Test 2

Klasse: 1Ea, 1Eb, 1Sb   Datum: 4. Dezember 2017

1	2	3	4	5	Total	Note	Note lalg1

Zeit: 60 min. Max. 50 Punkte. Lösung *nicht* mit Bleistift, Lösungsweg muss ersichtlich sein! Zugelassen: handgeschriebene Zusammenfassung (2 Seiten, einseitig A4) und Taschenrechner ohne Speicher.

1. Gleichungssystem (8)

Berechne die Schnittpunkte der Geraden g und der Hyperbel k in der Ebene. Gibt die Schnittpunkte als Spaltenvektoren an.
g geht durch die Punkte $\vec{P} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, und k ist gegeben durch

$$k: \; y^2 - x^2 - \frac{10 \cdot x}{3} + \frac{13}{3} = 0$$

2. Lineare Abbildungen (12)

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen L linear/nicht linear sind und geben Sie (falls möglich) die entsprechende Darstellung als Matrix in der Standard-Basis an.

(a) $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch

$$L(x, y, z) = 5x - y$$

(b) $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x) \cdot \varphi \\ \sin(y) \cdot \varphi \end{pmatrix}$$

und $\varphi \in \mathbb{R}$

(c) $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$L(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \vec{v} \odot \vec{c} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

mit $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, dabei ist $\vec{v} \odot \vec{c}$ das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{c}$.

(d) $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch das Skalarprodukt $\vec{v} \odot \vec{v}$

$$L(\vec{v}) = \vec{v} \odot \vec{v} .$$

3. Lineares Gleichungssystem (10)

Bestimme die Lösungsmenge des folgendes linearen Gleichungsystems in den 4 Unbekannten x, y, z und v. Gib die Lösung in Parameterform an.

$$\begin{array}{rcl} 4 + x + 2y + 3z & = & 0 \\ 403 + 100x + 200y + 301z + 2v & = & 0 \\ 22 + 5x + 10y + 15z + v & = & 0 \end{array}$$

4. Matrix einer Abbildung (10)

Bestimme die Matrix der Projektion auf die Gerade

$$g : y = -10x$$

und projeziere damit die Ecken des Dreiecks $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ auf g.

Vorgehen:

(a) Bilder der Basisvektoren bestimmen (Basisvektoren in der Standart-Basis)

(b) Matrix der Abbildung bestimmen

(c) Bilder der Punkte berechnen **(runden)**.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -584 \\ 184 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 294 \\ 494 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} -448 \\ -368 \end{pmatrix}$$

5. Parallelogramm (10)

Die Seiten des Parallelogramms p liegen auf den Geraden g bis k

$$\begin{array}{rccc} g: & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \\ h: & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \\ j: & y & = & -7 + 5x \\ k: & y & = & -26 + 5x \end{array}$$

wobei $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

(a) Geben Sie die vier Ecken des Parallelogramms an.

(b) Berechnen Sie die Fläche des Parallelogramms.