Test 1 Musterlösung

Klasse: 1Ea, 1Eb, 1Sb — Datum: 16. Oktober 2017

1. Transformationen — ZY7YMX

Es sei der Graph $f(x)$ grafisch gegeben (blau schraffiert). Zeichnen Sie unten die Graphen der weiteren Funktionen ein. *Beschriften* Sie die Graphen $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$ und $p(x)$ eindeutig.

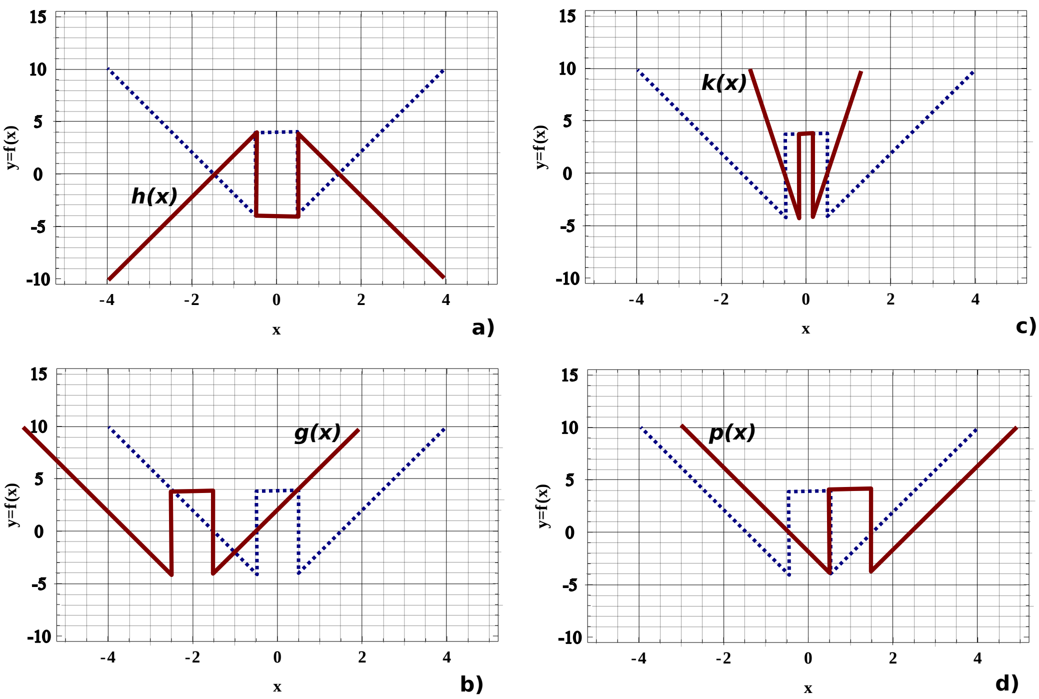
(a) $h(x) = -f(-x)$

(b) $g(x) = f(x+2)$

(c) $k(x) = f(3 \cdot x)$

(d) $p(x) = f(-x+1)$

Lösung:



2. Zwischenwinkel — 472DV5

Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und zwischen $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1480 \\ -470 \\ 2178 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a}\odot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{5366}{2\sqrt{1788746}\cdot\sqrt{6}}\right) = 35^\circ \quad [0.611174]$$

Der Vorfaktor von $\vec{c}$ kann weggelassen werden $\rightarrow$ $\vec{c}'$. Das Skalarprodukt $\vec{b}\odot\vec{c}'$ verschwindet, also

$$\varphi = 90^\circ$$

3. Lineare Abhängigkeit **LSP4JU**

Überprüfen Sie, ob die Vektoren linear abhängig sind. Bestimmen Sie wenn möglich die Linearkombination die den Nullvektor $\vec{0}$ ergibt.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}-1\\14\\0\end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix}2\\-38\\7\end{pmatrix},\ \vec{w} = \begin{pmatrix}-3\\82\\-28\end{pmatrix}$$

Lösung:
Wir schreiben die Vektoren untereinander auf und eliminieren zuerst in der x-Komponente:

$$\begin{array}{rlllcrlcllll}
\vec{u} = (-1 & 14 & 0) & & \vec{u} & = \vec{u} & = & (-1 & 14 & 0) \\
\vec{v} = (2 & -38 & 7) & \rightarrow & \vec{v}' & = \vec{v}+2\vec{u} & = & (0 & -10 & 7) \\
\vec{w} = (-3 & 82 & -28) & & \vec{w}' & = \vec{w}-3\vec{u} & = & (0 & 40 & -28)
\end{array}$$

$$\begin{array}{clclll}
 & \vec{u} & & = & (-1 & 14 & 0) \\
\rightarrow & \vec{v}' & & = & (0 & -10 & 7) \\
 & \vec{w}'' & = \vec{w}'+4\vec{v}' & = & (0 & 0 & 0)
\end{array}$$

Es ist also möglich, die Komponenten von Vektor $\vec{w}''$ ganz zu eliminieren. Die Vektoren sind komplanar.
Diese Linearkombination verfolgen wir nun rückwärts:

$$\vec{0} = \vec{w}'' = \vec{w}' + 4\vec{v}' = (\vec{w} - 3\vec{u}) + 4\cdot(\vec{v} + 2\vec{u}) = 5\vec{u} + 4\vec{v} + \vec{w}$$

4. Überlagerung gleichfrequenter cos- und sin-Schwingungen **SGNHEO**

Zerlegen Sie die Schwingung in gleichfrequente cos- und sin-Schwingungen

$$f(t) = 13\cdot\sin(\frac{\pi}{5}\cdot t - 1.17601) = a\cdot\cos(\omega\cdot t) + b\cdot\sin(\omega\cdot t)\ .$$

Geben Sie folgende Grössen an:

(a) Winkelfrequenz

(b) Periodenlänge

(c) Amplitude

(d) Phase

Lösung:

(a) $\omega = \frac{\pi}{5}$

(b) $T = \frac{2\pi}{\pi/5} = 10$

(c) $A = 13$

(d) $\varphi = -1.17601$

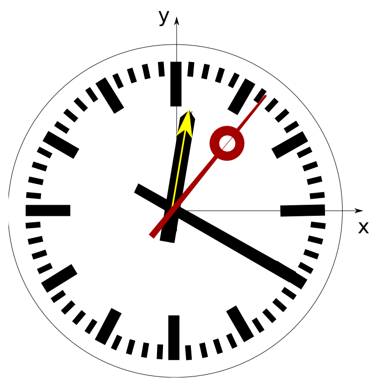
$$\begin{aligned} a &= A\sin(\varphi) = 12 \\ b &= A\cos(\varphi) = -5 \end{aligned}$$

Wir können also schreiben

$$f(t) = 12 \cdot \cos(\frac{\pi}{5} \cdot t) - 5 \cdot \sin(\frac{\pi}{5} \cdot t) .$$

5. Polarkoordinaten **9TGS9V**

Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 76.4 \\ 433.32 \end{pmatrix}$ ist an die Spitze des Stundenzeigers geklebt (gelb eingezeichnet). Wir betrachten in dieser Aufgabe nur Stunden und Minuten — aber keine Sekunden.



(a) Wie spät ist es gemäss der Uhr?

(b) Geben Sie die Polarkoodinaten des Vektors $\vec{v}$ an.

Drehen Sie in Gedanken den Stundenzeiger um $50°$ im Uhrzeiger-Sinn weiter: $\vec{v} \to \vec{v}'$. Passen Sie in Gedanken auch die Position des Minutenzeigers an.

(c) Welche Uhrzeit zeigt die Uhr jetzt an?

(d) Geben Sie die neuen Polar-Koordinaten von $\vec{v}'$ an.

(e) Geben Sie die neuen kartesischen Koordinaten von $\vec{v}'$ an.

Lösung:

(a) Es ist 12:20 Uhr.

(b) Die Polarkoodinaten des Vektors $\vec{v}$ sind

$$r = |\vec{v}| = 440.0 \; \varphi = \arctan(\frac{433.32}{76.4}) = 80^\circ$$

(c) Danach steht die Uhr beim Winkel $\varphi' = 80 - 50 = 30^\circ$, also bei 02:00 Uhr.

(d) Die Polar-Koordinaten sind $r = 440$ und $\varphi' = 30^\circ$

(e) Die kartesischen Koordinaten von $\vec{v}'$ sind

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = 440 \cdot \begin{pmatrix} \cos(30^\circ) \\ \sin(30^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 381 \\ 220 \end{pmatrix}$$