Matrix-Inverse
Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$
und existiert $\mathbf{B}$ so dass $\mathbf{AB} = 1$
dann nennt man $\mathbf{B}$ die Inverse von $\mathbf{A}$
und schreibt $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$

Linksinverse/Rechtsinverse
Existiert $\mathbf{A}^{-1}$, so gilt
$\mathbf{A}^{-1} \odot \mathbf{A} = \mathbf{A} \odot \mathbf{A}^{-1} = 1$

LGS lösen mit $\mathbf{A}^{-1}$
Existiert $\mathbf{A}^{-1}$, so ist $\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}$
die Lösung des LGS $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$

Gesetze für Inverse
(falls $\mathbf{B}^{-1}$ und $\mathbf{A}^{-1}$ existieren)
- $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{A}^{\intercal})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\intercal}$

Gauss-Jordan-Verfahren (Matrix-Inversion)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}2&4&-6\\0&-2&2\\0&10&-9\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right. = 1$$

$$\begin{pmatrix}2&4&-6\\0&-2&2\\0&0&1\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&5&1\end{pmatrix}\right.$$

$$\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&-2&2\\0&0&1\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&5&1\end{pmatrix}\right.$$

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}1&12&2\\0&-9&-2\\0&5&1\end{pmatrix}\right.$$

$$1 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&6&1\\0&\frac{9}{2}&1\\0&5&1\end{pmatrix}\right. = \mathbf{A}^{-1}$$

Orthogonalmatrix
Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$
heisst orthogonal, wenn
Spaltenvektoren zueinander
senkrecht stehen **und** normiert sind

Inverse einer orthogonalen Matrix
ist $A^{\intercal}$

Lineare Regression
Betrachte das LGS $\mathbf{F} \odot \vec{c} = \vec{y}$ wobei
$\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit $n < m$ und $\vec{c}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$
Die Lösung im Sinne der kleinsten
Quadrate ergibt sich aus dem
Normalensystem

$$\mathbf{F}^{\intercal} \odot \mathbf{F} \odot \vec{c} = \underbrace{\mathbf{F}^{\intercal} \odot \vec{y}}_{=:\vec{y}^*}$$

Die Matrix $\mathbf{M} = \mathbf{F}^{\intercal} \odot \mathbf{F}$ ist quadratisch
und die Lösung ist $\vec{c} = \mathbf{M}^{-1}\vec{y}^*$

Invertierbarkeit Matrizen und lin. Abb.
Folgende Aussagen sind äquivalent
- $\mathbf{A}$ ist invertierbar
- $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
- Der Rang der Matrix $\mathbf{A}$ ist n.
- Die Spalten von $\mathbf{A}$ sind linear unabhängig, d.h. $\dim S(\mathbf{A}) = n$.
- Die Zeilen von $\mathbf{A}$ sind linear unabhängig, d.h. $\dim Z(\mathbf{A}) = n$.
- Die lineare Abbildung L ist bijektiv.
- Für jedes $\vec{b}$ hat die Gleichung $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ genau eine Lösung.
- Die Gleichung $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$ hat nur die Lösung $\vec{x} = \vec{0}$.
- Der Kern von L besteht nur aus dem Nullvektor, d.h. $\dim \mathrm{Kern}(L) = 0$.

Basismatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$
enthält die Basisvektoren in den
Spalten: $\mathbf{A} = \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$

Koordinatentransformation / Basistransformation
Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ Basismatrizen
Seien $\vec{x}^A$ die Koordinaten von $\vec{x}$
bezüglich $\mathbf{A}$ und $\vec{x}^B$ die
Koordinaten bezüglich $\mathbf{B}$
dann gilt $\vec{x}^B = \mathbf{T}\vec{x}^A$ mit $\mathbf{T} := \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$

Basistransformation lin. Abb.
Seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ Basismatrizen
Bezüglich $\mathbf{A}$ hat die lineare Abbildung L
die Darstellung $L(\vec{x})_A = \mathbf{M}\vec{x}$
und bezüglich der Basis B die Darstellung
$L(\vec{x})_B = \mathbf{K}\vec{x}$
Dann gilt $\mathbf{K} = \mathbf{TMT}^{-1}$ mit $\mathbf{T} := \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$

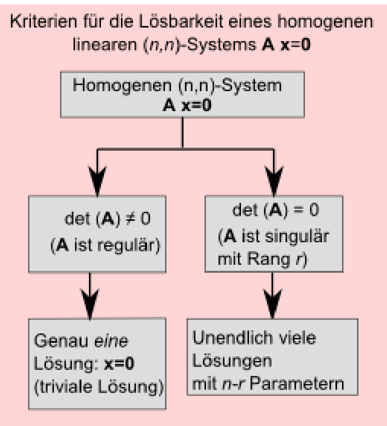
Basistransformation Standartbasis – Orthonormalbasis
Sei $\mathbf{B}$ die Matrix einer Orthonormalbasis
Seien $\vec{x}^A$ die Koordinaten von $\vec{x}$
bezüglich der Standartbasis und $\vec{x}^B$ die
Koordinaten bezüglich $\mathbf{B}$
dann gilt $\vec{x}^B = \mathbf{B}^{\intercal}\vec{x}^A$
Komponentenweise: $x_i^B = \vec{b}_i \odot \vec{x}^A$

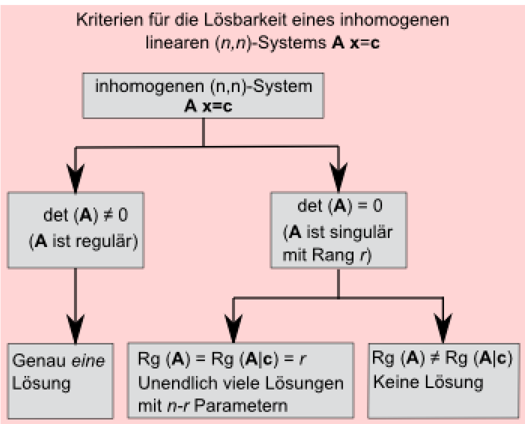
Diskrete Fourierbasis, N gerade $n = \frac{N}{2}$
Die *n+1* Cosinus-Listen und *n-1* Sinus-Listen
bilden eine orthogonale Basis
$\vec{c}_0, \vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n$ und $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-1}$

Diskrete Fourierbasis, N ungerade $n = \frac{N-1}{2}$
Die *n+1* Cosinus-Listen und *n* Sinus-Listen
bilden eine orthogonale Basis
$\vec{c}_0, \vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n$ und $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_n$

Basistransformation Standartbasis – Orthogonalbasis
Sei $\mathbf{B}$ die Matrix einer Orthogonalbasis
Seien $\vec{x}^A$ die Koordinaten von $\vec{x}$
bezüglich der Standartbasis und $\vec{x}^B$ die
Koordinaten bezüglich $\mathbf{B}$
dann gilt komponentenweise:

$$x_i^B = \frac{1}{|\vec{b}_i|^2}\vec{b}_i \odot \vec{x}^A$$





Cosinus-Liste/Sinus-Liste für T periodische Signale
Auf dem Intervall *[0, T]* ergeben sich die Cosinus- und
Sinus-Listen mit der Winkelfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$
und den Abtastwerten an den Stellen $t_k = k\,\frac{T}{N}$
zu

$$\vec{c}_j = \begin{pmatrix}\cos(t_0 \cdot j\,\omega)\\ \cdots \\ \cos(t_{N-1} \cdot j\,\omega)\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{s}_j = \begin{pmatrix}\sin(t_0 \cdot j\,\omega)\\ \cdots \\ \sin(t_{N-1} \cdot j\,\omega)\end{pmatrix}$$

Struktur Lösung homog. LGS
Seien $\vec{x}$ und $\vec{y}$ Lösungen von $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$
Dann gilt auch
$\mathbf{A}\,(c \cdot \vec{x}) = \vec{0}$ und $\mathbf{A}\,(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{0}$.

Struktur Lösung inhomog. LGS
Die Lösungen von $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$ ist
$\vec{x} = \vec{x}_h + \vec{x}_p$ wobei $\vec{x}_h$ die Lös.
Von $\mathbf{A}\vec{x}_h = \vec{0}$ und $\vec{x}_p$ *eine* Lösung des
Inhomog. LGS