Test 2 Musterlösung

Klasse: 1Ea, 1Eb, 1Sb Datum: 4. Dezember 2017

1. Gleichungssystem 71H1ZL

Berechne die Schnittpunkte der Geraden g und der Hyperbel k in der Ebene. Gibt die Schnittpunkte als Spaltenvektoren an.
g geht durch die Punkte $\vec{P} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, und k ist gegeben durch

$$k:\ y^2 - x^2 - \frac{10 \cdot x}{3} + \frac{13}{3} = 0$$

Lösung:

```
>> syms   m c   x y
>> S=solve(c+m*(-2)==-5,c+m*(4)==5)
>> k=[S.m S.c]
k = [ 5/3 -5/3  ]
>> P=solve(y^2-x^2-(10*x)/3+13/3 ==0 ,y==5/3*x-5/3);
>> lsx=P.x
  lsx =
  [ 1 4 ]
>> lsy=P.y
  lsy =
  [ 0 5 ]
```

Es gibt zwei Schnittpunkte $\vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. Lineare Abbildungen B24MDY

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen L linear/nicht linear sind und geben Sie (falls möglich) die entsprechende Darstellung als Matrix in der Standard-Basis an.

(a) $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch

$$L(x, y, z) = 5x - y$$

(b) $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(x) \cdot \varphi \\ \sin(y) \cdot \varphi \end{pmatrix}$$

und $\varphi \in \mathbb{R}$

(c) $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$L(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \vec{v} \odot \vec{c} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

mit $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, dabei ist $\vec{v} \odot \vec{c}$ das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{c}$.

(d) $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch das Skalarprodukt $\vec{v} \odot \vec{v}$

$$L(\vec{v}) = \vec{v} \odot \vec{v} .$$

Lösung:

(a) Test: $L(0, 0, 0) = 0$
Homogenität:

$$L(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y, \lambda \cdot z) = 5\lambda \cdot x - \lambda \cdot y = \lambda \cdot (5x - \cdot y) = \lambda \cdot L(x, y, z)$$

Additivität:

$$L(x+a, y+b, z+c) = 5(x+a)-(y+c) = 5x-y+5a-c = L(x, y, z)+L(a, b, c)$$

(b) Test:

$$L(0, 0) = \begin{pmatrix} \cos(0) \cdot \varphi \\ \sin(0) \cdot \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

Abbildung ist nicht linear.

(c) Test:

$$L(\vec{0}) = \begin{pmatrix} \vec{0} \odot \vec{c} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Homogenität:

$$L(\lambda \cdot \vec{v}) = \begin{pmatrix} \lambda \cdot \vec{v} \odot \vec{c} \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \vec{v} \odot \vec{c} \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \cdot L(\vec{v})$$

Additivität:

$$L(\vec{v} + \vec{w}) = \begin{pmatrix} (\vec{v} + \vec{w}) \odot \vec{c} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v} \odot \vec{c} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{w} \odot \vec{c} \\ 0 \end{pmatrix} = L(\vec{v}) + L(\vec{w})$$

(d) Test: $L(\vec{0}) = \vec{0} \odot \vec{0} = 0$
Homogenität:

$$L(\lambda \cdot \vec{v}) = (\lambda \cdot \vec{v}) \odot (\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda^2 \cdot (\vec{v} \odot \vec{v}) \neq \lambda \cdot (\vec{v} \odot \vec{v}) .$$

Diese Abbildung ist nicht linear.

3. Lineares Gleichungssystem **B15482**

Bestimme die Lösungsmenge des folgendes linearen Gleichungssystems in den 4 Unbekannten x, y, z und v. Gib die Lösung in Parameterform an.

$$\begin{aligned} 4 + x + 2y + 3z &= 0 \\ 403 + 100x + 200y + 301z + 2v &= 0 \\ 22 + 5x + 10y + 15z + v &= 0 \end{aligned}$$

Lösung:
Das Gleichung-System ist homogen und hat 3 Gleichungen und 4 Unbekannte, also können wir einen Parameter frei gewählt werden. In der erweiterten Matrix-Schreibweise (geordnet nach x, y, z, v) schreiben wir:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & -4 \\ 100 & 200 & 301 & 2 & -403 \\ 5 & 10 & 15 & 1 & -22 \end{array}\right]$$

Wir führen folgende Elimination durch:

$$\left[\begin{array}{lcccc|c} L_1' = L_1 : & 1 & 2 & 3 & 0 & -4 \\ L_2' = L_2 - 10L_1 : & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ L_3' = L_3 - 54L_1 : & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Dies ist die Zeilenstufenform und wir erkennen den freien Parameter y, und die Pivot-Variablen x, z und v.

Wir bestimmen zuerst den Richtungvektor: Dafür setzen wir $y = 1$ und lösen die homogene Gleichung:

$$\left[\begin{array}{lllll} 1x & +2 & +3z & & = 0 \\ & & z & +2v & = 0 \\ & & & 1v & = 0 \end{array}\right]$$

daraus folgt

$$v = 0,\ z = 0,\ x = -2\ \rightarrow\ \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jetzt bestimmen wir noch den Aufpunkt. Dazu können wir wählen $y = 0$, dann bleibt noch

$$\left[\begin{array}{lll|l} 1x & +3z & & = -4 \\ & 1z & +2v & = -3 \\ & & 1v & = -2 \end{array}\right]$$

daraus folgt

$$v = -2,\ z = 3 + 4 = 1,\ x = -4 - 3 = -7\ \rightarrow\ \vec{A} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung ist

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Matrix einer Abbildung **261428**

Bestimme die Matrix der Projektion auf die Gerade

$$g : y = -10x$$

und projeziere damit die Ecken des Dreiecks $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ auf g.

Vorgehen:

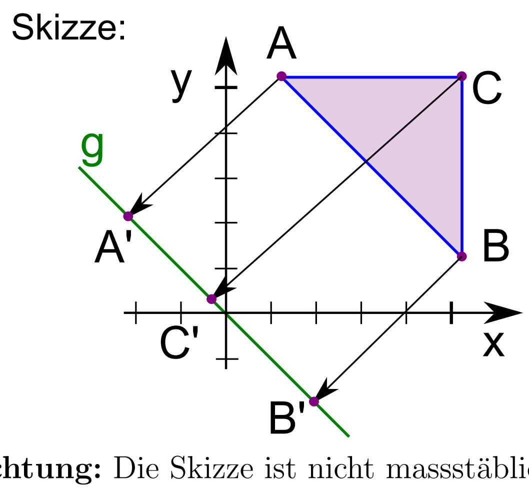
(a) Bilder der Basisvektoren bestimmen (Basisvektoren in der Standart-Basis)

(b) Matrix der Abbildung bestimmen

(c) Bilder der Punkte berechnen **(runden)**.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -584 \\ 184 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 294 \\ 494 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} -448 \\ -368 \end{pmatrix}$$

Lösung:



Achtung: Die Skizze ist nicht massstäblich.

Die Bilder der der Basisvektoren berechnen wir mit der Projektion auf den Vektor $\vec{n}' = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$, der senkrecht auf der Geraden steht.

$$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 - (\vec{e}_1 \cdot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|}) \cdot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} = \frac{1}{101} \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{e}_2' = \vec{e}_2 - (\vec{e}_2 \cdot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|}) \cdot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} = \frac{1}{101} \begin{pmatrix} -10 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Die Transformationsmatrix ist deshalb also

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.009901 & -0.09901 \\ -0.09901 & 0.9901 \end{pmatrix}$$

Die Bildpunkte sind demnach

$$\vec{A}' = \mathbf{P}\vec{A} = \begin{pmatrix} -24 \\ 240 \end{pmatrix}, \vec{B}' = \mathbf{P}\vec{B} = \begin{pmatrix} -46 \\ 460 \end{pmatrix}, \vec{C}' = \mathbf{P}\vec{C} = \begin{pmatrix} 32 \\ -320 \end{pmatrix}.$$

5. Parallelogramm **0T2P3E**

Die Seiten des Parallelogramms p liegen auf den Geraden g bis k

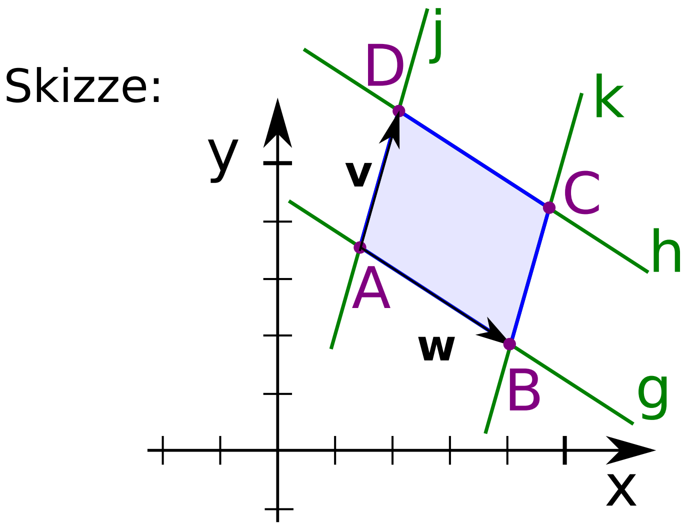
$$\begin{aligned} g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \\ h: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \\ j: \quad y &= -7 + 5x \\ k: \quad y &= -26 + 5x \end{aligned}$$

wobei $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

(a) Geben Sie die vier Ecken des Parallelogramms an.

(b) Berechnen Sie die Fläche des Parallelogramms.

Lösung:



Wir sehen anhand der Richtungsvektoren, dass g und h parallel verlaufen und j und k ebenfalls parallel sind (gleiche Steigung).
Wir bestimmen die Koordinatengleichung der Geraden g und h

$$g: y = \frac{17}{3} - \frac{4}{3} \cdot x \text{ und } h: y = 4 - \frac{4}{3}x$$

So können wir die Schnittpunkte berechnen:

$$\begin{array}{rrcccc}
j \wedge g: & -7+5x & = & \frac{17}{3}-\frac{4}{3}\cdot x & \Rightarrow & x=2;\ y(2)=3 \\
j \wedge h: & -7+5x & = & 4-\frac{4}{3}x & \Rightarrow & x=\frac{33}{19};\ y(\frac{33}{19})=\frac{32}{19} \\
k \wedge g: & -26+5x & = & \frac{17}{3}-\frac{4}{3}\cdot x & \Rightarrow & x=5;\ y(5)=-1 \\
k \wedge h: & -26+5x & = & 4-\frac{4}{3}x & \Rightarrow & x=\frac{90}{19};\ y(\frac{90}{19})=-\frac{44}{19}
\end{array}$$

Wir benennen die Schnittpunkte gemäss der Skizze

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ \vec{D}=\frac{1}{19}\begin{pmatrix}33\\32\end{pmatrix},\ \vec{B}=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix},\ \vec{C}=\frac{1}{19}\begin{pmatrix}90\\-44\end{pmatrix}$$

Die Verbindungsvektoren sind

$$\vec{v}=\vec{D}-\vec{A}=-\frac{1}{19}\begin{pmatrix}5\\25\end{pmatrix} \text{ und } \vec{w}=\vec{B}-\vec{A}=\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$$

Die Fläche des Parallelogramms ist

$$A=|-\frac{1}{19}\begin{pmatrix}5\\25\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}|=|-\frac{1}{19}\begin{pmatrix}0\\0\\-20-75\end{pmatrix}|=5$$