Fachhochschule Nordwestschweiz
Hochschule für Technik

Lineare Algebra
donat.adams@fhnw.ch
Institut für Mathematik und Physik

Test 2, Musterlösung

Name, Klasse: Semester: 1 Datum: 12.11.2016

1. Teil ohne Matlab

1. **Lineare Abbildungen** (10)
Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen L linear oder nicht linear sind und geben Sie (falls möglich) die entsprechende Darstellung als Matrix an (Basis: Standart-Basis).

(a) $L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definiert durch $L(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ -y + 2y \\ x + y \end{pmatrix}$

(b) $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definiert durch $L(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x \cdot y} \\ y \end{pmatrix}$

Lösung

(a) Zuerst wird der Ausdruck vereinfacht:

$$L(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x + y \end{pmatrix}$$

Homogenität:

$$L(\lambda\, x, \lambda\, y, \lambda\, z) = \begin{pmatrix} \lambda\, z \\ \lambda\, y \\ \lambda\, x + \lambda\, y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, z \\ \lambda\, y \\ \lambda\,(x + y) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z \\ y \\ x + y \end{pmatrix} = \lambda\, L(x, y, z)$$

Additivität:

$$\begin{aligned} L(x + x_0, y + y_0, z + z_0) &= \begin{pmatrix} z + z_0 \\ y + y_0 \\ (x + x_0) + (y + y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z \\ y \\ x + y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_0 \\ y_0 \\ x_0 + y_0 \end{pmatrix} = L(x, y, z) + L(x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

Die Abbildung ist linear und die Matrix lautet $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Die Abbildung ist nicht linear, z.B. die Homogenität ist nicht erfüllt:

$$L(\lambda\, x, \lambda\, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda\, x \cdot \lambda\, y} \\ \lambda\, y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\lambda| \sqrt{x \cdot y} \\ \lambda\, y \end{pmatrix}$$

2. Lineares Gleichungssystem (10)

Bestimme die Lösungsmenge des folgendes linearen Gleichungsystems in den 5 Unbekannten x, y, z, v und w.

$$\begin{array}{rcl} -x+z+8w & = & 0 \\ x+y+z-w & = & 0 \\ x-z+v-10w & = & 0 \end{array}$$

Lösung:

Das Gleichung-System hat 3 Gleichungen und 5 Unbekannte, also können zwei Parameter frei gewählt werden. In der erweiterten Matrix-Schreibweise (geordnet nach x, y, z, v, w):

$$\begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -10 \end{array}$$

Wir führen folgende Elimination durch:

$$\begin{array}{lccccc} L_1' = L_1: & -1 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ L_2' = L_2 + L_1: & 0 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ L_3' = L_3 + L_1: & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

Dies ist die Zeilenstufenform und wir erkennen die freien Parameter z und w und die Pivot-Variablen x, y und v.

Wir setzen $w = 1$ ($z = 0$) und setzen von unten nach oben ein:

$$v = 2 \cdot 1 = 2, \; y = -7 \cdot 1 = -7, \; x = \frac{-8 \cdot 1}{-1} = 8 \;\rightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun setzen wir $z = 1$ ($w = 0$) und setzen von unten nach oben ein:

$$v = 0, \; y = -2 \cdot 1 = -2, \; x = \frac{-1}{-1} = 1 \;\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Effiziente Berechnung der Determinante 020319

Berechnen Sie die Determinante effizient. Bringen Sie dazu die Matrix in Dreiecksform.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 15 & 21 \\ 1 & 3 & 5 & 12 \\ 2 & 6 & 11 & 17 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Beginn: Vorfaktor $f = 1$. Elimination:

$$\mathbf{R}' = \left[\begin{array}{lcccc} Z_1' = Z_1 : & 1 & 2 & 3 & 4 \\ Z_2' = Z_2 - 3 \cdot Z_1 : & 0 & 3 & 6 & 9 \\ Z_3' = Z_3 - 2 \cdot Z_1 : & 0 & 1 & 2 & 8 \\ Z_4' = Z_4 - 2Z_1 : & 0 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right]$$

Um weiter zu eliminieren, teilen wir die zweite Zeile durch 3

$$\mathbf{R}'' = \left[\begin{array}{lcccc} Z_1'' = Z_1' : & 1 & 2 & 3 & 4 \\ Z_2'' = Z_2' \cdot \frac{1}{3} : & 0 & 1 & 2 & 3 \\ Z_3'' = Z_3' : & 0 & 1 & 2 & 8 \\ Z_4'' = Z_4' : & 0 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right]$$

Dabei ändert sich der Vorfaktor: $f' = f \cdot \frac{1}{1/3} = 3$ Eliminieren:

$$\mathbf{R}''' = \left[\begin{array}{lcccc} Z_1''' = Z_1'' : & 1 & 2 & 3 & 4 \\ Z_2''' = Z_2'' : & 0 & 1 & 2 & 3 \\ Z_3''' = Z_3'' : & 0 & 0 & 0 & 5 \\ Z_4''' = Z_4'' - Z_2'' : & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Wir vertauschen die beiden letzten Zeilen, der Vorfaktor ändert sich $f'' = f' \cdot (-1) = -3$ und die Determinante kann aus den Diagonalelementen berechnet werden

$$\det(\mathbf{R}''') = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot f'' = -15$$

2. Teil mit Matlab

4. Matrix-Abbildung (10)

Die Spalten der Matrix $\mathbf{A} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ spannen ein Parallelepiped auf.

(a) Berechnen Sie den Normalenvektor der Fläche E_1 aufgespannt durch $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$.

(b) Berechnen Sie die den Schnittwinkel zwischen E_1 und der Fläche E_2 aufgespannt durch $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$.

(c) Berechnen Sie das Volumen des Parallelepipeds.

Lösung

(a) Der Normalenvektor ergibt sich aus dem Kreuzprodukt $\vec{n}_1 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ -3\sqrt{2} \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2.45 \\ -4.24 \\ 3.46 \end{pmatrix}$. (Matlab-Befehl: `cross`)

(b) Der Winkel zwischen den Ebenen berechnet sich aus dem Schnittwinkel zwischen den Normalenvektoren. $\vec{n}_2 = \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{6} \\ 0 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Der Schnittwinkel ist dann

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{n}_1 \odot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

(c) $\det(\mathbf{A}) = 6\sqrt{6} \approx 14.70$

5. Gleichungssystem (10)

Berechne die Schnittpunkte der Geraden g und des Kreise k. Geben Sie die Schnittpunkte als Spaltenvektoren an.

g geht durch die Punkte $\vec{P} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, und k ist gegeben durch

$$k:\ (-\frac{5}{2} + x)^2 + (\frac{1}{2} + y)^2 = \frac{25}{2}$$

Lösung

```
>> syms   m c  x y
>> S=solve(' c+m*(-1)=(-1)','c+m*( 1)=(2)',  'm,c')
>> k=[S.c S.m   ]
k = [ - 3/2  -1/2 ]
>> P=solve(char(k(1)+k(2)*x=y),'(-5/2 + x)^2+(1/2+y)^2=
     25/2','x,y');
>> lss=[P.x P.y ]
  lss =
  [ -1  -1]
  [ 21/5 -18/5]
% Es gibt zwei Schnittpunkte  [-1 -1 ]
% und [4.2,  -3.6]
```

Der Befehl `char` verwandelt den Ausdruck, der die Symbole `x` und `y` enthält in einen String (Aneinanderreihung von Buchstaben).
Die Aufgabe kann auch ohne `char` gelöst werden, indem man von Hand die Werte von oben einsetzt.

6. Lineares Gleichungssystem **599144**

Prüfen Sie nach, welche der Vektoren Lösungen des des folgenden Gleichungssystems sind:

$$\begin{aligned} 3v+4w+9x-1y-6z &= -20 \\ 5v+2w+15x+3y+18z &= 4 \\ -2v+1w-6x+1y-2z &= -52 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie anschliessend die gesamte Lösungsmenge (in $\mathbb{R}^5$) des Gleichungssystems.

$$\begin{pmatrix} v\\ w\\ x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13\\ -17\\ 0\\ -9\\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11\\ -15\\ 0\\ -13\\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10\\ -17\\ 1\\ -9\\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\ -17\\ 4\\ -9\\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir benennen die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ und die Inhomogenität $\mathbf{b}$

Der angegebene Vektor $\vec{v}$ ist eine Lösung denn

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 & -1 & -6 \\ 5 & 2 & 15 & 3 & 18 \\ -2 & 1 & -6 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -20\\ 4\\ -52 \end{pmatrix}.$$

Die vorgeschlagenen Lösungen nummerieren wir von 1 bis 4. Dann ergibt sich

$$\mathbf{A} \odot \vec{v}_{(1)} - \vec{b} = \vec{0},\ \mathbf{A} \odot \vec{v}_{(2)} - \vec{b} = \vec{0},\ \mathbf{A} \odot \vec{v}_{(3)} - \vec{b} = \vec{0},\ \mathbf{A} \odot \vec{v}_{(4)} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -24\\ 72\\ -8 \end{pmatrix},$$

Das bedeutet, dass die ersten 3 Vektoren das Gleichungssystem erfüllen, der letzte aber nicht.
Um die allgemeine Lösung zu bestimmen, bringen wir die Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass die Zeilen linear unabhängig sind, d.h. es gibt 5 Unbekannte, 3 linear unabhängige Gleichungen also 2 Richtungsvektoren in der allgeminen Lösung. Wir Konstruieren die Lösung also folgendermassen:

$$\vec{l} = \vec{v}_{(1)} + \lambda_1 \cdot \left(\vec{v}_{(2)} - \vec{v}_{(1)}\right) + \lambda_2 \cdot \left(\vec{v}_{(3)} - \vec{v}_{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 13\\ -17\\ 0\\ -9\\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \left(\begin{pmatrix} 11\\ -15\\ 0\\ -13\\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13\\ -17\\ 0\\ -9\\ 0 \end{pmatrix} \right) + \lambda_2 \cdot \left(\begin{pmatrix} 10\\ -17\\ 1\\ -9\\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13\\ -17\\ 0\\ -9\\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 13 \\ -17 \\ 0 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$