Test 1 Musterlösung

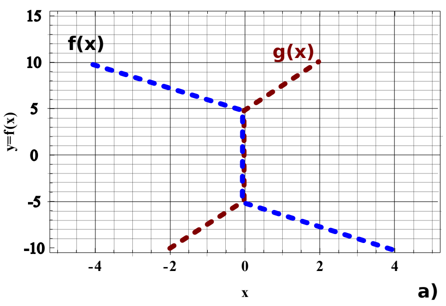
Klasse: 1Ea, 1Eb, 1Sb — Datum: 6. November 2017

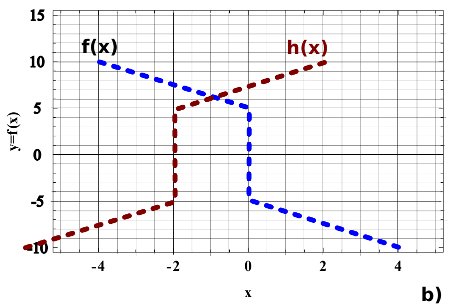
1. Transformationen **ZY7YMX**

Es sei der Graph $f(x)$ grafisch gegeben (blau schraffiert). Zeichnen Sie unten die Graphen der weiteren Funktionen ein. *Beschriften* Sie die Graphen $g(x)$, und $h(x)$ eindeutig.

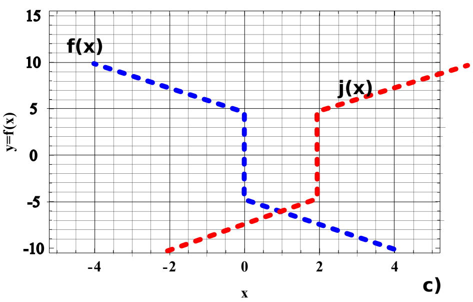
(a) $g(x) = f(-2 \cdot x)$ (b) $h(x) = -f(x + 2)$

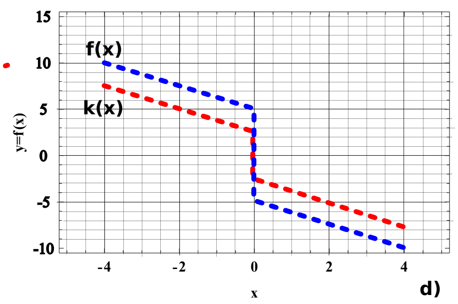
Lösung:





Geben Sie die Transformationen an:





(c) $j(x) = f(-x + 2)$ (d) $k(x) = \frac{1}{2} \cdot f(2 \cdot x)$

2. Zwischenwinkel **482DV5**

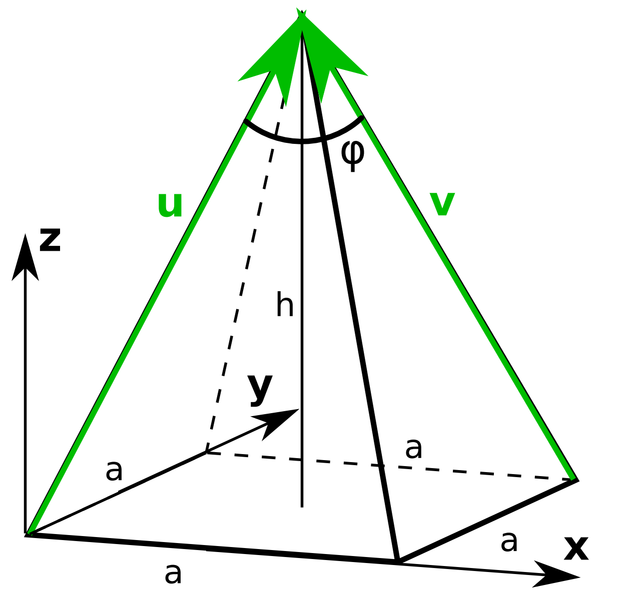
$$a = 19464,\ h = 18943$$

(a) Zeichnen Sie ein Kooridnatensystem ein (drei Koordinaten-Achsen, die senkrecht zueinander stehen).

(b) Geben Sie in diesem Koordinatensystem die Komponenten der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ an.

(c) Berechnen Sie den Zwischenwinkel φ.

Lösung:



(a) Zeichnen Sie ein Kooridnatensystem ein (drei Koordinaten-Achsen, die senkrecht zueinander stehen).

(b) Die Vektoren sind:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a/2 \\ a/2 \\ h \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} -a/2 \\ -a/2 \\ h \end{pmatrix}$$

(c) Wir setzen die Komponenten ein und erhalten

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{u} \odot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right) = \arccos\left(\frac{169413601}{\sqrt{548260897} \cdot \sqrt{548260897}}\right) = 72^\circ \quad [1.25665]$$

3. Lineare Abhängigkeit LSP4JU

Überprüfen Sie, ob die Vektoren linear abhängig sind. Bestimmen Sie wenn möglich die Linearkombination die den Nullvektor $\vec{0}$ ergibt.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -25 \end{pmatrix},\ \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ -30 \end{pmatrix},\ \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 54 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Wir schreiben die Vektoren untereinander auf und eliminieren zuerst in der x-Komponente:

$$\left|\begin{array}{ll} \vec{u} & = (-1 \quad 6 \quad 15) \\ \vec{v} & = (2 \quad 12 \quad -25) \\ \vec{w} & = (2 \quad 12 \quad -30) \\ \vec{a} & = (-1 \quad 54 \quad 10) \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{llll} \vec{u}' & = \vec{u} & = & (-1 \quad 6 \quad 15) \\ \vec{v}' & = \vec{v} + 2\vec{u} & = & (0 \quad 24 \quad 5) \\ \vec{w}' & = \vec{w} + 2\vec{u} & = & (0 \quad 24 \quad 0) \\ \vec{a}' & = \vec{a} - \vec{u} & = & (0 \quad 48 \quad -5) \end{array}\right|$$

$$\rightarrow \left|\begin{array}{llll} \vec{u}'' & = \vec{u}' & = & (-1 \quad 6 \quad 15) \\ \vec{v}'' & = \vec{v}' & = & (0 \quad 24 \quad 5) \\ \vec{w}'' & = \vec{w}' - \vec{v}' & = & (0 \quad 0 \quad -5) \\ \vec{a}'' & = \vec{a}' - 2\vec{v}' & = & (0 \quad 0 \quad -15) \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{llll} \vec{u}''' & = \vec{u}' & = & (-1 \quad 6 \quad 15) \\ \vec{v}''' & = \vec{v}'' & = & (0 \quad 24 \quad 5) \\ \vec{w}''' & = \vec{w}'' & = & (0 \quad 0 \quad -5) \\ \vec{a}''' & = \vec{a}'' - 3\vec{w}'' & = & (0 \quad 0 \quad 0) \end{array}\right|$$

Es ist also möglich, die Komponenten von Vektor $\vec{a}'''$ ganz zu eliminieren. Die Vektoren sind linear abhängig.
Diese Linearkombination verfolgen wir nun rückwärts:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{a}''' = \vec{a}'' - 3\vec{w}'' = \vec{a}' - 2\vec{v}' - 3 \cdot (\vec{w}' - \vec{v}') = \vec{a} - \vec{u} - 2(\vec{v} + 2\vec{u}) - 3 \cdot (\vec{w} + 2\vec{u} - (\vec{v} + 2\vec{u})) \\ &= \vec{a} - 5\vec{u} + \vec{v} - 3 \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

4. Überlagerung gleichfrequenter cos- und sin-Schwingungen SGNHEO

Schreiben Sie die Überlagerung mit einem Sinus-Term, einer Winkelfrequenz und einer Phasenverschiebung φ.

$$f(t) = 133 \cdot \cos(\frac{\pi}{3} \cdot t) - 156 \cdot \sin(\frac{\pi}{3} \cdot t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)\ .$$

Geben Sie dann folgende Grössen an:

(a) Winkelfrequenz

(b) Periodenlänge

(c) Amplitude

(d) Phase

Lösung:
Wir verwenden

$$A = \sqrt{133^2 + 156^2} = 205$$
$$\varphi = \arctan\left(\frac{-156}{133}\right) = -0.705981$$

also

$$f(t) = 205 \cdot \sin(\frac{\pi}{3} \cdot t - 0.705981)$$

und

(a) $\omega = \frac{\pi}{3}$
(b) $T = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6$
(c) $A = 205$
(d) $\varphi = -0.705981$ $(-40.45°)$

5. Polarkoordinaten **8TFS9W**

(a) Geben Sie die Polarkoordinaten von $\vec{u}$ an.
(b) Geben Sie die kartesischen Koordinaten von $\vec{v}$ an.
(c) Berechnen Sie die Grössen a und b.

$$a + b = 12.36\, m,\ c = 38.04\,\mathrm{m},\ |\vec{v}| = 2.48\,\mathrm{m},\ \varphi = 72°$$

Lösung:

(a) Die Polarkoordinaten von $\vec{u}$ sind

$$|\vec{v}| = \sqrt{(a+b)^2 + c^2} = 40,\ \alpha = \arctan(\frac{c}{a+b}) = 72°\ [1.257]$$

(b) Die kartesischen Koordinaten von $\vec{v}$ sind (mit $\theta = -90° - 72° = -162°$):

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \cdot |\vec{v}| = \begin{pmatrix} -2.35862 \\ -0.766362 \end{pmatrix}$$

(c) Es gilt $|-2.36| = 2.36 = b$ und $a = (a+b) - b = 12.36 - 2.36 = 10$.