Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Technik

Lineare Algebra
donat.adams@fhnw.ch
Institut für Geistes- und Naturwissenschaft

Test 1 Musterlösung

Name, Klasse: Semester: 1 Datum: 13. Oktober 2016

1. Orthonormalbasis (10)

Finden Sie einen Vektor $\vec{c}$, so dass $\left\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right\}$ eine rechtshändige Orthonormalbasis bilden.

$$\vec{a} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Lösung:

Die Richtung von $\vec{c}$ ergibt sich durch das Vektorprodukt $\vec{c}' = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$. Die Rechtshändigkeit ist durch das Vektorprodukt garantiert. Dieser Vektor kann noch normiert werden zu $\vec{c} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$.

2. Spurpunkte (10)

Berechnen Sie den Spurpunkt der Geraden $g : \vec{r} = \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ in der xz-Ebene. Wohin fällt der Spurpunkt unter der Spiegelung an der xy-Ebene?

Lösung:

Der Spurpunkt ergibt sich aus der Lösung der Gleichungen für die Komponenten

$$\begin{aligned} 1 + s &= x \\ 3 + s &= 0 \\ 3 - 3s &= z \end{aligned}$$

mit der Lösung $s = -3$ und $\vec{S} = \begin{pmatrix}-2\\0\\12\end{pmatrix}$. Die Spiegelung an der xy-Ebene überführt $\vec{S}$ in den Punkt $\vec{S}' = \begin{pmatrix}-2\\0\\-12\end{pmatrix}$.

3. Schnittpunkt von zwei Geraden (10)

Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes $\vec{S}$ der Geraden h (Steigung $m = -1$, y-Achsenabschnitt $c = 2$) und g:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:
h lautet in der Parameterform

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Beim Schnittpunkt gilt

$$\begin{array}{rrcrr} x: 2 & +\lambda \cdot 1 & = & 0+ & \mu \\ y: 1 & +\lambda \cdot 0 & = & 2 & -\mu \end{array}$$

Die zweite Gleichung gibt $\mu = 1$ also ist der Schnittpunkt bei $\vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Lot und Projektion (10)

Stellen Sie den Vektor $\vec{b}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2$ und $\vec{f}_3$ dar.

$$\left\{\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3\right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Es handelt sich um orthogonale Vektoren. Deshalb können die Komponenten durch Projektionen berechnet werden,

$$b_{1,F} = \vec{b} \odot \frac{\vec{f}_1}{\left|\vec{f}_1\right|^2} = \frac{2}{2} = 1 \ ,$$

$$b_{2,F} = \vec{b} \odot \frac{\vec{f}_2}{\left|\vec{f}_2\right|^2} = \frac{-10}{2} = -51$$

und

$$b_{3,F} = \vec{b} \odot \frac{\vec{f}_3}{\left|\vec{f}_3\right|^2} = \frac{9}{1} = 9$$

So ergibt sich

$$\vec{b} = 1\vec{f}_1 - 5\vec{f}_2 + 9\vec{f}_3 \ .$$

Kontrolle:

$$\vec{b} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 5 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} .$$

5. Vektorprodukt (10)
Entfällt

6. Zusatzaufgabe: Ebenengleichung (10)
Eine Ebene E enthält die Punkte $\vec{P} = (5, 2, -78)$, $\vec{Q} = (-5, 1, -102)$ und $\vec{R} = (35, 3, -6)$. Berechne die Ebenengleichung in Normalenform und die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. C

Lösung:
Der Normalenvektor der Ebene ergibt sich aus

$$\vec{n}' = (\vec{Q} - \vec{P}) \times (\vec{R} - \vec{P}) = \begin{pmatrix} -10 \\ -1 \\ -24 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 30 \\ 1 \\ 72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 + 24 \\ -720 + 720 \\ -10 + 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} .$$

Als Normalenvektor können wir jeden Vektor wählen, der zu $\vec{n}'$ kollinear ist z.B. $\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$. Die Ebenengleichung lautet also

$$E : \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -78 \end{pmatrix} \right] \odot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = 0$$

Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen haben die folgende Form:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} S_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \ \vec{S}' = \begin{pmatrix} 0 \\ S_y \\ 0 \end{pmatrix} , \ \vec{S}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ S_z \end{pmatrix}$$

Indem wir nun den Punkt $\vec{S}$ in die Ebenengleichung einsetzen erhalten wir

$$\left[\begin{pmatrix} S_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -78 \end{pmatrix} \right] \odot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = 0$$

Was sich nacheinander vereinfacht zu

$$\begin{pmatrix} S_x - 5 \\ -2 \\ +78 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = 12 \cdot (S_x - 5) - 5 \cdot 78 = 0$$

und also

$$12 S_x - 60 - 390 = 0 \ \Rightarrow \ S_x = \frac{450}{12} = 37.5 .$$

Also ist der Schnittpunkt mit der x-Achse bei

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 37.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Genau so ergibt sich auch $\vec{S}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -90 \end{pmatrix}$.

Beim Einsetzen von $\vec{S}'$ ergibt sich

$$[\begin{pmatrix} 0 \\ S_y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -78 \end{pmatrix}] \odot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ S_y - 2 \\ +78 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = -60 + 0 - 390 = 0$$

Diese Gleichung hat keine Lösung, da die Variable S_y wegen der Multiplikation mit 0 herausgefallen ist. Deshalb gibt es keinen Schnittpunkt mit der y-Achse. C