Test 2 Musterlösung

Klasse: 1Ea, 1Eb, 1Sb Datum: 4. Dezember 2017

1. Gleichungssystem 71H1ZL

Berechne die Schnittpunkte der Geraden g und der Hyperbel k in der Ebene. Gibt die Schnittpunkte als Spaltenvektoren an.
g geht durch die Punkte $\vec{P} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, und k ist gegeben durch

$$k:\ y^2 - x^2 - \frac{10 \cdot x}{3} + \frac{13}{3} = 0$$

Lösung:

```
>> syms   m c   x y
>> S=solve(c+m*(-2)==-5,c+m*(4)==5)
>> k=[S.m S.c]
k = [ 5/3 -5/3  ]
>> P=solve(y^2-x^2-(10*x)/3+13/3 ==0 ,y==5/3*x-5/3);
>> lsx=P.x
 lsx =
 [ 1 4 ]
>> lsy=P.y
 lsy =
 [ 0 5 ]
```

Es gibt zwei Schnittpunkte $\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. Lineare Abbildungen 624MDY

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen L linear/nicht linear sind und geben Sie (falls möglich) die entsprechende Darstellung als Matrix in der Standard-Basis an.

(a) $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch

$$L(x, y, z) = 5x - y + 1$$

(b) $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot x \\ \sin(\varphi) \cdot y \end{pmatrix}$$

und $\varphi \in \mathbb{R}$

(c) $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch das Skalarprodukt $\vec{v} \odot \vec{v}$

$$L(\vec{v}) = \vec{v} \odot \vec{v}\ .$$

(d) $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$L(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \vec{v} \odot \vec{c} \\ \vec{c} \odot \vec{v} \end{pmatrix} .$$

mit $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} \odot \vec{c}$ ist das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{c}$.

Lösung:

(a) $L(0,0,0) = 1$. Die Abbildung ist nicht linear.

(b) Homogenität

$$L(\lambda x, \lambda y) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot (\lambda x) \\ \sin(\varphi) \cdot (\lambda y) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot x \\ \sin(\varphi) \cdot y \end{pmatrix} = L(x, y)$$

Additivität

$$\begin{aligned} L(x+v, y+w) = & \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot (x+v) \\ \sin(\varphi) \cdot (y+w) \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot x \\ \sin(\varphi) \cdot y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot v \\ \sin(\varphi) \cdot w \end{pmatrix} = \quad = L(x,y) + L(v,w) \end{aligned}$$

Matrix der Abbildung

$$\mathbf{M} = \big(L(1,0), L(0,1)\big) = [\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot 1 \\ \sin(\varphi) \cdot 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cdot 0 \\ \sin(\varphi) \cdot 1 \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

(c) Die Abbildung erfüllt $L(\vec{0}) = 0$. Homogenität:

$$L(\lambda \cdot \vec{v}) = (\lambda \vec{v}) \odot (\lambda \vec{v}) = \lambda^2 (\vec{v} \odot \vec{v}) \neq \lambda \cdot \vec{v} \odot \vec{v}$$

Die Abbildung ist nicht homogen, also auch nicht linear.

(d) Die Abbildung erfüllt $L(\vec{0}) = \vec{0}$. **Homogenität:**

$$\begin{aligned} L(\lambda \cdot \vec{v}) &= \begin{pmatrix} \lambda \cdot \vec{v} \odot \vec{c} \\ \lambda \cdot \vec{c} \odot \vec{v} \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \vec{v} \odot \vec{c} \\ \vec{c} \odot \vec{v} \end{pmatrix} \\ = \lambda \cdot L(\vec{v}) \end{aligned}$$

Additivität:

$$\begin{aligned} L(\vec{v} + \vec{w}) &= \begin{pmatrix} (\vec{v} + \vec{w}) \odot \vec{c} \\ \vec{c} \odot (\vec{v} + \vec{w}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{v} \odot \vec{c} + \vec{w} \odot \vec{c} \\ \vec{c} \odot \vec{v} + \vec{c} \odot \vec{w} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \vec{v} \odot \vec{c} \\ \vec{c} \odot \vec{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{w} \odot \vec{c} \\ \vec{c} \odot \vec{w} \end{pmatrix} = L(\vec{v}) + L(\vec{w}) \end{aligned}$$

Die Abbildung ist homogen und additiv also auch linear. Die Matrix der Abbildung ist:

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

und ergibt sich aus den Bildern der Basisvektoren:

$$\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \odot \vec{c} \\ \vec{c} \odot \vec{e}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0) \odot (5,2) \\ (5,2) \odot (1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{e}_2' = \begin{pmatrix} \vec{e}_2 \odot \vec{c} \\ \vec{c} \odot \vec{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1) \odot (5,2) \\ (5,2) \odot (0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Lineares Gleichungssystem **815482**

Bestimme die Lösungsmenge des folgendes linearen Gleichungssystems in den 5 Unbekannten x, y, z, v und w. Gib die Lösung in Parameterform an.

$$\begin{aligned} x + 2z + 3v &= 0 \\ 104x + y + 210z + 315v &= 0 \end{aligned}$$

Lösung:

Das Gleichung-System ist homogen und hat 2 Gleichungen und 5 Unbekannte, also können zwei Parameter frei gewählt werden. In der erweiterten Matrix-Schreibweise (geordnet nach x, y, z, v, w) schreiben wir:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 104 & 1 & 210 & 315 & 0 \end{array}\right]$$

Wir führen folgende Elimination durch:

$$\left[\begin{array}{rccccc} L_1' = L_1: & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ L_2' = L_2 - 104L_1: & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

Dies ist die Zeilenstufenform und wir erkennen die freien Parameter z, w und v und die Pivot-Variablen x und y. Wir setzen $z = 1$ ($w = 0$ und $v = 0$):

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1x & & +2 & +0 & +0 & = & 0 \\ & 1y & +2 & +0 & +0 & = & 0 \end{array}\right]$$

daraus folgt

$$y = -2 \; x = -2 \;\rightarrow\; \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um einen zweiten Richtugnsvektor zu bestimmen setzen wir $w = 1$ ($z = 0$ und $v = 0$):

$$\left[\begin{array}{cccccc} x & & +0 & +0 & = & 0 \\ & y & +0 & +0 & = & 0 \end{array}\right]$$

daraus folgt

$$x = 0,\ y = 0; \rightarrow\ \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Um einen dritten Richtugnsvektor zu bestimmen setzen wir $v = 1$ ($z = 0$ und $w = 0$):

$$\begin{bmatrix} x & +0 & +0 & +3 & +0 & = & 0 \\ & y & +0 & +3 & +0 & = & 0 \end{bmatrix}$$

daraus folgt

$$x = -3,\ y = -3; \rightarrow\ \vec{t} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$\vec{l} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Matrix einer Abbildung **261428**

Bestimme die Matrix der Projektion auf die Gerade

$$g : y = -10x$$

und projeziere damit die Ecken des Dreiecks $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ auf g.

Vorgehen:

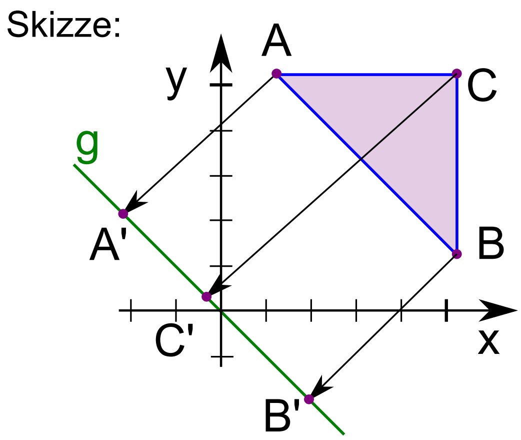
(a) Bilder der Basisvektoren bestimmen (Basisvektoren in der Standart-Basis)

(b) Matrix der Abbildung bestimmen

(c) Bilder der Punkte berechnen **(runden)**.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -584 \\ 184 \end{pmatrix},\ \vec{B} = \begin{pmatrix} 294 \\ 494 \end{pmatrix},\ \vec{C} = \begin{pmatrix} -448 \\ -368 \end{pmatrix}$$

Lösung:



Achtung: Die Skizze ist nicht massstäblich.

Die Bilder der der Basisvektoren berechnen wir mit der Projektion auf den Vektor $\vec{n}' = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$, der senkrecht auf der Geraden steht.

$$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 - (\vec{e}_1 \cdot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|}) \cdot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} = \frac{1}{101} \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{e}_2' = \vec{e}_2 - (\vec{e}_2 \cdot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|}) \cdot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} = \frac{1}{101} \begin{pmatrix} -10 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Die Transformationsmatrix ist deshalb also

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.009901 & -0.09901 \\ -0.09901 & 0.9901 \end{pmatrix}$$

Die Bildpunkte sind demnach

$$\vec{A}' = \mathbf{P}\vec{A} = \begin{pmatrix} -24 \\ 240 \end{pmatrix}, \vec{B}' = \mathbf{P}\vec{B} = \begin{pmatrix} -46 \\ 460 \end{pmatrix}, \vec{C}' = \mathbf{P}\vec{C} = \begin{pmatrix} 32 \\ -320 \end{pmatrix} .$$

5. Parallelogramm **0T2P3E**

Die Seiten des Parallelogramms p liegen auf den Geraden g bis k

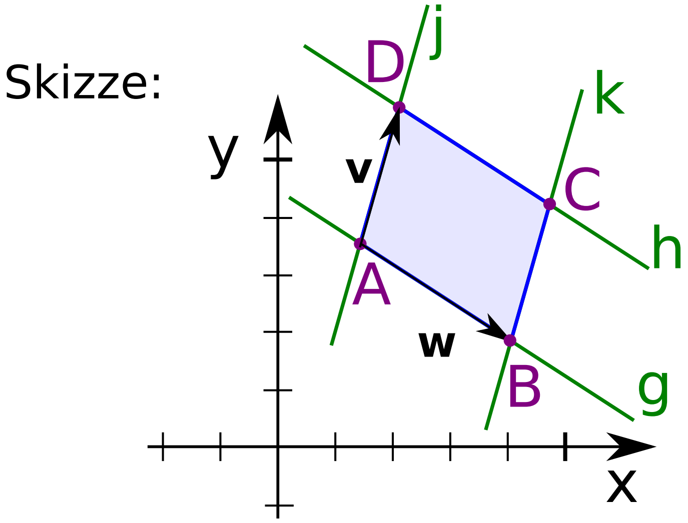
$$\begin{aligned} g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \\ h: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \\ j: \quad y &= -7 + 5x \\ k: \quad y &= -26 + 5x \end{aligned}$$

wobei $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

(a) Geben Sie die vier Ecken des Parallelogramms an.

(b) Berechnen Sie die Fläche des Parallelogramms.

Lösung:



Wir sehen anhand der Richtungsvektoren, dass g und h parallel verlaufen und j und k ebenfalls parallel sind (gleiche Steigung).
Wir bestimmen die Koordinatengleichung der Geraden g und h

$$g: y = \frac{17}{3} - \frac{4}{3} \cdot x \text{ und } h: y = 4 - \frac{4}{3}x$$

So können wir die Schnittpunkte berechnen:

$$\begin{array}{lrcll}
j \wedge g: & -7+5x & = & \frac{17}{3} - \frac{4}{3} \cdot x & \Rightarrow & x = 2;\ y(2) = 3 \\
j \wedge h: & -7+5x & = & 4 - \frac{4}{3}x & \Rightarrow & x = \frac{33}{19};\ y(\frac{33}{19}) = \frac{32}{19} \\
k \wedge g: & -26+5x & = & \frac{17}{3} - \frac{4}{3} \cdot x & \Rightarrow & x = 5;\ y(5) = -1 \\
k \wedge h: & -26+5x & = & 4 - \frac{4}{3}x & \Rightarrow & x = \frac{90}{19};\ y(\frac{90}{19}) = -\frac{44}{19}
\end{array}$$

Wir benennen die Schnittpunkte gemäss der Skizze

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{D} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 33 \\ 32 \end{pmatrix},\ \vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{C} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 90 \\ -44 \end{pmatrix}$$

Die Verbindungsvektoren sind

$$\vec{v} = \vec{D} - \vec{A} = -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} 5 \\ 25 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{w} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Die Fläche des Parallelogramms ist

$$A = |-\frac{1}{19}\begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}| = |-\frac{1}{19}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -20-75 \end{pmatrix}| = 5$$