Teil II

Lineare Algebra

KAPITEL 8

Eliminationsverfahren von Gauss II

Lineare Gleichungsysteme sind ein wichtiges Thema in der linearen Algebra. Wie wir sehen werden, können viele Aufgaben auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems zurückgeführt werden.

8.1 Lineare Gleichungen

Definition 8.1 Lineare Gleichung

Eine **lineare Gleichung** in den Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist eine Gleichung, die sich in der Standard-Form

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = b$$

schreiben lässt, mit den Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ und der Konstanten b.
Eine **Lösung der linearen Gleichung** ist die Liste

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

die eingesetzt in die lineare Gleichung die wahre Aussage

$$a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \ldots + a_n \cdot u_n = b$$

ergibt.
Wir rechnen in $\mathbb{R}$, also $a_1, a_2, \ldots a_n,\ b\ \in \mathbb{R}$

In der Definition haben wir die Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ genannt. Wenn wir diese Indices vermeiden wollen schreiben wir stattdessen x, y, z und beschränken uns auf drei Dimensionen.

Beispiel 8.1 Lösung einer linearen Gleichung

Sind $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ Lösungen der folgenden linearen Gleichung?

$$x + 2y - 3z = 6$$

Definition 8.2 Lineares Gleichungssystem, LGS **969291**

Ein **lineares Gleichungssystem** ist eine Liste von linearen Gleichung in den selben Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Wir systematisieren die Schreibweise noch weiter:

$$\left| \begin{array}{ccccc} a_{11} \cdot x_1 & +a_{12} \cdot x_2 & +\ldots & +a_{1n} \cdot x_n = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & +a_{22} \cdot x_2 & +\ldots & +a_{2n} \cdot x_n = & b_2 \\ & \cdots & & & \\ a_{m1} \cdot x_1 & +a_{m2} \cdot x_2 & +\ldots & +a_{mn} \cdot x_n = & b_m \end{array} \right|$$

Dabei bezeichnet m die Anzahl der linearen Gleichungen. Die Koeffizienten a_{ij} haben jetzt zwei Indices. Der erste Index i bezeichnet die Nummer der Gleichung, der zweite bezeichnet die Unbekannte, zu der der Koeffizient gehört. Ebenfalls bezeichnet b_i, die Konstante in der i-ten Gleichung.

Ausserdem wird ein lineares Gleichungssystem **quadratisch** genannt, wenn es gleich viele Gleichungen wie Unbekannte hat $m = n$.
Ein lineares Gleichungssystem heisst **homogen**, falls

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Andernfalls heisst es **inhomogen**.

Beispiel 8.2 Lösung eines linearen Gleichungssystems **500997**

Betrachte das System

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & +4 \cdot x_3 & +3 \cdot x_4 = & 5 \\ 2 \cdot x_1 & +3 \cdot x_2 & +x_3 & -2 \cdot x_4 = & 1 \\ x_1 & +2 \cdot x_2 & -5 \cdot x_3 & +4 \cdot x_4 = & 3 \end{array} \right| .$$

Sind

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems?

Beispiel 8.3 Linear-Kombinationen von Gleichungen **969391**

Wir benennen die Gleichungen aus dem vorherigen Beispiel mit L_1, L_2 und L_3. Ist $\vec{v}$ eine Lösung der linearen Gleichung

$$L_2 - L_1 - L_3 \text{ ?}$$

8.2 Lösungsverfahren mit elementaren Zeilenoperationen

Definition 8.3 Elementare Zeilenoperationen

Die elementaren Zeilenoperationen sind

- Vertauschung von zwei Gleichungen: $L_i \leftrightarrow L_j$
- Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl $k \neq 0$: $L_i \to L_i \cdot k$
- Addition der Gleichungen L_i und $L_j \cdot k$: $L_i \to L_i + L_j \cdot k$

[Papula, Bd. 2 I 5.2]

Satz 8.1 Elementare Zeilenoperationen

Elementare Zeilenoperationen verändern die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ nicht.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.464]

Das Gauss'sche Eliminations-Verfahren wendet die elementaren Zeilenoperationen nacheinander an, um das lineare Gleichungssystem in die **Zeilenstufenform** (meist sogar **Dreiecks-Form**) zu bringen. Daraus kann die Lösung des Gleichungssystems einfach bestimmt werden. Dazu das folgende Beispiel:

Beispiel 8.4 Einsetzen in die Dreiecksform **959281**

Löse das Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben.

$$\left|\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & -3x_2 & +5x_3 & -2x_4 & = & 9 \\ & 5x_2 & -x_3 & +3x_4 & = & 1 \\ & & 7x_3 & -x_4 & = & 3 \\ & & & 2x_4 & = & 8 \end{array}\right|$$

Die Dreiecksform zeichnet sich dadurch aus, dass genau so viele Gleichungen vorliegen wie Unbekannte. Gibt es weniger Gleichungen als Unbekannte, sprechen wir von der **Zeilenstufenform**. Die Dreiecksform ist also ein Spezialfall der Zeilenstufenform mit Anzahl Unbekannte gleich Anzahl Gleichung, $n = m$.

Beispiel 8.5 Einsetzen in der Zeilenstufenform **577593**

Lösen Sie das nachfolgende Gleichungssystem durch Einsetzen von unten nach oben:

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 2x_1 & +6x_2 & -x_3 & +4x_4 & -2x_5 & = & 15 \\ & & x_3 & +2x_4 & +2x_5 & = & 5 \\ & & & 3x_4 & -9x_5 & = & 6 \end{array}\right| .$$

Das Lösen von linearen Gleichungen mit dem **Gauss-Eliminations-Verfahren** setzt sich nun aus den beiden Teil-Verfahren zusammen:

- Elimination: Durch elementare Zeilenoperationen wird das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform gebracht.
- Rücksubstitution: Durch Einsetzen von unten nach oben werden die Unbekannten bestimmt.

Infobox 8.1 Zeilenstufenform vs. Trapezform

In [Papula, Bd. 2 I 4.4] werden die elementare Zeilenoperationen “äquivalente Umformungen” genannt. Ausserdem wird die Zeilenstufenform da “Trapezform” genannt.

Übrigens, beim Überführen eines Gleichungssystems in Zeilenstufenform verwendet man eine Kombination von zwei Schritten, nämlich man ersetzt die Gleichung L_i mit $L_i + kL_j$: $L_i \to L_i + L_j \cdot k$, d.h. man führt die Multiplikation einer Gleichung gleichzeitig mit der Addition von Gleichungen aus.

Beachte, dass das Verfahren vorzeitig abgebrochen werden kann, wenn ein Widerspruch erzeugt wird. Dann hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung. Wie die elementaren Zeilenoperationen eingesetzt werden um auf Zeilenstufenform zu kommen, zeigt das nächste Beispiel

Beispiel 8.6 Zeilenstufenform durch elementare Zeilenoperationen **577593**

Lösen Sie das nachfolgende Gleichungssystem mit dem Gaussverfahren

$$\left|\begin{array}{ccccc} x & -3y & -2z & = & 6 \\ 2x & -4y & -3z & = & 8 \\ -3x & +6y & +8z & = & -5 \end{array}\right| .$$

Beachte, dass beim Gaussverfahren zuerst von oben nach unten gearbeitet wird (Elimination) und dann strikt von unten nach oben (Einsetzen). Dies erlaubt die Übersicht zu behalten und wir vermeiden linear abhängige Linearkombinationen (siehe unten).

Infobox 8.2 Elimination beim Gaussverfahren

Bei der Elimination wird *eine* Zeile bestimmt, mit der eliminiert wird (sie darf zu anderen Zeilen addiert werden).
Diese Zeile muss unverändert in das nächste Gleichungssystem übernommen werden.
So werden linear abhängige Linearkombinationen der Gleichungen vermieden.

Die Probleme, die entstehen, wenn man sich nicht an diese Regel hält, zeigt das folgende Beispiel:

Beispiel 8.7 Linear abhängige Linearkombinationen von Gleichungen 942087

Für das Gleichungssystem

$$\begin{vmatrix} x & -3y & = & 6 \\ 2x & -4y & = & 10 \end{vmatrix} .$$

wird das folgende Vorgehen vorgeschlagen:

$$\begin{vmatrix} L_1' = L_1 - \frac{1}{2}L_2: & 0 & -1y & = & 1 \\ L_2' = L_2 - 2L_1: & 0 & +2y & = & -2 \end{vmatrix}$$

also

$$\begin{vmatrix} L_1'' = L_1': & 0 & -1y & = & 1 \\ L_2'' = L_2' + 2L_1': & 0 & +0 & = & 0 \end{vmatrix}$$

x ist vermeintlich ein freier Parameter. Wir setzen $x = \mu$. Ausserdem folgt aus der ersten Zeile, dass $y = -1$ ist. Die Lösungen sind also $\vec{u} = \begin{pmatrix} \mu \\ -1 \end{pmatrix}$. Dies ist offensichtlich eine falsche Lösung, denn die richtige Lösung besteht aus einem einzigen Schnittpunkt $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Was wurde beim Lösen falsch gemacht?

In der Fachsprache nennt man die Gleichungen L_1' und L_2' linear abhängige Linearkombinationen, weil die Vektoren gebildet aus den Koeffizienten

$$L_1' = 1L_1 - \frac{1}{2}L_2 \Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und

$$L_2' = -2L_1 + 1L_2 \Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind. Diese linear abhängige Linearkombinationen werden bei der Elimination vermieden, indem die Zeile mit der eliminiert wird, unverändert beibehalten wird.

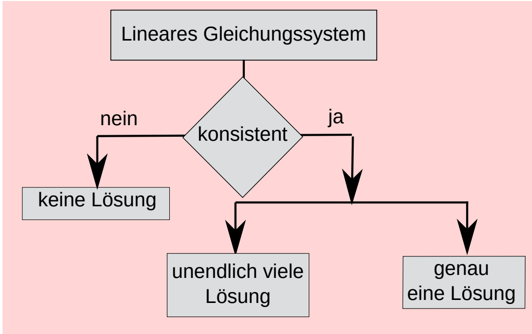


Abbildung 8.1: Mögliche Situationen für die Lösung eines linearen Gleichungssystems. [Papula, Bd. 2 I 5.4]

8.3 Existenz und Form der Lösung

Beim letzten Schritt der Elimination können ausserdem in der letzten Zeile drei Situationen auftreten:

Satz 8.2 Formen von linearen Gleichungssystemen

Das lineare Gleichungssystem $a \cdot x = b$ kann drei Formen annehmen

1. Es liegt die Form $a \cdot x = b$ mit $a \neq 0$ vor. Es gibt eine Lösung $x = \frac{b}{a}$.
2. Es liegt die Form $0 \cdot x = b$ mit $b \neq 0$ vor. Es gibt keine Lösung.
3. Es liegt die Form $0 \cdot x = 0$ vor. Dann gibt es unendlich viele Lösungen $x = \mu$ mit $\mu \in \mathbb{R}$.

Definition 8.4 Inkonsistente lineare Gleichungen

Die lineare Gleichung $0 \cdot x = b$ mit $b \neq 0$ nennen wir **inkonsistent** (Fall 2 in Satz 2). Alle anderen Fälle der linearen Gleichungen heissen **konsistent** (Fall 1 und 3 in Satz 2).

Ist eine Gleichung inkonsistent, ist auch das zugehörige Gleichungssystem inkonsistent. Beachte auch, dass für konsistente Gleichungssysteme (Fall 1 und 3 in Satz 2) wieder zwei Unterscheidungen gemacht werden: Es gibt den Fall mit *einer* Lösung oder mit *unendlich vielen* Lösungen. Deshalb ergibt sich das Schema für linear Gleichungssysteme, wie es in Abb.8.3 gegeben ist. Ob genau eine Lösung oder unendlich viele Lösungen (d.h. freie Variablen) vorliegen, entscheidet man indem das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform bringt und freie Variablen sucht. Gibt es freie Variablen, gibt es unendlich viele Lösungen, sonst gibt es genau eine Lösung.

Um den Schreibaufwand zu verringern, können bei den Umformungen im Gaussverfahren die Unbekannten und die Gleichheitszeichen weggelassen werden. Wir schreiben dann das lineare Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{lllll} a_{11} \cdot x_1 & +a_{12} \cdot x_2 & +\dots & +a_{1n} \cdot x_n = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & +a_{22} \cdot x_2 & +\dots & +a_{2n} \cdot x_n = & b_2 \\ & \dots & & & \\ a_{m1} \cdot x_1 & +a_{m2} \cdot x_2 & +\dots & +a_{mn} \cdot x_n = & b_m \end{array}\right| .$$

als

Definition 8.5 Erweiterte Koeffizienten-Matrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Beispiel 8.8 Erweiterte Koeffizienten-Matrix **958139**

Schreibe das lineare Gleichungssystem als **erweiterte Koeffizienten-Matrix** und löse es mit dem Gauss-Verfahren:

$$\left|\begin{array}{cccc} x & +y & +z = & -6 \\ x & +2y & +3z = & -10 \\ 2x & +3y & +6z = & -18 \end{array}\right|$$

8.4 Lineare Gleichungsysteme anschaulich

Die drei Fälle bei linearen Gleichungssystemen (inkonsistent, konsistent mit einer Lösung, konsistent mit unendlich vielen Lösungen) lassen sich in drei Dimensionen $\mathbb{R}^3$ veranschaulichen. Damit schlagen wir auch eine Brücke zur Vektorgeometrie. Wir stellen fest, dass die lineare Gleichung $a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot z = b$ einer Ebene in $\mathbb{R}^3$ entspricht. Beim Aufstellen von linearen Gleichungssystemen suchen wir Punkte, die alle Gleichungen erfüllen, d.h. die Schnittmenge der Ebenen. Die folgenden Beispiele erläutern die möglichen Situationen.

8.4.1 Ebenen, die nicht durch $\vec{0}$ gehen.

Wir nennen diese Probleme, **inhomogene** lineare Gleichungssysteme.

Beispiel 8.9 Schnittmengen von Ebenen in $\mathbb{R}^3$ **331889**

Berechne die Schnittmenge der zwei Ebenen

$$\left|\begin{array}{ccc} x+3y-z & = & -1 \\ 2x+z & = & 2 \end{array}\right|.$$

Benutze die Schreibeweise mit der erweiterten Koeffizienten-Matrix.

Beispiel 8.10 Ebenen in $\mathbb{R}^3$, eine Lösung **514280**

Berechne die Schnittmenge der drei Ebenen

$$\left|\begin{array}{lcr} x+3y-z & = & -1 \\ 2y+z & = & 2 \\ x+3y-2z & = & 1 \end{array}\right| .$$

Benutze die Schreibeweise mit der erweiterten Koeffizienten-Matrix.

Beispiel 8.11 Ebenen in $\mathbb{R}^3$, unendlich viele Lösungen **928151**

Berechne die Schnittmenge der drei Ebenen

$$\left|\begin{array}{lcr} x+3y-z & = & -1 \\ 2x+z & = & -3 \\ 3x+3y & = & -4 \end{array}\right| .$$

Benutze dafür die Schreibweise als erweiterte Koeffizienten-Matrix.

Beispiel 8.12 Ebenen in $\mathbb{R}^3$, inkonsistentes LGS **192620**

Berechne die Schnittmenge der drei Ebenen

$$\left|\begin{array}{lcr} x+3y-z & = & -1 \\ 2x+z & = & -3 \\ 3x+3y & = & 0 \end{array}\right| .$$

Benutze die Schreibeweise mit der erweiterten Koeffizienten-Matrix.

8.4.2 Ebenen, die durch $\vec{0}$ gehen.

Wir nennen diese Probleme **homogene** lineare Gleichungssysteme.

Beispiel 8.13 Ebenen in $\mathbb{R}^3$ **185060**

Berechne die Schnittmenge der drei Ebenen

$$\left|\begin{array}{lccc} L_1: & -12y+6z & = & 0 \\ L_2: & 2x+6y-2z & = & 0 \\ L_3: & 4x-12y+8z & = & 0 \end{array}\right| .$$

Benutze dafür die Schreibweise als erweiterte Koeffizienten-Matrix.

Infobox 8.3 Die triviale Lösung eines homogenen LGS

Ein homogenes LGS hat stets die Lösung $\vec{0}$.

Aus der geometrischen Anschauung ist dies klar: Die Konstanten der Ebenen sind 0, d.h. alle Ebenen gehen durch den Ursprung und schneiden sich da also. In den Anwendungen interessiert uns aber diese Lösung oft nicht.

Beispiel 8.14 Ebenen in $\mathbb{R}^3$ **807042**

Berechne die Schnittmenge der drei Ebenen

$$\left| \begin{array}{lccc} L_1: & -2y+4z & = & 0 \\ L_2: & 4x+16y+21z & = & 0 \\ L_3: & 2x+10y+6z & = & 0 \end{array} \right| .$$

Benutze dafür die Schreibweise als erweiterte Koeffizienten-Matrix.

Abgesehen von der trivialen Lösung gilt:

Infobox 8.4 Lösungsmenge eines homogenen LGS

Ein homogenes LGS hat nur dann weitere Lösungen, falls die Ebenen eine spezielle Lage haben.
In diesen Fällen sind die Normalenvektoren der Ebenen linear abhängig.

KAPITEL 9

Matrixalgebra

Im vorherigen Kapitel haben wir die erweiterte Koeffizienten-Matrix

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

kennen gelernt. Wir haben schon festgestellt, dass die Darstellung von linearen Gleichungssystemen in dieser Form praktisch ist, weil sie uns viel Schreibarbeit erspart und anderseits, weil sie übersichtlich ist und damit Fehler bei den Umformungen verhindert. Deshalb werden wir erforschen welche weiteren Probleme wir mit Hilfe von Matrizen lösen können.
Um das Wichtigste vorwegzunehmen: Wir werden finden, dass alle Fragestellungen, die lineare Gleichungssysteme beinhalten mit Matrizen geschrieben werden sollen. Und wir werden viele Fragestellungen so formulieren, dass wir darin lineare Gleichungssysteme erkennen.

Definition 9.1 Matrix

Eine Matrix ist ein rechteckige Tabelle mit Zahlen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Die **Zeilen** der Matrix sind die m horrizontalen Listen

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \ (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \ \dots, \ (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

und die **Spalten** sind die n vertikalen Listen

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Oft werden wir die Matrix einfach mit einem Grossbuchstaben[1] schreiben $\mathbf{A} = [a_{ij}]$. Die Elemente a_{ij} stehen in der i-ten Zeile und in der j-ten Spalte.
Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten nennen wir eine m mal n Matrix und schreiben dafür entweder $m \times n$ oder $\mathbb{R}^{m\times n}$ um noch anzugeben, aus welchem Zahlenbereich die Einträge gewählt werden (hier aus der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$).

Definition 9.2 Spaltenvektor und Zeilenvektor

Eine Matrix mit einer Spalte nennen wir **Spaltenvektor**, eine Matrix mit einer Zeile nennen wir **Zeilenvektor**. Für die m mal n Matrix $\mathbf{A}$ schreiben wir die Spaltenvektoren auch als

$$\mathbf{A} = \left[\vec{A}_1,\, \vec{A}_2, \ldots,\, \vec{A}_n\right]$$

und die Zeilenvektoren

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1;\, \mathbf{A}_2; \ldots;\, \mathbf{A}_n]\ .$$

Da wir für Zeilen verwenden wir meistens $\mathbf{A}_i$ und für Spalten $\vec{A}_i$.

Eine Matrix mit lauter Nullen nennen wir **Nullmatrix** und notieren dafür $\mathbf{0}$.

Beispiel 9.1 Zeilen und Spalten **600133**

Bestimme die Zeilen und Spalten der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

9.1 Addition und skalare Multiplikation von Matrizen

Matrizen können addiert werden und mit einer Zahl multipliziert werden.

Beispiel 9.2 Zeilen und Spalten **333379**

Bestimmen für die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

die folgenden Matrizen

$$\mathbf{A} + \mathbf{B},\ 3\mathbf{A} \text{ und } 3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$$

[1] in Fettschrift

Definition 9.3 Addition und skalare Multiplikation von Matrizen

Matrizen werden addiert indem alle Einträge addiert werden:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}+\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ & \dots & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Eine Matrix wird mit einer Zahl multipliziert indem alle Einträge mit dieser Zahl multipliziert werden:

$$
\lambda \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ & \dots & & \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{bmatrix}
$$

So kann auch die negative Matrix $-\mathbf{A}$ definiert werden. Wir brauchen sie um zu erklären, was die Subtraktion von Matrizen ist, denn bisher haben wir nur die Addition besprochen:

$$-\mathbf{A} = (-1)\cdot\mathbf{A} \;\Rightarrow \mathbf{A}-\mathbf{B} = \mathbf{A}+(-\mathbf{B})\,.$$

Die Subtraktion ist also die Addition der negativen Matrix, so wie wir das auch bei den Vektoren definiert haben.

Satz 9.1 Addition und skalare Multiplikation von Matrizen

Für die $m \times n$-Matrizen gelten folgende Gesetzte:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} &= \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \\
\mathbf{A}+\mathbf{0} &= \mathbf{0}+\mathbf{A} = \mathbf{A} \\
\mathbf{A}+(-\mathbf{A}) &= (-\mathbf{A})+\mathbf{A} = \mathbf{0} \\
\mathbf{A}+\mathbf{B} &= \mathbf{B}+\mathbf{A} \\
\lambda\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \lambda\cdot\mathbf{A}+\lambda\cdot\mathbf{B} \\
(\lambda+\mu)\cdot\mathbf{A} &= \lambda\cdot\mathbf{A}+\mu\cdot\mathbf{A} \\
(\lambda\cdot\mu)\cdot\mathbf{A} &= \lambda\cdot(\mu\cdot\mathbf{A}) \\
1\cdot\mathbf{A} &= \mathbf{A}
\end{aligned}
$$

dabei ist $\mathbf{0}$ ist Nullmatrix.
In Worten: Die erste Zeile bedeutet, dass die Matrix-Addition assoziativ ist, die vierte, dass die Matrix-Addition kommutativ ist und die fünfte, dass die Multiplikation mit einem Skalar distributiv ist.

9.1.1 Das Summenzeichen

Beispiel 9.3 Summenzeichen **370849**

Schreibe mit dem Summenzeichen und summiere

1. $2+4+6+8$

2. $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$

3. $1+2+3+4+5+6+7+8+\ldots+99+100$

4. $3\cdot 1+3\cdot 2+3\cdot 3+3\cdot 4+3\cdot 5+3\cdot 6+3\cdot 7+3\cdot 8+3\cdot 9+3\cdot 10$

Übrigens die griechischen Schriftzeichen für s und S sind σ und Σ. Das Σ wird wegen dem Anfangsbuchstaben für die **S**umme benutzt. Und das Integralzeichen $\int$ ist ein langezogenes S, das ebenfalls für Summe steht.

Infobox 9.1 Regeln für das Summenzeichen

Die Summe ist assoziativ

$$\sum_i \lambda \cdot a_i = \lambda \cdot \sum_i a_i$$

d.h. gemeinsame Faktoren können ausgeklammert werden. Es gilt aber auch

$$\sum_i a_i + b_i = \sum_i a_i + \sum_i b_i$$

Schliesslich ergibt die Summe über 1 n

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n \text{ deshalb } \sum_{i=1}^{n} \lambda = \lambda \cdot n\,.$$

9.2 Matrix Multiplikation

Die Multiplikation für Matrizen ist etwas schwieriger als die Addition. Wir definieren zuerst die Multiplikation einer Zeile mit einer Spalte

$$(a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n) \odot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 +,\ \ldots,\ + a_n \cdot b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

Achtung, diese Multiplikation funktioniert nur, wenn Zeile und Spalte gleich viele Einträge haben!

Beispiel 9.4 Multiplikation Zeilen und Spalten **362627**

Berechne die Produkte

$$(7,\ -4,\ 5) \odot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad =$$

$$(6,\ -1,\ 8,\ 3) \odot \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad =$$

$$(7,\ -4,\ 5) \odot \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad =$$

Definition 9.4 Matrix-Multiplikation

Aus der Multiplikation der Matrizen $\mathbf{A} = [a_{ik}]$ und $\mathbf{B} = [b_{kj}]$ ergibt sich eine Matrix $\mathbf{C} = [c_{ij}]$. Die Elemente der Matrix $\mathbf{C}$ berechnen sich aus der i-ten Zeile von $\mathbf{A}$ und der j-ten Spalte von $\mathbf{B}$ über

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots + a_{ip} \cdot b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Wir schreiben auch

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

Die Multiplikation ist nur definiert für Matrizen mit den Dimensionen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times m}$, d.h. die Anzahl Spalten von $\mathbf{A}$ muss gleich der Anzahl Zeilen von $\mathbf{B}$ sein.

Meistens wird das Multiplikationszeichen '$\odot$' weggelassen und wir schreiben einfach $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$.

Beispiel 9.5 Matrixmultiplikation **758383**

Berechne das Produkt

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix} =$$

Infobox 9.2 Dimension der Produktematrix

Die Produktmatrix $\mathbf{C}$ von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times m}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$$

hat die Dimensionen $n \times m$ oder $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ D.h. das Produkt $\mathbf{C}$ hat so viele Zeilen wie $\mathbf{A}$ und so viele Spalten wie $\mathbf{B}$.

Satz 9.2 Gesetze für die Matrixmultiplikation

Für die Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) \odot \mathbf{C} &= \mathbf{A} \odot (\mathbf{B} \odot \mathbf{C}) \\
\mathbf{A} \odot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \odot \mathbf{B} + \mathbf{A} \odot \mathbf{C} \\
(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \odot \mathbf{C} &= \mathbf{A} \odot \mathbf{C} + \mathbf{B} \odot \mathbf{C} \\
\lambda \cdot (\mathbf{B} \odot \mathbf{A}) &= (\lambda \cdot \mathbf{B}) \odot \mathbf{A} = \mathbf{B} \odot (\lambda \cdot \mathbf{A})
\end{aligned}$$

Dies gilt solange die Summen und Produkte der Matrizen definiert sind.

Aber Achtung, die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ: $\mathbf{A} \odot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \odot \mathbf{A}$! Es gilt nur in Ausnahmefällen, dass die Matrizen miteinander kommutieren.

Definition 9.5 Transponierte Matrix

Die Transponierte der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ist

$$\mathbf{A}^\intercal = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ & \dots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Die Elemente der transponierten Matrix $\mathbf{A}^\intercal$ sind

$$(a^\intercal)_{ij} = a_{ji} \ ,$$

d.h. die Indices werden vertauscht.

Beispiel 9.6 Transponierte **758383**

Bestimme die Transponierte der folgenden Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Definition 9.6 Quadratische Matrizen

Eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ hat gleich viele Spalten wie Zeilen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Definition 9.7 Diagonalmatrix

Eine quadratische Matrix heisst Diagonalmatrix, falls alle Elemente ausserhalb der Diagonalen gleich 0 sind

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Wir schreiben auch $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$, wobei a_{ii}, die Diagonalelemente sind.

Definition 9.8 Einheitsmatrix

Eine Diagonalmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

heisst Einheitsmatrix.

Definition 9.9 Symmetrisch und antisymmetrische Matrizen

Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heiss **symmetrisch**, falls

$$\mathbf{A}^\intercal = \mathbf{A}$$

oder **antisymmetrisch** falls

$$\mathbf{A}^\intercal = -\mathbf{A}$$

Beispiel 9.7 Symmetrische/Antisymmetrische Matrizen 340726

Bestimme im Vorigen Beispiel die symmetrischen und die antisymmetrischen Matrizen.

Satz 9.3 Gesetze für die Transponierte

- $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^\intercal = \mathbf{A}^\intercal + \mathbf{B}^\intercal$
- $(\mathbf{A}\mathbf{B})^\intercal = \mathbf{B}^\intercal\mathbf{A}^\intercal$
- $(\mathbf{A}^\intercal)^\intercal = \mathbf{A}$

KAPITEL 10

Lineare Abbildungen

Definition 10.1 Lineare Abbildung

Eine Abbildung $L : V \to W, \vec{v} \mapsto L(\vec{v})$ heisst **linear** genau dann, wenn für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$ und λ gilt:

- **Homogenität**: $L(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot L(\vec{v})$
- **Additivität**: $L(\vec{v} + \vec{w}) = L(\vec{v}) + L(\vec{w})$

Dabei sind sind V und W Vektorräume, z.B $\mathbf{R}^n$ und $\mathbf{R}^m$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist ein Skalar.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.454]

Beispiel 10.1 Ist die Matrixmultiplikation eine lineare Abbildung? 591417

In diesem Beispiel betrachten wir die Abbildung

$$L(\vec{v}) := \mathbf{M} \odot \vec{a} =: \vec{b}$$

mit der Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Durch die Multiplikation der Matrix mit einem Vektor haben wir also eine Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, denn $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$. Untersuchen Sie, ob diese Abbildung linear ist, d.h. ob gilt

$$\begin{aligned} L(\lambda \cdot \vec{v}) &= \lambda \cdot L(\vec{v}) \\ L(\vec{v} + \vec{w}) &= L(\vec{v}) + L(\vec{w}) \end{aligned}$$

also

$$\mathbf{M} \odot (\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot (\mathbf{M} \odot \vec{v}) .$$

und

$$\mathbf{M} \odot (\vec{v} + \vec{w}) = \mathbf{M} \odot \vec{v} + \mathbf{M} \odot \vec{w}$$

Betrachten Sie in diesem Beispiel vorläufig nur die Vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \lambda = 3$$

Die lineare Abbildung in der obigen Definition ist ein ziemlich abstraktes Objekt. Wir werden später sehen, dass es viele Beispiele gibt für lineare Abbildungen — manchmal bei Themen, wo wir es nicht vermutet hätten. Der nachfolgende Satz besagt, dass die Matrix-Multiplikation ein Beispiel für eine lineare Abbildung ist.

Satz 10.1 Matrix-Vektor-Multiplikation als lineare Abbildung

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten. Die Abbildung

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

mit $L(\vec{v}) := \mathbf{A} \odot \vec{v}$ **ist linear**.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.456]

Wir hätten die Abbildung auch mit dem Ausdruck

$$\vec{v} \mapsto L(\vec{v}) := \mathbf{A} \odot \vec{v}$$

definieren können. Wie bei allen Abbildungen nennen wir $L(\vec{v})$ das Bild von $\vec{v}$.

Beispiel 10.2 Welche der Abbildungen sind linear? **0257223**

Bestimme jeweils, ob die Abbildung homogen und additiv ist.

1. $L(\vec{v}) = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ und $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$
2. $L(\vec{v}) = v_1$ und $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$
3. $L(\vec{v}) = (v_1)^2$ und $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$
4. $L(\vec{v}) = v_1 + 1$ und $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$
5. $L(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 3v_1 - 4v_2 \\ v_1 + 5v_2 \end{pmatrix}$ und $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$

Beispiel 10.3 Überprüfe, ob die Abbildung L linear ist. **410717**

$$L(\vec{v}) = \frac{1}{101} \begin{pmatrix} v_1 - 10v_2 \\ -10v_1 + 100v_2 \end{pmatrix}$$

und $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Bestimme danach die Matrix M, für die gilt

$$L(\vec{v}) = \mathbf{M} \odot \vec{v}\,.$$

10.1 Darstellung als Matrix

Satz 10.2 Darstellung einer linearen Abbildung als Matrix

Zu jeder linearen Abbildung

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

gibt es genau eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, so dass

$$L(\vec{x}) = \mathbf{A} \odot \vec{x} \; .$$

[Goebbels and Ritter, 2011, p.457]
Der Satz bedeutet, dass es zu jeder linearen Abbildung eine Matrix gibt, die erlaubt das Bild zu berechnen mit Hilfe der Matrix $\mathbf{A}$ und der Matrixmultiplikation

$$L(\vec{x}) = \mathbf{A} \odot \vec{x} \; .$$

Infobox 10.1 Matrix der Darstellung

Zur linearen Abbildung L und der Basis $\vec{e}_1, \; \vec{e}_2, \; \ldots$ gehört die Matrix

$$\mathbf{A} = [L(\vec{e}_1), \; L(\vec{e}_2), \; \ldots] \; .$$

Sie enthält also in den Spalten die Bilder der Basisvektoren.

Beispiel 10.4 Bestimme die Matrix der Projektion auf die Gerade $g : y = -10x$. 051137

10.2 Eigenschaften linearer Abbildungen

Wir können den nachfolgenden Satz benutzen, um lineare Abbildungen schnell zu erkennen.

Satz 10.3 Eigenschaften linearer Abbildungen

Gegeben sei eine lineare Abbildung $L : V \to W$, die Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$:

1. Der Nullvektor $\vec{0}$ in V wird auf den Nullvektor $\vec{0}$ in W abgebildet:

$$L\left(\vec{0}\right) = \vec{0}\,.$$

   Es kann aber weitere Vektoren $\vec{x} \neq 0$ mit $L\left(\vec{x}\right) = \vec{0}$ geben.

2. Das Bild einer Linearkombination von Vektoren ist gleich der Linearkombination der Bildvektoren, oder

$$L(\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2) = \lambda_1 \cdot L(\vec{x}_1) + \lambda_2 \cdot L(\vec{x}_2)$$

[Goebbels and Ritter, 2011, p.454]
Finden wir aber $L(\vec{0}) \neq \vec{0}$, dann ist die Abbildung sicher nicht linear.

Beispiel 10.5 Bestimme die Matrix der Abbildung, falls sie linear ist. **155513**

1. $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definiert durch $L(x, y) = (x + y, x)$
2. $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch $L(x, y) = 1$
3. $D : \mathbb{P}(n) \mapsto \mathbb{P}(n)$ definiert durch $D(p(x)) = \frac{d}{dx}p(x)$. $\mathbb{P}$ sind alle Polynome von Grad n

10.3 Summe, Vielfaches und Verkettung von linearen Abbildungen

Satz 10.4 Summe und skalares Vielfaches von linearen Abbildungen

Seien $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x}$ lineare Abbildungen mit zugehörigen $(m \times n)$-Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.

1. Die Summe $L + S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \vec{x} \mapsto L(\vec{x}) + S(\vec{x})$ ist eine lineare Abbildung, und die zugehörige $(m \times n)$-Matrix lautet $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.
2. Mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das skalare Vielfache von $\lambda \cdot L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \vec{x} \mapsto \lambda \cdot L(\vec{x})$ eine lineare Abbildung mit zugehöriger $(m \times n)$-Matrix $\lambda \cdot \mathbf{A}$.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.459]

Beispiel 10.6 Verkettung linearer Abbildungen **370598**

- Konstruieren Sie das Dreieck ABC
- Spiegeln Sie es an der x-Achse $A'B'C'$.
- Strecken Sie dann das Bild um den Faktor 2 in x-Richtung.

- Berechnen Sie das Bild von ABC unter der Abbildung $\mathbf{S} \odot \mathbf{M}$

Transformationen: Spiegelung x-Achse: $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Streckung um Faktor 2 in x-Richtung: $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Punkte:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Infobox 10.2 Ausführen von Transformationtionen nacheinander

Das Ausführen von Transformationtionen nacheinander entspricht dem **Multiplizieren von Matrizen**.
Die Abbildung $\mathbf{S} \odot \mathbf{M}$ bedeutet, **zuerst** M und dann S.

Satz 10.5 Verkettung linearer Abbildungen

Seien $L : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$ mit zugehöriger $(n \times l)$-Matrix $\mathbf{A}$ und $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ebenfalls linear mit $(m \times n)$-Matrizen $\mathbf{B}$. Dann ist die Verkettung oder Verschachtelung $S \circ L : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x} \mapsto S(L(\vec{x}))$, eine lineare Abbildung, und die zugehörige $(m \times l)$-Matrix lautet $\mathbf{C} = \mathbf{B} \odot \mathbf{A}$.

[Goebbels and Ritter, 2011, p.459]

Infobox 10.3 Verkettung von Abbildungen

$S \circ L$ bedeutet: zuerst L ausführen, dann S
$S \circ L$ heisst auch **Verschachtelung**

Beispiel 10.7 Verkettung linearer Abbildungen **844538**

Zeichen Sie, dass die Operatoren $L(p(x)) = x \cdot p(x)$ und $D(p(x)) = \frac{d}{dx}p(x) = p(x)'$ linear sind.
Zeigen Sie anhand des Polynoms $p(x) = 4 + 3x + 2x^2 + x^3$, dass

$$L(D(p(x))) = D(L(p(x)))$$

nicht gilt.

KAPITEL 11

Matlab

11.1 Grundoperationen

Infobox 11.1 Grundoperationen und Konstanten π, e

`+`	Plus
`-`	Minus
`*`	Skalare-Multiplikation und Matrix-Multiplikation
`/`	Skalare-Division (und Matrix-Division)
`^`	Skalare-Potenz (und Matrix-Potenz)
`sqrt(x)`	Quadratwurzel $\sqrt{x}$
`.*`	Multiplikation elementweise
`./`	Division elementweise
`.^`	Potenz elementweise
`pi`	π
`exp(1)`	Eulersche Konstante e

Infobox 11.2 Betrag, Logarithmen und trigonometrische Funktionen

`abs(x)`	Betrag einer Zahl $\lvert x\rvert$
`sign(x)`	Vorzeichen einer Zahl $\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$
`log(x)`	Logarithmus zur Basis e
`log10(x)`	Logarithmus zur Basis 10

Trigonometrische Funktionen mit Bogenmass

`cos(x)`	Cosinus, x ist z.B. `pi/2`
`sin(x)`	Sinus
`tan(x)`	Tangens
`acos(x)`	Arkuscosinus = $\cos^{-1}(x)$
`asin(x)`	Arkussinus = $\sin^{-1}(x)$
`atan(x)`	Arkustangens = $\tan^{-1}(x)$

Trigonometrische Funktionen mit Winkelmass

`cosd(x)`	Cosinus, x ist z.B. 90 Grad
`sind(x)`	Sinus
`tand(x)`	Tangens

11.2 Vektoren & Matrizen

Matlab wurde ursprüglich für die Matrizen-Rechnung entworfen. Deshalb ist vieles für die Matrizen-Rechnung optimiert und ausgelegt. Die Eingabe einer Matrix erfolgt Zeile für Zeile getrennt durch ein Semikolon `;`. Die Elemente einer Matrix können durch Kommas `,` oder durch Leerzeichen getrennt werden:

```
A=[1,3,5;1,0,2;-1,7,1]
B=[ -1 1 -1; 1 -1 1; 1 1 -1]
```

Infobox 11.3 Grundoperationen für Vektoren

`x*y`	Skalarprodukt der Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$
`norm(x)`	Länge des Vektors $\vec{x}$
`cross(x,y)`	Vektorprodukt der Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$
`size(x)`	Dimension (=Anzahl der Einträge) des Vektors $\vec{x}$

Infobox 11.4 Spezielle Matrizen

`eye(3)`	Einheitsmatrix, Matrix mit lauter Einsen
`ones(3,1)`	Matrix mit lauter Einsen, 3 Zeilen, 1 Spalte
`ones(1,3)*0`	Nullmatrix, 1 Zeile, 3 Spalten
`diag([10 9])`	Diagonalmatrix mit den Elementen 10 und 9 auf der Diagonalen

Wir können auf einzelne Elemente einer Matrix zugreifen über, z.B. auf das dritte Element aus der ersten Zeile von `A`:

```
A(1,3)
```

Wir können Einträge einzeln überschreiben:

```
A(1,3)=8
```

Wir können auf ganze Spalten mit dem Doppelpunkt `:` an erster Stellezugreifen, z.B. auf die zweite Spalte

```
A(:,2)
ans =3
     0
     7
```

oder auch auf Zeilen mit dem Doppelpunkt `:` an zweiter Stelle, z.B hier auf die erste Zeile

```
A(1,:)
ans = 1 3 6
```

Infobox 11.5 Matrix Funktionen

`transpose(A)`	Matrix transponieren
`A'`	Matrix komplex konjugieren[a].
`inv(A)`	inverse Matrix
`det(A)`	die Determinante einer Matrix
`rref(A)`	Bringt Matrix in 'Zeilenstufenform'[b].
`rank(A)`	Rang der Matrix `A`
`size(A)`	Dimensionen (=Anzahl Zeilen und Spalten) von **A**

[a] Solange `A` nur reelle Einträge hat gilt `transpose(A)=A'` .
[b] Reduced row echelon form (echelon=Staffel).

11.3 Symbolisches Rechnen

Die Matrix-Funktionen wendet man an um lineare Probleme zu lösen. Es können aber auch nicht lineare Gleichungssysteme gelöst werden. Dazu benutzt man die symbolischen Rechenfunktionen von Matlab. Bisher haben wir zwar Variablen benutzt, aber wir haben darin nur Zahlen gespeichert. Beim `symbolischen Rechnen`, können wir den Wert einer Variablen vorerst offen lassen.
Zuerst sagt man Matlab, dass man ein Variable als symbolische Variable benutzen will. Hier wollen wir x symbolisch benutzen

```
>> syms x
```

Dann geben wir die Gleichung ein, hier $x^2 + 4 \cdot x + 1 = 0$

```
>> solve(x^2+4*x+1 ==0)
ans =  3^(1/2) - 2
     - 3^(1/2) - 2
```

Infobox 11.6 Symbolisches Rechnen, Gleichungssysteme lösen

`syms x`	`x` als symbolische Variable initialisieren
`clear x`	Variable löschen
`S=solve('2*x-y+6*z-1', 'x-y+z-2')`	Gleichungssystem lösen
`S.x`	In der Lösung `S` nachschauen, welchen Wert `x` hat

11.4 Kernel, Path, current folder

Beim Starten von Matlab geschieht folgendes: Die Programmdatein von Matlab (auf der Festplatte) werden gelesen. Diese Programmdateien beschreiben, was in den Arbeitsspeicher geladen werden soll. Diese Programmdatein von Matlab im Arbeitsspeicher nennt man **Matlab-Kernel**. Dieser Kernel hat die Funktionen, die wir bisher besprochen haben. Um diese Funktionen auszuführen, benutzt er selber Variablen. Das bedeutet, dass ausser den Variablen die wir definieren, schon vordefinierte Variablen im Matlab-Kernel sind.

Infobox 11.7 Interne Variablen

`pwd`	gibt an, welches das aktuelle Verzeichnis ist
`ls`	listet alle Dateien im aktuellen Verzeichnis auf
`cd`	wechselt das aktuelle Verzeichnis
`cd ..`	wechselt im aktuellen Verzeichnis eine Hierarchiestufe nach oben
`path`	`path`; sie sagt dem Kernel in welchen Verzeichnissen er die Befehle suchen soll
`addpath('C:\Program Files\')`	fügt das Verzeichnis `'C:\Program Files\'` zu `path` hinzu

Der letzte Befehl wird gebraucht, wenn eigene Matlab Befehle und Funktionen geschrieben werden und z.B. in `'C:\Program Files\'` gespeichert wurden.

KAPITEL 12

Determinante

Wir verwenden die Definition der Determinante in zwei Dimensionen und leiten allgemeine Gesetzmässigkeiten der Determinante her. Wir machen das in zwei Dimensionen, weil wir das noch leicht aufzeichnen und uns gut vorstellen können. Die Gesetzmässigkeiten wie die Linearität und der Vorzeichenwechsel beim Vertauschen von Spalten einer Matrix sind aber für alle Matrizen gültig, d.h. auch in mehr als zwei Dimensionen.

Infobox 12.1 Determinante: Zeilen und Spalten

Wir beschränken uns darauf, das Vertauschen, Multiplizieren etc. von *Spalten* zu betrachten. Genau die selben Betrachtungen könnten aber ebenfalls für die *Zeilen* gemacht werden.

12.1 Determinante in 2D

Definition 12.1 Determinante 2D

Für die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist die *Determinante* $\det(\mathbf{A}) = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$.

[Papula, Bd. 2 I 3.2]

Die Determinante berechnet den Flächeninhalt eines Parallelogramms aufgespannt durch die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, siehe Fig. 12.1 a). Wenn wir eine Kante um den Faktor λ länger machen, dann muss auch die Fläche des Parallelogramms um diesen Faktor anwachsen. Wir nennen das die **Homogenität der Determinante**, siehe Fig. 12.1 b). Wenn eine Fläche aufgespannt wird durch $\vec{a}$ und $\vec{b}+\vec{c}$, dann muss sich aus geometrischen Gründen die Gesamtfläche zusammensetzen aus dem kleinen Flächen aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. $\vec{a}$ und $\vec{c}$. Wir nennen das die **Additivität der Determinante**, siehe Fig. 12.1 c).
Diese beiden Eigenschaften fassen wir zusammen als die **Linearität der Determinante**.

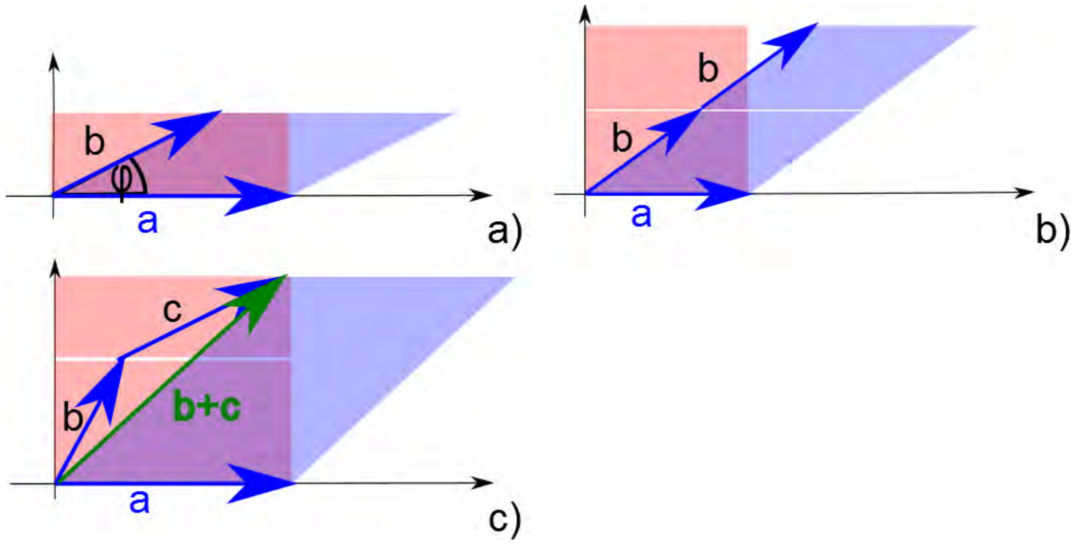


Abbildung 12.1: a) Die Determinante berechnet die Fläche des Parallelogramms aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$. b) Homogenität der Determinante: Die Fläche muss sich verdoppeln, wenn wir $\vec{b}$ verdoppeln in der Länge. c) Additivität der Determinante: Wenn wir uns für die Fläche aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b}+\vec{c}$ interessieren, dann kann die grosse blaue Fläche berechnet werden aus der Summe der kleineren roten Flächen, die aufgespannt werden durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzw. $\vec{a}$ und $\vec{c}$.

Infobox 12.2 Linearität der Determinante

$$\det(\begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 & b_1 \\ \lambda \cdot a_2 & b_2 \end{pmatrix}) = \lambda \cdot \det(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix})$$

$$\det(\begin{pmatrix} a_1 + c_1 & b_1 \\ a_2 + c_2 & b_2 \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}) + \det(\begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix})$$

d.h. die Determinante ist linear, wenn wir ganze Spalten (oder ganze Zeilen) als Argumente auffassen.

Beachte, dass aufgrund der Linearität die Determinante auch negative Werte annehmen kann, d.h. die Determinante berechnet die Fläche plus ein Vorzeichen.

Infobox 12.3

- Die Determinante ändert sich nicht, wenn eine Spalte zur anderen addiert wird. Siehe auch Fig. 12.2.
- $\det(\vec{a}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = 0$
- $\det(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}^{\intercal}) = \det(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix})$

12.2 Determinante in 3D

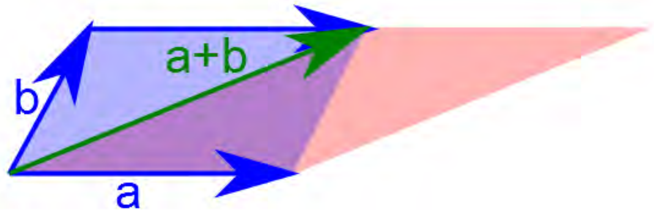


Abbildung 12.2: Die Fläche verändert sich nicht, wenn anstatt der Fläche des Parallelogramms aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (blau), die Fläche aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b}+\vec{a}$ (rot) berechnet wird.

Infobox 12.4 Linearität des Spatprodukts

Das Spatprodukt ist linear in allen Argumenten, d.h.

$$[\lambda \cdot \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \lambda \cdot [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

und

$$[\vec{a} + \vec{d}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] + [\vec{d}, \vec{b}, \vec{c}]$$

Diese Gleichungen gelten auch für die Addition und Multiplikation im zweiten Argument $\vec{b}$ und im dritten $\vec{c}$.

Definition 12.2 Determinante in 3D

Sei $\mathbf{A}$ eine 3×3-Matrix, und $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ die Spalten von $\mathbf{A}$. Die Determinante ist dann definiert als

$$\det(\mathbf{A}) = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$$

Infobox 12.5 Linearität Determinanten

Die Determinante ist linear in allen Argumenten.

Satz 12.1 Sarrus'sche Regel

Sei $\mathbf{A}$ die Matrix mit den Einträgen $a_{i,j}$, dann ist

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \\
&+ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\
&- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} \\
&- a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}
\end{aligned}$$

[Goebbels and Ritter, 2011, p.174], [Papula, Bd. 2 I 3.1]

12.3 Folgen der Linearität

Infobox 12.6 Additon von Spalten (oder Zeilen)

- Der Wert der Determinante ändert sich nicht, wenn eine Spalte zur anderen addiert wird.
- Achtung: Das Multiplizieren einer Spalte mit einer Zahl *verändert* die Determinante!

Infobox 12.7 Vertauschen von Spalten (oder Zeilen)

Die Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn Spalten vertauscht werden.

Infobox 12.8 Determinante der Transponierten

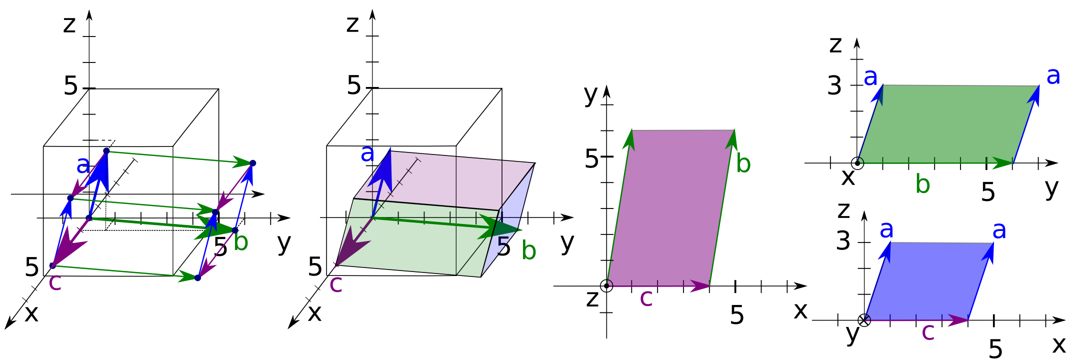
- $\det(\vec{a}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}) = 0$
- $\det(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}^{\intercal}) = \det(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix})$

Dies gilt übrigens auch in mehr als 3 Dimensionen

Infobox 12.9 Geometrische Bedeutung der Determinante

- Für 1D defniert man $\det(a_{11}) = a_{11}$
- 1D Länge + Vorzeichen
- 2D Fläche + Vorzeichen
- 3D Volumen + Vorzeichen
- 4D und ND: Die Determinante ist das Hypervolumen des Hyper-Parallelogramms aufgespannt durch die Vektoren in den Spalten der Matrix + Vorzeichen

Beispiel 12.1 Determinante einer Dreiecksmatrix **805275**



Berechnen Sie die Determinante. Benutze die geometrische Interpretation, dass nämlich die Determinante das Volumen des Spats berechnet.
In der Matrix **A** sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ als Zeilen angeordnet.

$$\mathbf{A} = (\vec{a}^{\mathsf{T}}; \vec{b}^{\mathsf{T}}; \vec{c}^{\mathsf{T}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 6 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Satz 12.2 Determinante einer Dreiecksmatrix

Für Dreiecksmatrizen ist die Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente. Sei $\mathbf{A}$ eine Dreiecksmatrix, dann gilt

$$\det(\mathbf{A}) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdots a_{n,n} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

12.4 Determinanten in mehr als drei Dimensionen $n \geq 3$

Satz 12.3 Laplace'scher Determinanten-Entwicklungssatz

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Determinante von $\mathbf{A}$ kann nach jeder Zeile oder jeder Spalte entwickelt werden:

- Entwicklung nach der i-ten Zeile

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik})$$

- Entwicklung nach der k-ten Spalte

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} a_{ik} \det(\mathbf{A}_{ik})$$

$\mathbf{A}_{ik}$ ist die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die durch streichen der i-ten Zeile und k-ten Spalte entsteht.

Infobox 12.10 Schema für die Vorzeichen $(-1)^{k+i}$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ & \dots & & \end{pmatrix}$$

Satz 12.4 Multiplikationssatz

Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so gilt

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$$

Satz 12.5 Determinante der Inversen Matrix

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

12.5 Cramer'sche Regel

Satz 12.6 Cramer'sche Regel

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, mit $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Die Lösung $\vec{x}$ des Gleichungsystems

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$$

ist gegeben durch

$$x_k = \frac{\det(\vec{A}_1, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{A}_n)}{\det(\mathbf{A})}$$

wobei $\vec{b}$ die k-te Spalte ersetzt.

[Papula, Bd. 2 I 5.4, p. 92], [Goebbels and Ritter, 2011, p.181]

Beispiel 12.2 Cramer'sche Regel **725615**

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem mit der Cramer'schen Regel.

$$\left|\begin{array}{rcr} 5x_1 + 3x_3 & = & 2 \\ -x_1 + 2x_2 & = & 3 \\ 3x_2 + 1x_3 & = & 4 \end{array}\right|$$

Beispiel 12.3 Herleitung des Satz von Cramer **260103**

Leiten Sie den Cramer'schen Satz in drei Dimensionen her. Wir betrachten das folgende Gleichungssystem in Matrixschreibweise

$$\left(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3\right) \odot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{b}$$

Dabei fassen wir die erste Spalten von $\vec{A}$ im Spaltenvektor $\vec{A}_1$ zusammen usw. Betrachten Sie vorerst nur die zweite Variable y.
Der Beweis ist nicht sehr intuitiv. Deshalb sind hier die Schritte:

- nehmen Sie an, dass Sie die Lösung (x, y, z) des Gleichungssystems schon kennen würden und drücken Sie $\vec{b}$ mit dieser Lösung aus
- ersetzen Sie die zweite Spalte von $\mathbf{A}$ mit diesem Ausdruck für $\vec{b}$
- berechnen sie die Determinante dieser Matrix
- lösen sie nach y auf

Für die weiteren Unbekannten x und z beweist man dies genau gleich.

Satz 12.7 Gesetze für Determinanten in N Dimensionen

Im Folgenden können die Vektoren $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots$ als Spalten oder als Zeilen aufgefasst werden.

- $\det\left(\lambda\,\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots\right) = \lambda\,\det\left(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots\right)$
- $\det\left(\vec{A}_1, \vec{A}_2 + \vec{d}, \ldots\right) = \det\left(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots\right) + \det\left(\vec{A}_1, \vec{d}, \ldots\right)$
- $\det\left(\vec{A}_1, \vec{A}_2 + \vec{A}_1, \ldots\right) = \det\left(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots\right)$
- $\det\left(\vec{A}_2, \vec{A}_1, \ldots\right) = -\det\left(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \ldots\right)$
- $\det\left(\vec{A}_1, \vec{0}, \ldots\right) = 0$
- $\det\left(\vec{A}_1, \vec{A}_1, \ldots\right) = 0$
- $\det\left(\lambda\,\mathbf{A}\right) = \lambda^N\,\det\left(\mathbf{A}\right)$
- Dreiecksmatrizen: $\det(\mathbf{A}) = a_{11}\,a_{22}\,\ldots\,a_{NN}$
- $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$
- Laplace'scher Entwicklungssatz

Infobox 12.11 Effiziente Berechnung der Determinante

In $N \geq 3$ wird die Determinante effizient berechnet, indem die Matrix mit dem Gauss-Verfahren auf Dreiecks-Form gebracht wird. Die Determinante verändert sich durch die Elimination $\mathbf{A}'_i = \mathbf{A}_i + \nu \cdot \mathbf{A}_j$ $(i \neq j)$ nicht. Schliesslich ist die Determinante das Produkt der Diagonalelemente mal ein Vorfaktor.
Der Vorfaktor ist am Anfang der Elimination 1. Er

- ändert das Vorzeichen, wenn zwei Zeilen vertauscht werden.
- er wird mit $1/\lambda$ multipliziert, falls eine Zeile mit λ multipliziert wird

Beispiel 12.4 Effiziente Berechnung der Determinante **721944**

Berechnen Sie die Determinante effizient. Bringen Sie dazu die Matrix in Dreiecksform.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel 12.5 Effiziente Berechnung der Determinante **945081**

Berechnen Sie die Determinante effizient. Bringen Sie dazu die Matrix in Dreiecksform.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 8 \\ 20 & 0 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

KAPITEL 13

Übungen Lineare Algebra

13.1 Lösung von linearen Gleichungssystemen

1. **Lösung von linearen Gleichungssystemen** **726383**
Der Gauss'sche Algorithmus wird in Papula Bd. 2 I 5.2 (S. 72-75) eingeführt. Lesen Sie diesen Abschnitt. Lösen Sie das nachstehende System von lineare Gleichungen mit diesem Algorithmus.

$$\begin{aligned} 2x+y-2z &= 10 \\ 3x+2y+2z &= 1 \\ 5x+4y+3z &= 4 \end{aligned}$$

2. **Lösung von linearen Gleichungssystemen** **902270**
Löse das System

$$\begin{aligned} x+2y-3z &= -1 \\ 3x-y+2z &= 7 \\ 5x+3y-4z &= 2 \end{aligned}$$

3. **Lösung von linearen Gleichungssystemen** **766582**
Löse das System

$$\begin{aligned} x+2y-3z &= 6 \\ 2x-y+4z &= 2 \\ 4x+3y-2z &= 14 \end{aligned}$$

4. **Lösung von LGSs, Pivot/Freie Variablen** **727841**
Löse das System

$$\left| \begin{array}{ccc} 2x-3y+6z+2v-5w & = & 3 \\ y-4z+v-5w & = & 1 \\ v-3w & = & 3 \end{array} \right|$$

5. **Konsistente/inkonsistente Gleichungssysteme,** **715001**

Schreibe das Gleichungsystem in Matrix-Form. Wende dann das Gaussverfahren an.

Enthält die erweiterte Koeffizienten-Matrix danach eine reine Nullzeile

$$\left| \begin{array}{ccc|c} \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

oder hat sie die Form

$$\left|\ \ldots\ \ 0\ \ 3\ \middle|\ 4\ \right| ,$$

ist das Gleichungssystem konsistent. Hier kann eine Lösung berechnet werden.
Enthält sie aber eine Zeile

$$\left|\ \ldots\ \ 0\ \ 0\ \middle|\ 3\ \right|$$

ist es inkonsistent. Dann gibt es keine Lösung.

(a) $\left|\begin{array}{rcr} 3x-3y-z &=& 6 \\ -4y+z &=& -8 \\ 3x-3y &=& -66 \end{array}\right|$

(b) $\left|\begin{array}{rcr} x+3y+5z &=& 0 \\ x+7y+6z &=& -4 \\ 4y+z &=& -4 \end{array}\right|$

(c) $\left|\begin{array}{rcr} x-3y+z &=& 3 \\ y+5z &=& 2 \\ 2x-5y+7z &=& 5 \end{array}\right|$

(d) $\left|\begin{array}{rcr} -3x+y+2z &=& 0 \\ 4y-3z &=& 1 \\ z &=& 1 \end{array}\right|$

6. Rang einer Matrix, 928561

Jede Matrix kann durch das Gauss-Verfahren in die Zeilenstufen-Form überführt werden. Die Anzahl Zeilen, die nach Anwenden des Gauss-Verfahrens keine Nullzeilen sind, nennen wir den **Rang einer Matrix**. Bringen Sie folgende Matrizen in Zeilenstufenform und bestimmen Sie den Rang der Matrix:

(a) $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}$

7. Lineare Abhängigkeit prüfen mit dem Gauss-Algorithmus

Wir haben die lineare Abhängigkeit schon früher wie folgt definiert:
Die Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_N\}$ heisst **linear unabhängig** genau dann, wenn die Gleichung

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_N\vec{a}_N = 0,\ x_i \in \mathbb{R}$$

nur die Lösung $x_1 = x_2 = \ldots = x_N = 0$ besitzt.

Die Summe $x_1\vec{a}_1+x_2\vec{a}_2+\ldots+x_N\vec{a}_N$ heisst eine **Linearkombination** der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2\ \ldots\ \vec{a}_N$.

Das Gauss-Verfahren erlaubt systematisch die lineare Abhängigkeit zu überprüfen. Dazu ein Beispiel:

Sind die Vektoren $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

linear abhängig? Zum Beantworten dieser Frage schreiben wir die Vektoren als Zeilen einer Matrix: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Wenden wir den Gauss-Algorithmus an,[1] berechnen wir eine Linearkombinationen von $\vec{a}_1, \vec{a}_2\, \vec{a}_3$.

[1] Vertauschen von Zeilen, Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl ungleich null, Addition von Zeilen

Ist eine Linearkombination $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_x\vec{a}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2\,\vec{a}_3$ linear abhängig. Durch $\vec{a}_2 - \vec{a}_1$ entsteht in der zweiten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch $\vec{a}_3' - \vec{a}_2'$ entsteht in der letzten Zeile der Nullvektor

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. die Vektoren sind linear abhängig.

Bestimmen Sie jetzt die lineare Abhängigkeit der folgenden Mengen von Vektoren:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -29 \\ 1 \\ -27 \\ 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

13.2 Matrixalgebra

1. **Matrixmultiplikation**
   In Papula Bd. 2 I 2.6.3 (S. 18-23) wird erklärt, wie Matritzen miteinander multipliziert werden. Achten sie auf das Falk-Schema, denn es ist besonders nützlich. Papula kennzeichnet Matrizen durch Fettdruck. Diese Konvention werden wir stets brauchen.
   Es seien folgende Vektoren und Matrizen gebeben:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \mathbf{N} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

   Berechnen Sie

   (a) $\mathbf{M} \odot \vec{v}$
   (b) $\mathbf{M} \odot \vec{w}$
   (c) $\mathbf{M} \odot \vec{x}$
   (d) $\mathbf{M} \odot \vec{y}$
   (e) $\mathbf{M} \odot \mathbf{N}$
   (f) $\mathbf{M} \odot \mathbf{P}$

2. **Eigenschaften der Matrixmultiplikation**
   $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$
   Berechne folgende Ausdrücke:

$$\mathbf{M} \odot \vec{v},\ \mathbf{M} \odot \vec{w},\ \mathbf{M} \odot (2\vec{v})$$

$$\mathbf{M} \odot (3\vec{w}),\ \mathbf{M} \odot (\vec{v}+\vec{w}),\ \mathbf{M} \odot (\vec{v}-\vec{w})$$

Berechne nun mit Hilfe der obigen Zwischenresultaten

$$\mathbf{M} \odot (\vec{v}+\vec{w}) - (\mathbf{M} \odot \vec{v} + \mathbf{M} \odot \vec{w}),\ \mathbf{M} \odot (\vec{v}-\vec{w}) - (\mathbf{M} \odot \vec{v} - \mathbf{M} \odot \vec{w})$$

$$\mathbf{M} \odot (2\vec{v}) - 2\mathbf{M} \odot \vec{v},\ \mathbf{M} \odot (3\vec{w}) - (3\mathbf{M} \odot \vec{w})$$

Welche Rechenregeln lassen sich daraus ableiten?

3. Spezielle Matrizen

Matritzen sind Abbildungen von Vektoren. Sie drehen, spiegeln, projizieren oder strecken Vektoren. Hier lernen Sie typische Matrizen kennen. Wir arbeiten mit dem Dreieck:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zeichnen Sie es gross auf. Benennen Sie die jeweiligen Abbildungen mit Worten, z.B. Drehung, Spiegelung, Projektion usw. Beachte dazu die Innenwinkel des Dreiecks, die Kantenlängen und den Umlaufsinn des Dreiecks.

(a) Berechne und zeichne das Bild des Dreiecks unter der Abbildung $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Berechne und zeichne das Bild von ABC unter der Abbildung $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) Berechne und zeichne das Bild von ABC unter der Abbildung $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(d) Berechne und zeichne das Bild von ABC unter der Abbildung $\mathbf{S}' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Verkettung von Abbildungen, 926268

Die Matrix-Multiplikation ist **nicht kommutativ**, d.h. es gilt **nicht**

$$\mathbf{M} \odot \mathbf{S} = \mathbf{S} \odot \mathbf{M}\,.$$

Es gibt aber spezielle Matrizen, wo dies trotzdem gilt.

Wir arbeiten jetzt mit folgenden Matrizen:

$$\mathbf{R}(\frac{4\pi}{3}) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{4\pi}{3}) & \sin(\frac{4\pi}{3}) \\ -\sin(\frac{4\pi}{3}) & \cos(\frac{4\pi}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.866 \\ -0.866 & -0.5 \end{pmatrix} \text{ und } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

d.h. mit der Drehung $\mathbf{R}$ um $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ und der Spiegelung an der x-Achse.

Das Ausführen von Transformationen nacheinander entspricht dem **Multiplizieren von Matrizen**.

Achtung bei der Reihenfolge: Für die eine Spiegelung $\mathbf{S}$ und die Drehung $\mathbf{R}$ bedeutet $\mathbf{S} \odot \mathbf{R} \odot \vec{v}$, dass der Vektor $\vec{v}$ **zuerst** gedreht und dann gespiegelt wird. Das ist etwas gewöhnungsbedürftig, weil wir sonst von links nach rechts lesen. Es soll das Dreieck ABC abgebildet werden:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Konstruieren Sie das Dreieck ABC gross auf ein Blatt Papier.
- Berechnen Sie die Position der Ecken unter der Abbildung $\mathbf{S} \odot \mathbf{R}$ und zeichnen Sie $A'B'C'$ in die Grafik ein.
- Berechnen Sie die Position der Ecken unter der Abbildung $\mathbf{R} \odot \mathbf{S}$ und zeichnen Sie $A''B''C''$ in die Grafik ein.

13.3 Lineare Abbildungen

1. **Lineare Abbildungen** **907788**
Bestimmen Sie ob folgende Abbildungen L linear sind und geben Sie (falls möglich) die entsprechende Darstellung als Matrix an.

(a) $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definiert durch $L(x, y) = (x + y, x)$

(b) $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch $L(x, y, z) = 2x - 3y + 4z$ oder gleichbedeutend

$$L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = (2x - 3y + 4z)$$

(c) $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ definiert durch $L(x, y, z) = (|x|, 0)$ oder gleichbedeutend

$$L(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} |x| \\ 0 \end{pmatrix}$$

(d) $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch $L(x, y) = x \cdot y$ oder gleichbedeutend

$$L(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = (x \cdot y)$$

(e) $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definiert durch $L(x, y) = (3x - 4y, x + 5y)$

Hinweis:
Die lineare Abbildung $L(x, y) = (x + y, x)$ kann auf verschiedene Arten notiert werden, z.B. auch als $L(\vec{v}) = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ ($\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$). Es werden beide Notationen benutzt. In der Notation dieser Übung ist die Homogenität

$$L(\lambda\, x, \lambda\, y) = \lambda\, L(x, y)$$

und die Additivität

$$L(x + u, y + w) = L(x, y) + L(u, w)\ .$$

In der zweiten Notation ist die Homogenität

$$L(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot L(\vec{v})$$

und die Additivität

$$L(\vec{v} + \vec{w}) = L(\vec{v}) + L(\vec{w})\ .$$

2. **Lineare Abbildung als Matrix,** **435522**
Bestimmen Sie für die folgenden lineare Abbildungen das Bild der Basisvektoren und schreiben Sie die Abbildung als Matrix:

(a) Streckung der x und y-Komponente um den Faktor 10.

(b) Spiegelung an der Winkelhalbierenden zwischen x und y-Achse.

(c) Streckung um Faktor 4 der x-Komponente und Streckung um Faktor 0.5 der y-Komponente.

(d) Projektion auf die Winkelhalbierende zwischen x und y-Achse.

(e) Drehung um den Urspung um 45° im Gegenuhrzeigersinn.

3. Darstellung einer lineare Abbildung als Matrix, **738430**

Es sei $\mathbf{P} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und M die Spiegelung an der y-Achse. Ferner bilden

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

das Dreieck ABC.

(a) Bestimmen Sie das Bild von ABC unter Abbildung $\mathbf{P}$ und M $\odot$ $\mathbf{P}$

(b) Bestimmen Sie das Bild von ABC unter Abbildung M und $\mathbf{P} \odot$ M

Vergleichen Sie die Resultate aus den beiden Teilaufgaben. Was schliessen Sie daraus?

4. Rechenregeln für Matrix-Multiplikation **928277**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie am Beispiel dieser Matrizen die Gültigkeit der folgenden Rechenregeln (sofern alle Summen und Produkte existieren):

(a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \odot \mathbf{C} = \mathbf{A} \odot \mathbf{C} + \mathbf{B} \odot \mathbf{C}$

(b) $(\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) \odot \mathbf{C} = \mathbf{A} \odot (\mathbf{B} \odot \mathbf{C})$

(c) $(\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^\top = \mathbf{B}^\top \odot \mathbf{A}^\top$

Rechnen Sie wahlweise schriftlich oder mit Matlab.

5. Matrix-Multiplikation **991200**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -3 \\ -4 & 6 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie am Beispiel dieser Matrizen, dass die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist.

6. Matrix-Multiplikation **744523**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Bestimmen sie alle Matrizen $\mathbf{X}$, für die gilt $\mathbf{A} \odot \mathbf{X} = \mathbf{X} \odot \mathbf{A}$, d.h. das Matrix-Produkt verhält sich kommutativ.

13.4 MATLAB

1. Operationen mit Vektoren, **58174**

Es seien die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gegeben. Berechnen Sie mit Matlab die folgenden Ausdrücke. Welche Operationen werden ausgeführt? $\vec{u} = \{2, -3, 1, 0\}$; $\vec{v} = \{-1, 0, 1, 4\}$

(a) `u+v-1`
(b) `[u v(2:4)]`
(c) `u*v`
(d) `u.*v`
(e) `u*v'`
(f) `u'*v`
(g) `max(abs(u+v))`
(h) `sum([u;v])`

2. Operationen mit Vektoren, **886510**

(a) Quadrieren Sie die Zahlen 3, π und -1 mit Hilfe des Operators ^ und ziehen Sie aus den Ergebnissen jeweils die Wurzel.
(b) Erzeugen Sie den Vektor $\vec{v} = (1, 2, \ldots 10)$ mit dem Befehl `v=1:1:10` .
(c) Erzeuge den Vektor $\vec{u} = (36, 72, \ldots 360)$
(d) Rechne die Winkel in $\vec{u}$ ins Bogenmass um.
(e) Berechne die $\cos -, \sin -$ und $\tan -$Werte für die Winkel in $\vec{u} = (36{*}2\pi/360, 72{*}2\pi/360, \ldots 2\pi)$.
(f) Visualisiere die Funktionen $\cos(\varphi), \sin(\varphi)$ und $\tan(\varphi)$ im Bereich $0\varphi < 2\pi$ mit dem Befehl `plot(x,y)`.

3. Abstand Punkt-Ebene, **878666**

Berechne den Abstand der Punkte

(a) $\vec{Q} = \begin{pmatrix} -8/5 \\ 0 \\ -4/5 \end{pmatrix}$
(b) $\vec{R} = \begin{pmatrix} -18/5 \\ 2 \\ -9/5 \end{pmatrix}$

von der Ebene, die durch die Punkte $\vec{P_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{P_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ festgelegt ist. Benutze dazu u.a. das Vektor-Produkt `c=cross(a,b)`.

4. Lineare Abhängigkeit

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{d} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie unter Benutzung des Befehls `rref`:

(a) Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig.
(b) Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{d}$ sind linear abhängig.

5. Schnittpunkt von 3 Ebenen, **544325**

Bestimme die gemeinsamen Punkte der Ebenen E_1, E_2, E_3. Benutze dazu zuerst den Befehl `solve`, danach den Befehl `inv(`$\mathbf{A}$`)` und schliesslich den Befehl `rref`:

(a)

$$\begin{aligned} E_1 :\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= 5 \\ E_2 :\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ E_3 :\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} E_1 :\ 4x_1 + 5x_2 &= 6 \\ E_2 :\ x_1 + x_3 &= 0 \\ E_3 :\ 3x_2 - 2x_3 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

6. Projektion **394739**

Projiziere die Punkte $\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} -8/5 \\ 0 \\ -4/5 \end{pmatrix}$ und $\vec{R} = \begin{pmatrix} -18/5 \\ 2 \\ -9/5 \end{pmatrix}$ auf die Ebene $E_1 :\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$.

(a) Bestimme dazu mittels Projektion die Bilder der Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

(b) Bestimme die Transformationsmatrix.

(c) Wende die Transformationsmatrix auf P, Q und R an.

7. Mittelpunkt und Radius des Kreises, **901163**

Bestimme den Mittelpunkt und den Radius des Kreises

(a) $x^2 + y^2 - 6x - 27 = 0$

(b) $x^2 + y^2 - 8x = 0$

(c) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

(d) $x^2 + y^2 - 6x + 6y = 0$

8. Mittelpunkt und Radius des Kreises

Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel mit Mittelpunkt $\vec{M}$ und Radius r.

(a) $\vec{M} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}, r = 6$

(b) $\vec{M} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, r = 8$

(c) $\vec{M} = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ -1 \end{pmatrix}, r = 3$

(d) $\vec{M} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, r = 3\sqrt{2}$

9. Schnittpunkt Kreis-Gerade, **694662**

Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Kreises k mit der Geraden g:

(a) $k:\ x^2 + y^2 + 6x - 8y + 25 = 0$ und $g:\ 3x + y + 5 = 0$

(b) $k:\ x^2 + y^2 - 4x - 25 = 0$ und $g:\ 3x + 7y - 35 = 0$

Überprüfen Sie Ihr Resultat mit Matlab.

10. Kreis durch 3 Punkte, **536673**

Bestimmen Sie den Kreis durch die drei Punkte. Überprüfen Sie Ihr Resultat mit Matlab.

a) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{P} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

13.5 Determinanten

1. Determinanten, **949369**

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen. Verwenden Sie den Satz von Sarrus und den Satz über Determinante von Diagonalmatrizen. Nützen Sie ausserdem aus, dass die Addition von Zeilen (oder Spalten) die Determinante nicht verändert, dass aber die Vertauschung von Zeilen, das Vorzeichen der Determinante ändert. Überprüfen Sie Ihre Resultate mit Matlab (Befehl `det`(A)).

(a) $\begin{pmatrix} \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ -\cos(\varphi) & \sin(\varphi) \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix}$

2. Regel von Cramers, **911705**

Lösen Sie die folgenden *inhomogenen quadratischen* linearen Gleichungssysteme mit Hilfe der Cramerscher Regel:

(a)

$$\begin{aligned} -x+10y+5z &= 3 \\ 3x-6y-2z &= -2 \\ -8x+14y+4z &= 6 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned} 3y+2x &= z+1 \\ 3x+2z &= 8-5y \\ 3z-1 &= x-2y \end{aligned}$$

3. Determinante, **522207**

Bestimmen Sie die Determinante. Eliminieren Sie zuerst Einträge in einer ganzen Spalte bis auf einen Eintrag[2], bevor Sie nach einer geeigneten Zeile oder Spalte entwickeln

(a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Determinanten von linearen Abbildungen

Bestimme die Determinante der folgenden linearen Abbildungen. Hinweis: Bestimme zuerst die Matrix M der Darstellung in einer Orthonormalbasis. Bestimme dann $\det(M)$.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 9x_2 \\ 3x_1 - 5x_2 \end{pmatrix}$

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $T(x, y) = (2x - 9y, 3x - 5y)$

[2] Addieren oder Subtrahieren von Spalten oder Zeilen verändert die Determinante nicht

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_3 \\ 5x_2 + 7x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $T(x, y, z) = (2x + 7y - 4z, 4x - 6y + 2z)$

5. Determinanten von linearen Abbildungen, **366248**

Bestimme die Determinante der Abbildung $D(f(t)) = \frac{df}{dt}$ für die gegebene Basis. Hinweis: Bestimme zuerst die Matrix $\mathbf{D}$, die der linearen Abbildung entspricht. Bestimme dann $\det(D)$

(a) $\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$

(b) $\{1, t, \ldots, t^5\}$

(c) $\{\sin(t), \cos(t)\}$

6. Äquivalenzumformungen für die Determinante, **670545**

Es soll die Determinante von $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ bestimmt werden. Anton formt folgendermassen um:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}, \text{ also } \det(\mathbf{A}) = 0 \cdot (-6) + 9 = 9$$

mit den *Zeilenum*formungen:[3] $\mathbf{A}' = (\mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2; \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)$.
Berta formt folgendermassen um:

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \text{ also } \det(\mathbf{A}) = 0 \cdot (-3) - (-1) \cdot (-9) = -9$$

mit den Zeilenumformungen:$\mathbf{B}' = (\mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2; \mathbf{A}_2)$.
Die Resultate für die Determinante unterscheiden sich durch das Vorzeichen. Anton und Berta sollten aber das gleiche Resultat erhalten. Wer hat den Fehler gemacht? Untersuchen Sie, ob wirklich beide zulässige Zeilenumformungen vorgenommen haben.

[3] $\mathbf{A}_1$ ist z.B. die erste Zeile von $\mathbf{A}$