



Test 1 Musterlösung

Klasse: 1Ea, 1Eb, 1Sb

Datum: 16. Oktober 2017

1. Transformationen

ZY7YMX

Es sei der Graph $f(x)$ grafisch gegeben (blau schraffiert). Zeichnen Sie unten die Graphen der weiteren Funktionen ein. *Beschriften* Sie die Graphen $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ und $p(x)$ eindeutig.

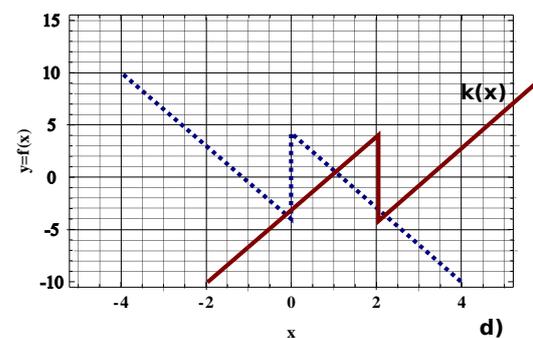
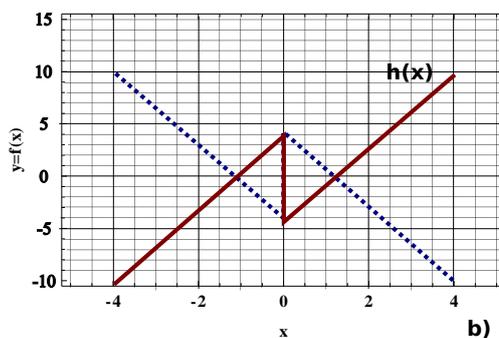
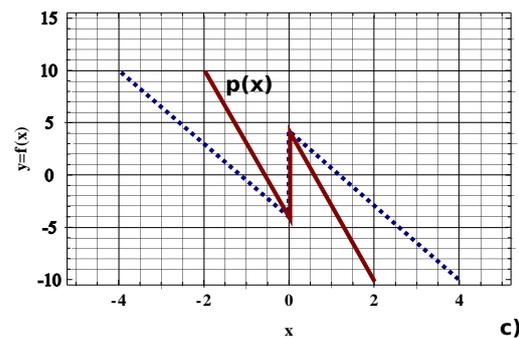
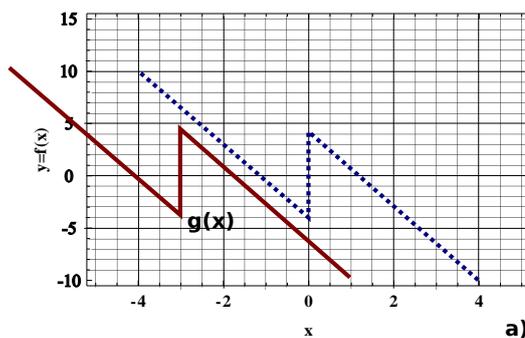
(a) $g(x) = f(x + 3)$

(c) $k(x) = f(2 \cdot x)$

(b) $h(x) = f(-x)$

(d) $p(x) = f(-x + 2)$

Lösung:



2. Zwischenwinkel

472DV5

Berechne den Winkel zwischen den Vektoren \vec{a} und \vec{b} und zwischen \vec{b} und \vec{c} .

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1485 \\ -1325 \\ 2178 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = 5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right) = \arccos \left(\frac{15185}{\sqrt{8704534} \cdot \sqrt{30}} \right) = 20^\circ [0.349094]$$

Der Vorfaktor von \vec{c} kann weggelassen werden $\rightarrow \vec{c}$. Das Skalarprodukt $\vec{b} \odot \vec{c}$ verschwindet, also

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\vec{b} \odot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} \right) = \arccos(0) = 90^\circ [1.5708]$$

3. Lineare Abhängigkeit**LSP4JU**

Überprüfen Sie, ob die Vektoren linear abhängig sind. Bestimmen Sie wenn möglich die Linearkombination die den Nullvektor $\vec{0}$ ergibt.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 21 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -16 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -41 \\ -28 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir schreiben die Vektoren untereinander auf und eliminieren zuerst in der x-Komponente:

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{ccc} \vec{u} = (-1 & 21 & 0) \\ \vec{v} = (1 & -16 & 7) \\ \vec{w} = (1 & -41 & -28) \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{l} \vec{u}' = \vec{u} = (-1 \quad 21 \quad 0) \\ \vec{v}' = \vec{v} + \vec{u} = (0 \quad 5 \quad 7) \\ \vec{w}' = \vec{w} + \vec{u} = (0 \quad -20 \quad -28) \end{array} \right| \\ \\ \rightarrow \left| \begin{array}{l} \vec{u}'' = (-1 \quad 21 \quad 0) \\ \vec{v}'' = (0 \quad 5 \quad 7) \\ \vec{w}'' = \vec{w}' + 4\vec{v}' = (0 \quad 0 \quad 0) \end{array} \right| \end{array}$$

Es ist also möglich, die Komponenten von Vektor \vec{w}'' ganz zu eliminieren. Die Vektoren sind komplanar.

Diese Linearkombination verfolgen wir nun rückwärts:

$$\vec{0} = \vec{w}'' = \vec{w}' + 4\vec{v}' = (\vec{w} + \vec{u}) + 4 \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = 5\vec{u} + 4\vec{v} + \vec{w}$$

4. Überlagerung gleichfrequenter cos- und sin-Schwingungen**SGNHEO**

Zerlegen Sie die Schwingung in gleichfrequente cos- und sin-Schwingungen

$$f(t) = \sqrt{41} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot t - 0.896055\right) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Geben Sie folgende Größen an:

- (a) Winkelfrequenz
- (b) Periodenlänge
- (c) Amplitude
- (d) Phase

Lösung:

- (a) $\omega = \frac{\pi}{5}$
- (b) $T = \frac{2\pi}{\pi/5} = 10$
- (c) $A = \sqrt{41}$
- (d) $\varphi = -0.896055$ (-51.34°)

$$a = A \sin(\varphi) = -5$$

$$b = A \cos(\varphi) = 4$$

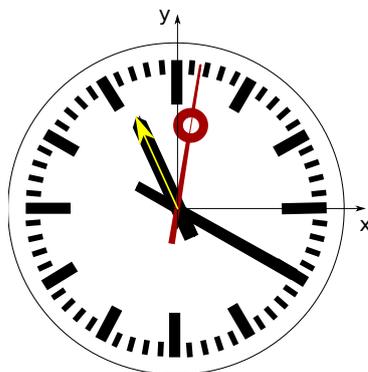
Wir können also schreiben

$$f(t) = -5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot t\right) + 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot t\right).$$

5. Polarkoordinaten

9TGS9V

Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -150.5 \\ 413.5 \end{pmatrix}$ ist an die Spitze des Stundenzeigers geklebt (gelb eingezeichnet). Wir betrachten in dieser Aufgabe nur Stunden und Minuten — aber keine Sekunden.



- (a) Wie spät ist es gemäss der Uhr?
- (b) Geben Sie die Polarkoodinaten des Vektors \vec{v} an.

Drehen Sie in Gedanken den Stundenzeiger um 50° im Uhrzeiger-Sinn weiter: $\vec{v} \rightarrow \vec{v}'$. Passen Sie in Gedanken auch die Position des Minutenzeigers an.

- (c) Welche Uhrzeit zeigt die Uhr jetzt an?
- (d) Geben Sie die neuen Polar-Koordinaten von \vec{v}' an.
- (e) Geben Sie die neuen kartesischen Koordinaten von \vec{v}' an.

Lösung:

- (a) Es ist 11:20 Uhr.
- (b) Die Polarkoodinaten des Vektors \vec{v} sind

$$r = |\vec{v}| = 440.04 \quad \varphi = \pi + \arctan\left(\frac{413.5}{-150.5}\right) = 1.91986 \quad (110^\circ)$$

- (c) Danach steht die Uhr beim Winkel $\varphi' = 110 - 50 = 60^\circ$, also bei 01:00 Uhr.
- (d) Die Polar-Koordinaten sind $r = 440$ und $\varphi' = 60^\circ$
- (e) Die kartesischen Koordinaten von \vec{v}' sind

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = 440.04 \cdot \begin{pmatrix} \cos(60^\circ) \\ \sin(60^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220.02 \\ 381.08 \end{pmatrix}$$