Lineare Algebra
donat.adams@fhnw.ch
Institut für Geistes- und Naturwissenschaft

Test 1 Musterlösung

Semester: 1 Datum: 21. Oktober 2016

1. Gauss-Verfahren (10) 091299

Bestimmen Sie, ob die nachfolgenden Vektoren linear abhängig sind. Falls ja, geben Sie die Linearkombination an, die $\vec{0}$ ergibt.
Lösung:
Wir teilen den Vektor $\vec{b}$ durch 8 und erhalten

$$\begin{array}{rlll} \vec{a}' = \frac{1}{8}\vec{b}: & (1 & -3 & 2) \\ \vec{b}' = \vec{a} & (5 & 7 & 4) \\ \vec{c}' = \vec{c}: & (-6 & -15 & -3) \end{array}$$

Jetzt eliminieren wir:

$$\begin{array}{rlll} \vec{a}'': & (1 & -3 & 2) \\ \vec{b}'' = \vec{b}' - 5\vec{a}': & (0 & 22 & -6) \\ \vec{c}'' = \vec{c}' + 6\vec{a}': & (0 & -33 & 9) \end{array}$$

Jetzt reskalieren wir die Vektoren

$$\begin{array}{rlll} \vec{a}''': & (1 & -3 & 2) \\ \vec{b}''' = \vec{b}''/2: & (0 & 11 & -3) \\ \vec{c}''' = \vec{c}''/3: & (0 & -11 & 3) \end{array}$$

Wir sehen, dass wir bei der Elimination der letzten Zeile den Nullvektor erhalten

$$\vec{0} = \vec{c}''' + \vec{b}''' \, .$$

Also sind die Vektoren linear abhängig.
Die Linearkombination ist

$$\vec{c}''' + \vec{b}''' = \vec{c}''/3 + \vec{b}''/2 = \frac{1}{3}(\vec{c}' + 6\vec{a}') + \frac{1}{2}(\vec{b}' - 5\vec{a}') = \frac{1}{3}(\vec{c} + \frac{6}{8}\vec{b}) + \frac{1}{2}(\vec{a} - \frac{5}{8}\vec{b})$$

also

$$(\frac{1}{2})\vec{a} + (\frac{6}{24} - \frac{5}{16})\vec{b} + (\frac{1}{3}\vec{c}) = \vec{0} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{16}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \vec{0}$$

2. Winkel zwischen Vektoren (10) 412379

(a) Welchen Winkel schliessen die Vektoren $\vec{q} = \vec{c} - \vec{b}$ und $\vec{r} = 6\vec{c} - 12\vec{b}$ ein?

(b) Welchen Winkel schliessen die Vektoren $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b}$ und $\vec{q} = \vec{c} - \vec{b}$ ein?

Lösung:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) $\varphi = \arccos \frac{\vec{q}\odot\vec{r}}{|\vec{q}|\cdot|\vec{r}|} = \arccos \frac{-6}{2\sqrt{2}\cdot 9} = 135°$

(b) $\vec{p} \odot \vec{q} = 0$ also $\varphi = 90°$

3. Schnittpunkt von zwei Geraden (10) **942572**

Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes $\vec{S}$ der Geraden h (Steigung $m = 9$, y-Achsenabschnitt $c = 34$) und g:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

h lautet in der Parameterform

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 34 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Beim Schnittpunkt gilt

$$\left| \begin{array}{cccccc} L_x: & -11 & +2\lambda & = & 0 & +\mu \\ L_y: & 3 & +\lambda & = & 34 & +9\mu \end{array} \right|$$

Wir eliminieren λ mit $L_x - 2L_y$:

$$-11 - 2\cdot 3 + (2-2)\lambda = (-2)\cdot 17 + (1 - 2\cdot 9)\mu \;\Rightarrow\; -17\mu = 51$$

also $\mu = -3$, und der Schnittpunkt ist bei

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 34 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

4. Lot und Projektion (10) **780793**

Stellen Sie den Vektor $\vec{b}$ als Linearkombination der orthogonalen Vektoren $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ und $\vec{f}_3$ dar.

$$\left\{\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3\right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Es handelt sich um orthogonale Vektoren. Deshalb können die Komponenten durch Projektionen berechnet werden,

$$b_{1,F} = \vec{b} \odot \frac{\vec{f}_1}{\left|\vec{f}_1\right|^2} = \frac{21}{3} = 7 ,$$

$$b_{2,F} = \vec{b} \odot \frac{\vec{f_2}}{\left|\vec{f_2}\right|^2} = \frac{0}{2} = 0$$

und

$$b_{3,F} = \vec{b} \odot \frac{\vec{f_3}}{\left|\vec{f_3}\right|^2} = \frac{-6}{6} = -1$$

So ergibt sich

$$\vec{b} = 7\vec{f_1} + 0\vec{f_2} - 1\vec{f_3}\ .$$

5. Ebenengleichung (10) **020737**

Eine Ebene E enthält die Punkte $\vec{P}$, $\vec{Q}$ und $\vec{R}$. Berechne die Ebenengleichung in Normalenform und den Schnittpunkt mit der x-Achse.

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix},\ \vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{R} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Der Normalenvektor der Ebene ergibt sich aus

$$\vec{n}' = (\vec{R} - \vec{P}) \times (\vec{R} - \vec{Q}) = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 12 \\ -(-12 - 0) \\ -9 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix}\ .$$

Als Normalenvektor können wir jeden Vektor wählen, der zu $\vec{n}'$ kollinear ist z.B. $\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Die Ebenengleichung lautet also

$$E:\ [\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}] \odot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen haben die folgende Form:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} S_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{S}' = \begin{pmatrix} 0 \\ S_y \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{S}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ S_z \end{pmatrix}$$

Indem wir nun den Punkt $\vec{S}$ in die Ebenengleichung einsetzen erhalten wir

$$[\begin{pmatrix} S_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}] \odot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

Was sich nacheinander vereinfacht zu

$$\begin{pmatrix} S_x + 6 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = -4 \cdot (S_x + 6) + 0 + (-12) \cdot (-3) = 0$$

und also

$$-4S_x - 24 + 36 = 0 \;\Rightarrow\; S_x = \frac{12}{4} = 3\ .$$

Also ist der Schnittpunkt mit der x-Achse bei

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$