Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Technik

Lineare Algebra
donat.adams@fhnw.ch
Institut für Mathematik und Physik

Test 2, Musterlösung

Name, Klasse: Semester: 1 Datum: 14.12.2016

1. Teil ohne Matlab

1. Lineare Abbildungen (10)
Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen L linear/nicht linear sind und geben Sie (falls möglich) die entsprechende Darstellung als Matrix in der Standart-Basis an.

Lösung

(a) Homogenität

$$L(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 5(\lambda x) - (\lambda y) + 2(\lambda z) = \lambda(5x - y + 2z) = L(x, y, z)$$

Additivität

$$\begin{aligned} L(x+v, y+w, z+p) = &\quad 5(x+v) - (y+w) + 2(z+p) = 5x + 5v - y - w + 2z + 2p \\ = &\quad (5x - y + 2z) + (5v - w + 2p) = L(x, y, z) + L(v, w, p) \end{aligned}$$

Matrix der Abbildung

$$\mathbf{M} = \big(L(1,0,0), L(0,1,0), L(0,0,1)\big) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) $L(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Abbildung ist nicht linear.

2. Lineares Gleichungssystem **526984**

Bestimme die Lösungsmenge des folgendes linearen Gleichungsystems in den 5 Unbekannten x, y, z, v und w. Geben Sie die Lösungsmenge in Parameterform an.

$$\left| \begin{array}{rcl} x - z - 8w & = & 0 \\ -x + y + 3z + 15w & = & 0 \\ -x + 2z + 6w & = & 0 \end{array} \right|$$

Lösung:
Das Gleichung-System hat 3 Gleichungen und 5 Unbekannte, also können zwei Parameter frei gewählt werden. In der erweiterten Matrix-Schreibweise (geordnet nach x, y, z, v, w):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -8 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 15 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Wir führen folgende Elimination durch:

$$\begin{bmatrix} L_1' = L_1: & 1 & 0 & -1 & 0 & -8 \\ L_2' = L_2 + L_1: & 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ L_3' = L_3 + L_1: & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Dies ist die Zeilenstufenform und wir erkennen die freien Parameter v und w und die Pivot-Variablen x, y und z.
Für die erste homogene Lösungen setzen wir im homogenen LGS zuerst $v = 1$ ($w = 0$):

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} L_1' : & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ L_2' : & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ L_3' : & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Es folgt $x = y = z = 0$. Für die zweite homogene Lösungen setzen wir im homogenen LGS $w = 1$ ($v = 0$):

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r} L_1' : & 1 & 0 & -1 & 0 & -8 & 0 \\ L_2' : & 0 & 1 & 2 & 0 & 7 & 0 \\ L_3' : & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Es ergeben sich nacheinander

$$z = 2 \;\Rightarrow\; y = -2 \cdot 2 - 7 = -11 \Rightarrow\; x = 2 + 8 = 10\,.$$

Die Allgemeine Lösung ist also

$$\vec{x} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -11 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Effiziente Berechnung der Determinante **621453**

Berechnen Sie die Determinante effizient. Bringen Sie dazu die Matrix in Dreiecksform.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 15 & 33 & 51 \\ 1 & 5 & 11 & 22 \\ 2 & 10 & 23 & 39 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Beginn: Vorfaktor $f = 1$. Elimination:

$$\mathbf{R}' = \left[\begin{array}{lrrrr} Z_1' = Z_1 : & 1 & 4 & 6 & 6 \\ Z_2' = Z_2 - 3 \cdot Z_1 : & 0 & 3 & 15 & 33 \\ Z_3' = Z_3 - 2 \cdot Z_1 : & 0 & 1 & 5 & 16 \\ Z_4' = Z_4 - 2Z_1 : & 0 & 2 & 11 & 27 \end{array}\right]$$

Um weiter zu eliminieren, teilen wir die zweite Zeile durch 3

$$\mathbf{R}'' = \left[\begin{array}{lrrrr} Z_1'' = Z_1' : & 1 & 2 & 3 & 4 \\ Z_2'' = Z_2' \cdot \frac{1}{3} : & 0 & 1 & 5 & 11 \\ Z_3'' = Z_3' : & 0 & 1 & 5 & 16 \\ Z_4'' = Z_4' : & 0 & 2 & 11 & 27 \end{array}\right]$$

Dabei ändert sich der Vorfaktor: $f' = f \cdot \frac{1}{1/3} = 3$ Eliminieren:

$$\mathbf{R}''' = \begin{bmatrix} Z_1''' = Z_1'': & 1 & 4 & 6 & 6 \\ Z_2''' = Z_2'': & 0 & 1 & 5 & 11 \\ Z_3''' = Z_3'' - Z_2'': & 0 & 0 & 0 & 5 \\ Z_4''' = Z_4'' - 2Z_2'': & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Wir vertauschen die beiden letzten Zeilen, der Vorfaktor ändert sich $f'' = f' \cdot (-1) = -3$ und die Determinante kann aus den Diagonalelementen berechnet werden

$$\det(\mathbf{R}''') = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot f'' = -15$$

2. Teil mit Matlab

4. Matrix-Abbildung (10)

Die Spalten der Matrix $\mathbf{A} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ spannen ein Parallelepiped auf.

(a) Berechnen Sie den Normalenvektor der Fläche E_1 aufgespannt durch $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$.

(b) Berechnen Sie die den Schnittwinkel zwischen E_1 und der Fläche E_2 aufgespannt durch $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$.

(c) Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds.

Lösung

(a) Der Normalenvektor ergibt sich aus dem Kreuzprodukt $\vec{n}_1 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ -3\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2.45 \\ -4.24 \\ 3.46 \end{pmatrix}$. (Matlab-Befehl: `cross`)

(b) Der Winkel zwischen den Ebenen berechnet sich aus dem Schnittwinkel zwischen den Normalenvektoren. $\vec{n}_2 = \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{6} \\ 0 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Der Schnittwinkel ist dann

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{n}_1 \odot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

(c) $\det(\mathbf{A}) = 6\sqrt{6} \approx 14.70$

5. Gleichungssystem **056333**

Berechne die Schnittpunkte der Geraden g und des Kreises k in der Ebene. g geht durch die Punkte $\vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, und k ist gegeben durch

$$k: \ (x - 2.5)^2 + (y - 2.5)^2 = 12.5$$

Lösung

```
>> syms   m c   x y
>> S=solve(c+m*(2)==6,c+m*5==0)
>> k=[S.m S.c]
k = [ -2 10 ]
>> P=solve((x-2.5)^2+(y-2.5)^2==12.5),y==-2*x+10);
>> lsx=P.x
  lsx =
  [ 5 2 ]
>> lsy=P.y
  lsy =
  [ 0 6 ]
```

Es gibt zwei Schnittpunkte $\vec{R} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{S} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

6. Matrix einer Abbildung (10)
Bestimme die Matrix der Spiegelung an der Geraden

$$g : y = -10x$$

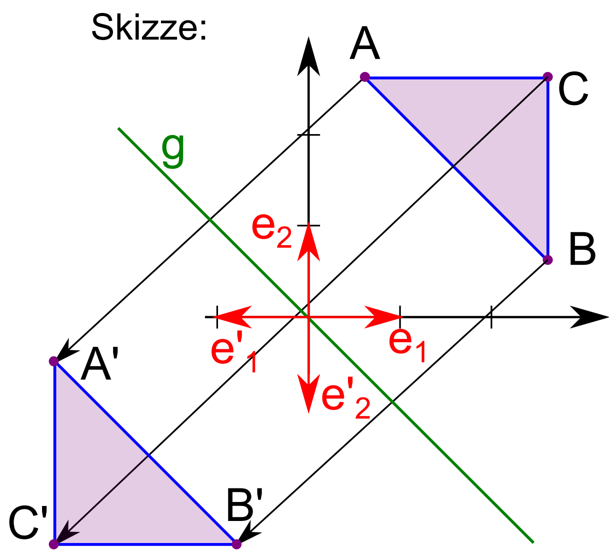
und spiegle damit die Ecken des Dreiecks $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ an g. Die Bildpunkte müssen einzeln als Spaltenvektoren angegeben werden.

Vorgehen:

(a) Bilder der Basisvektoren bestimmen
(b) Matrix der Abbildung bestimmen
(c) Bilder der Punkte berechnen **(Runden auf 2 Dezimalen)**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -1.97 \\ 4.7 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} -5.1 \\ -0.01 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} -7.07 \\ 4.69 \end{pmatrix}$$

Lösung



Achtung: Die Skizze ist nicht massstäblich.

Die Bilder der der Basisvektoren berechnen wir mit der Projektion auf den Vektor $\vec{n}' = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$, der senkrecht auf der Geraden steht.

$$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 - 2(\vec{e}_1 \cdot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|}) \cdot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} = \frac{1}{101} \begin{pmatrix} -99 \\ -20 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{e}_2' = \vec{e}_2 - 2(\vec{e}_2 \cdot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|}) \cdot \frac{\vec{n}'}{|\vec{n}'|} = \frac{1}{101} \begin{pmatrix} -20 \\ 99 \end{pmatrix}$$

Die Transformationsmatrix ist deshalb also

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -0.980 & -0.198 \\ -0.198 & 0.980 \end{pmatrix}$$

Die Bildpunkte sind demnach

$$\vec{A}' = \mathbf{S}\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{B}' = \mathbf{S}\vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{C}' = \mathbf{S}\vec{C} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} .$$