208

Berechne den Abstand des Punktes $\vec{B}$ von der Ebene E.

(a) $\vec{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, und $E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und $E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Ebenengleichung in Parameterform **363870**

Eine Ebene E enthält die Punkte $\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix})$, $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{R} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechne die

(a) Ebenengleichung in Parameterform.

(b) Normalenform der Ebene.

(c) Koordinatengleichung der Ebene.

(d) Ebenengleichung in Achsenabschnittsform. Gib die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen an.

(e) Ebenengleichung in der Hesse‘schen Normalenform. Gib den Abstand zum Ursprung des Koodinatensystems an.

4. Abstand Punkt-Ebene **343437**

Berechne den Abstand der Punkte

(a) $\vec{Q} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{R} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -18 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{T} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

von der Ebene, die gegeben ist durch die Punkte

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Benutzen Sie dafür die Projektion auf den Normaleneinheitsvektor (a-b) und die Hesse’sche Normalenform (c-d).

5. Schnittgerade zweier Ebenen **923584**

Die Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich in einer Geraden g. Bestimme eine Parameterdarstellung von g:

(a) $E_1: \ x_1 - x_2 + 2x_3 - 1 = 0$
$E_2: \ 6x_1 + x_2 - x_3 = 5$

(b) $E_1: \ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 7$
$E_2: \ -x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 0$

(c) $E_1: \ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 1$
$E_2: \ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 17$

(d) $E_1: \ x_1 + 5x_3 = 8$
$E_2: \ x_1 + x_2 + x_3 = 1$

6. Durchstosspunkt **187679**

Bestimme den Durchstosspunkt der Geraden g durch die Ebene $E: \ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 7 = 0$.

(a) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\9\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ (b) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$

7. Ebenengleichung **483154**

Wähle die Variablen a, b, c so, dass die Ebenen

$$E_1:\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7 = 0 \quad E_2:\ a \cdot x_1 + b \cdot x_2 - x_3 - c = 0$$

(a) gleich sind

(b) parallel, aber nicht gleich sind

(c) nicht parallel sind.

8. Spat **642501**

Die 6 Ebenen (jeweils 2 sind parallel)

$$\begin{array}{lll} E_1:\ x_1 = 0 & E_2:\ x_2 - x_3 = 0 & E_3:\ x_1 + 5x_3 = 0 \\ E_1':\ x_1 = 5 & E_2':\ x_2 - x_3 - 8 = 0 & E_3':\ x_1 + 5x_3 = 20 \end{array}$$

begrenzen einen Spat, dessen eine Ecke im Ursprung liegt. Bestimme drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, welche diesen Spat vom Ursprung aus aufspannen. (Hinweis: Man benötigt die Schnittpunkte der Ebenen.)

9. Gerade und Ebene **211220**

Welche Lage haben Gerade g und Ebene E zueinander? Bestimmen Sie Abstand, Schnittpunkt und Schnittwinkel.

(a) g geht durch $\vec{P} = \begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{Q} = \begin{pmatrix}8\\2\\4\end{pmatrix}$ und E durch $\vec{R} = \begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix}$ und der Normalenvektor ist $\vec{n} = \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$

(b) g geht durch

$$\vec{P} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \text{ und } \vec{Q} = \begin{pmatrix}5\\6\\18\end{pmatrix}.$$

und E durch

$$\vec{R} = \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}, \vec{S} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix} \text{ und } \vec{T} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Wichtige Stellen bei Papula

Abstand Punkt-Gerade	Bd. 1 II 4.1.3	S. 108–110
Ebene	Bd. 1 II 4.2	S. 117–122
Normalenform der Ebene	Bd. 1 II 4.2.3	S. 122–124
Abstand Punkt-Ebene	Bd. 1 II 4.2.4	S. 122–124