Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Praktikum 1, KME

Einführung in die Vektorrechnung

Autor

Dr. Donat Adams

Praktikumslehrperson

Moritz Adelmeyer

Datum

29. August 2019

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Einführung in die Vektorrechnung

Literatur [**?**] und [**?**]

1.1 Begriff des Vektors

Lernziele 1.0 Begriff des Vektors

- Definition Vektor
- Darstellung eines Vektors mit den Komponenten
- Definition Gleichheit von Vektoren
- Definition Nullvektor und Gegenvektor

1.1.1 Definition Vektor

Beispiel 1.1 Beispiele für Vektoren **MG2GG7**

Betrachten Sie die Beispiele unten. Was ist allen Beispielen gemeinsam? Was ist unterschiedlich?

a) Punkte in der Ebene:

$$\begin{matrix} x-\text{Koorinate} \\ y-\text{Koordinate} \end{matrix} \quad : \quad \begin{pmatrix} 3.25 \\ -5.70 \end{pmatrix}$$

b) Monatliches Taschengeld (in CHF):

$$\begin{array}{l} \text{Einnahmen} \\ \text{Ausgaben} \end{array} : \quad \begin{pmatrix} 15 \\ 13 \end{pmatrix}$$

c) Monatliche Handykosten (in CHF):

$$\begin{array}{l} \text{Grundgebühr} \\ \text{Verbrauch} \end{array} : \quad \begin{pmatrix} 15 \\ 23 \end{pmatrix}$$

d) Stückzahlen im Materiallager:

$$\begin{array}{l} \text{Nägel} \\ \text{Schrauben} \end{array} : \quad \begin{pmatrix} 1580 \\ 2346 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Gemeinsamkeiten: Es handelt sich bei allen Beispielen um Zahlenpaare mit 2 Einträgen. Die beiden Einträge sind unabhängig von einander.

Beispiel 1.2 Beispiele Vektoren **1DXFW6**

Geben Sie als Vektoren an

a) Punkte in der Ebene mit der x-Koorinate 3.2 und der y-Koordinate 5.2

b) Monatliches Taschengeld, Einnahmen 18 CHF, Ausgaben 18 CHF.

c) Handykosten, Grundgebühr 20 CHF, Verbrauch 25 CHF

d) Stückzahlen im Materiallager, 1062 Nägel, 1279 Schrauben

Lösung:

a) Punkte in der Ebene:

$$\begin{array}{l} x - \text{Koorinate} \\ y - \text{Koordinate} \end{array} : \quad \begin{pmatrix} 3.2 \\ 5.2 \end{pmatrix}$$

b) Monatliches Taschengeld (in CHF):

$$\begin{array}{l} \text{Einnahmen} \\ \text{Ausgaben} \end{array} : \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \end{pmatrix}$$

c) Monatliche Handykosten (in CHF):

$$\begin{array}{l} \text{Grundgebühr} \\ \text{Verbrauch} \end{array} : \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \end{pmatrix}$$

d) Stückzahlen im Materiallager:

$$\begin{array}{l} \text{Nägel} \\ \text{Schrauben} \end{array} : \begin{pmatrix} 1062 \\ 1279 \end{pmatrix}$$

Definition 1.1 Vektor aus $\mathbb{R}^2$

- $\mathbb{R}^2$ sind Zahlenpaare aus zwei reellen Zahlen; formal

$$\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2) | a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

- Ein Zahlenpaar $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ bezeichnet man auch als **Vektor**
- a_1 und a_2 sind die **Koordinaten des Vektors** $\vec{a} = (a_1, a_2)$

[**?** , Kap. 11.1, S.204]

Definition 1.2 Zeilenform/Spaltenform

- Vektor in Zeilenform $\vec{a} = (a_1, a_2)$
- Vektor in Spaltenform $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

[**?** , 11.1,p.204]

Definition 1.3 Gleichheit von Vektoren

Vektoren sind gleich, wenn sie in allen Komponenten übereinstimmen. In $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{a} = \vec{b} \text{ oder } (a_1, a_2) = (b_1, b_2)$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur, falls $a_1 = b_1$ und $a_2 = b_2$.

[**?** , 11.1,p.204]

Beispiel 1.3 Beschäftigte mit Matura **3V7IL1**

Von den 640 Beschäftigten eines Betriebs sind 412 Frauen. Eine Umfrage ergibt, dass 125 der beschäftigten Frauen und ein Viertel der beschäftigten Männer Matura Abschluss haben. Schreibe den Vektor aus $\mathbb{R}^2$ an, der angibt

a) die Anzahl der beschäftigten Frauen und Männern,

b) die Anzahl der beschäftigten Frauen mit und ohne Matura,

c) die Anzahl der beschäftigten Männer mit und ohne Matura,

d) die Anzahl der Beschäftigten mit und ohne Matura.

Lösung:

a) Beschäftige

$$\begin{array}{l} \text{Frauen} \\ \text{Männer} \end{array} : \begin{pmatrix} 412 \\ 228 \end{pmatrix}$$

b) Frauen

$$\begin{array}{l} \text{mit Matura} \\ \text{ohne Matura} \end{array} : \begin{pmatrix} 125 \\ 287 \end{pmatrix}$$

c) Männer

$$\begin{array}{l} \text{mit Matura} \\ \text{ohne Matura} \end{array} : \begin{pmatrix} 57 \\ 171 \end{pmatrix}$$

d) Total

$$\begin{array}{l} \text{mit Matura} \\ \text{ohne Matura} \end{array} : \begin{pmatrix} 182 \\ 458 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.4 $\mathbb{R}^2$ **G24G1Q**

Ergänze mit $\in$, $\notin$, $\ni$, $=$, $\neq$ oder einer reellen Zahl.

a) $\begin{pmatrix}3.2\\5.2\end{pmatrix}$ __$\mathbb{R}^2$

b) $(3;6)$ __$\mathbb{R}$

c) $\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ __$\mathbb{R}^2$

d) 0.4 __$\mathbb{R}^2$

e) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ __$\mathbb{R}^2$

f) $\begin{pmatrix}3.2\\5.2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3.2\\ \ \end{pmatrix}$

g) $(5;2)$ __$(2;5)$

h) $\begin{pmatrix}3 & 6\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}6\\ \ \end{pmatrix}$

alternative Ergänzung:

$$2\cot\begin{pmatrix}3 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\12\end{pmatrix}$$

Lösung:

a) $\begin{pmatrix}3.2\\5.2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

b) $(3;6) \notin \mathbb{R}$

c) $\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

d) $0.4 \notin \mathbb{R}^2$

e) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

f) $\begin{pmatrix}3.2\\5.2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3.2\\5.2\end{pmatrix}$

g) $(5;2)$ __$(2;5)$

h) $\begin{pmatrix}3 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\ \ \end{pmatrix}$

1.2 Rechnen mit Vektoren

Lernziele 1.4 Rechnen mit Vektoren

- Addition und Subtraktion von Vektoren
- Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl
- geometrische Darstellungen dieser Operationen

Beispiel 1.5 Ausgabenvektor für die Ferien I **3ZEM2R**

$$\text{Anna: } \vec{A} = \begin{pmatrix}120\\150\end{pmatrix}, \text{ Bea: } \vec{B} = \begin{pmatrix}130\\170\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\text{Flug}\\\text{Hotel}\end{matrix}$$

Anna und Bea machen Urlaub. Um ihre Ausgaben zu erfassen, ordnen wir jedem Mädchen einen Vektor aus $\mathbb{R}^2$ zu, dessen Koordinaten jeweils die Ausgaben (in CHF) für Flug und Hotel angeben. Berechnen Sie den Vektor der angibt

a) wie viel beide zusammen für Flug und Hotel ausgegeben haben.

b) um wie viel Bea für Flug bzw. Hotel mehr ausgegeben hat als Anna.

Lösung:

Alle Angaben in CHF

a) Ausgaben beide zusammen

$$\vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} 250 \\ 370 \end{pmatrix}$$

b) Differenz der Ausgaben

$$\vec{B} - \vec{A} - = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.6 Ausgabenvektor für die Ferien II **IY13LE**

Seit Anna im Urlaub war, ist ein Jahr vergangen. Damals waren ihr Ausgaben

$$\begin{matrix} \text{Flug} \\ \text{Hotel} \end{matrix} : \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Inzwischen ist alles um 10% teurer geworden: wie sieht der Ausgaben-Vektor von Anna dieses Jahr aus? **Lösung:**

$$\vec{A}' = (1 + 0.1) \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 132 \\ 165 \end{pmatrix}$$

Infobox 1.1 Rechnen mit Vektoren (komponentenweise Notation)

Betrachte $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$:

- Die Vektoren werden addiert, indem man die Komponenten addiert.
$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} -3+2 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$
- Die Vektoren werden subtrahier, indem man die Komponenten subtrahier.
$$\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} -3-2 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$
- Komponentenweise Multiplikation mit einer Zahl:
$$\lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \end{pmatrix} \text{ z.B. } 3\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.7 Rechnen mit Vektoren I **GD49VQ**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Berechne die Komponenten der folgenden Vektoren:

a) $\vec{A} + \vec{B}$

b) $\vec{C} - \vec{B}$

c) $\vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$

d) $\vec{A} + \vec{B} - \vec{C} - \vec{D}$

e) $2 \cdot \vec{A}$

f) $(-1) \cdot \vec{B}$

g) $7 \cdot \vec{A} - 2 \cdot \vec{B} + 2 \cdot \vec{C}$

h) $\frac{7}{2} \cdot \vec{A} + \frac{1}{3} \cdot \vec{D}$

Lösung:

a) $\vec{A}+\vec{B}=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$

b) $\vec{C}-\vec{B}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

c) $\vec{A}-\vec{B}+\vec{C}=\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}$

d) $\vec{A}+\vec{B}-\vec{C}-\vec{D}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$

e) $2\cdot\vec{A}=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$

f) $(-1)\cdot\vec{B}=\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}$

g) $7\cdot\vec{A}-2\cdot\vec{B}+2\cdot\vec{C}=\begin{pmatrix}10\\29\end{pmatrix}$

h) $\frac{7}{2}\cdot\vec{A}+\frac{1}{3}\cdot\vec{D}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}38\\53\end{pmatrix}$

Beispiel 1.8 Lager **XYTF05**

Eine Firma verkauft zwei unterschiedliche Waren, die sie in zwei Lagern aufbewahrt. $\vec{A}\in\mathbb{R}^2$ gibt die Stückzahlin im ersten, $\vec{B}\in\mathbb{R}^2$ gibt die Stückzahlin im zweiten Lager an.

a) Berechne den Bestand in beiden Lagern, $\vec{C}\in\mathbb{R}^2$

b) Was gibt $\vec{B}-\vec{A}$ an?

Lösung:

a) $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$

b) $\vec{D}=\vec{B}-\vec{A}$ gibt an, wieviel mehr Waren es im zweiten Lager gibt.

Beispiel 1.9 Verdienst **JHUQUG**

Herr Meyer arbeitet für zwei Arbeitsgebern. $\vec{M}\in\mathbb{R}^2$ gibt die Monatsgehälter bei beiden Arbeitsgebern, $\vec{J}\in\mathbb{R}^2$ seine Jahresgehälter an.

a) Drücke $\vec{J}$ mit $\vec{M}$ aus.

b) Herr Meyer erhält zweimal im Jahr das doppelte Gehalt. Drücke jetzt $\vec{J}$ mit $\vec{M}$ aus.

Lösung:

Infobox 1.2 Gegenvektor und Nullvektor

- Der **Gegenvektor** zu $\vec{w}$ ist $-\vec{w}$. Wir berechnen ihn, indem wir alle Komponenten mit (-1) multiplizieren:

$$-\vec{w} = (-1) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Der **Nullvektor** ist

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel 1.10 Gesetze für die Addition **SY0XAE**

Ordnen Sie die Namen den Gesetzen zu: Gesetz vom inversen Element, Gesetz vom neutralen Element, Kommutativgesetz der Addition, Assoziativgesetz der Addition.

a) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

b) $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$

c) $\vec{A} + \vec{0} = \vec{A}$

d) $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$

Lösung:

Beispiel 1.11 Gesetze für die Multiplikation **60FTC8**

Ordnen Sie die Namen den Gesetzen zu: Gesetz vom neutralen Element, Distributivgesetz, Assoziativgesetz.

a) $r \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = r \cdot \vec{A} + r \cdot \vec{B}$

b) $(r + s) \cdot \vec{A} = r \cdot \vec{A} + s \cdot \vec{A}$

c) $(r \cdot s) \cdot \vec{A} = r \cdot (s \cdot \vec{A})$

d) $1 \cdot \vec{A} = \vec{A}$

Lösung:

Beispiel 1.12 Rechnen mit Vektoren II **KG5VVR**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{D} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\vec{E}$ und $\vec{F} \in \mathbb{R}^2$ sind allgemeine Vektoren.

a) Gegenvektor zu $\vec{A}$?

b) Gegenvektor zu $\vec{B}$?

c) Gegenvektor zu $\vec{E} - 2 \cdot \vec{F}$?

d) Gegenvektor zu $-(\vec{E} - 5 \cdot \vec{F})$?

e) $\vec{A} + \vec{X} = \vec{B}$, $\vec{X} =?$

f) $\vec{B} + \vec{X} = \vec{0}$, $\vec{X} =?$

g) $7 \cdot (\vec{A} - 2 \cdot \vec{B}) + \vec{X} = \vec{C}$, $\vec{X} =?$

h) $\frac{1}{2} \cdot \vec{X} + \frac{1}{3} \cdot \vec{A} + \vec{D} = \vec{X}$, $\vec{X} =?$

Lösung:

1.2.1 Vektoren in der Geometrie

Infobox 1.3 Ortsvektoren vs. allgemeine Vektoren

- Wird ein Vektor als Punkt (oder Ortsvektor) gedeutet, bezeichnen wir ihn mit einem Grossbuchstaben, z.B. $\vec{A}$, $\vec{B}, \ldots$
- Wird ein Vektor als Pfeil gedeutet, bezeichnen wir ihn mit einem Kleinbuchstaben, z.B. $\vec{a}$, $\vec{b}, \ldots$
- Ein Pfeil, der die Punkte $\vec{A}$ und $\vec{B}$ verbindet bezeichnen wir mit $\overrightarrow{AB}$ und es gilt
$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$$
d.h. Endpunkt minus Anfangspunkt.
- Oft werden in der Literatur auch ein Punkt notiert als Verbindungsvektor von Ursprung zum Punkt $\overrightarrow{0A}$. In unserer Notation gilt $\overrightarrow{0A} = \vec{A}$

Beispiel 1.13 Direkter Wege **HNY3PQ**

Nicolas legt seine Kleider in den Schrank und zieht sein Pyjama an bei

Punkt $\vec{O}$. Dann geht er zu Punkt $\vec{B}$, Punkt $\vec{C}$, zurück zu Punkt $\vec{O}$ und schliesslich über $\vec{A}$ zu Punkt $\vec{D}$.

a) Erfinde zu diesem Weg eine kurze Geschichte. Weshalb geht er zu Punkt $\vec{C}$?

b) Zeichne jetzt im Plan den Weg für $\vec{O}$ zu $\vec{D}$ ein (direkter Weg ins Bett). Zeichne danach alle einzelnen Verbindungens-Pfeile des oben beschriebenen Weges ein.

c) Neben dem Plan sind alle Pfeile gesammelt. Du kannst sie zusammenfügen wie in der Box gezeigt. Der 'direkten Weg' startet beim Anfangspunkt vom ersten Pfeil und endet an der Spitze des letzten Pfeils.

d) Konstruiere nun den 'Weg ins Bett' indem du *alle* Pfeile zusammensetzt. Start bei $\vec{O}$. Benutze Geodreieck und Lineal.

e) Überprüfe dein Resultat, indem du es mit dem gegebenen Pfeil ('direkter Weg') von $\vec{O}$ zu $\vec{D}$ vergleichst.

Lösung:

Beispiel 1.14 Direkte Wege rechnen (guided inquiry) **K3LY93**

Wir wollen nun die Aufgabe oben rechnerisch lösen. Dafür geben wir die Koordinaten der Pfeile wie folgt an:

$$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

d.h. wenn Nicolas von O zu B geht, dann geht er 1 Einheiten entgegen der positiven x-Achse und 2 Einheiten entgegen der positiven y-Achse. Oder

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

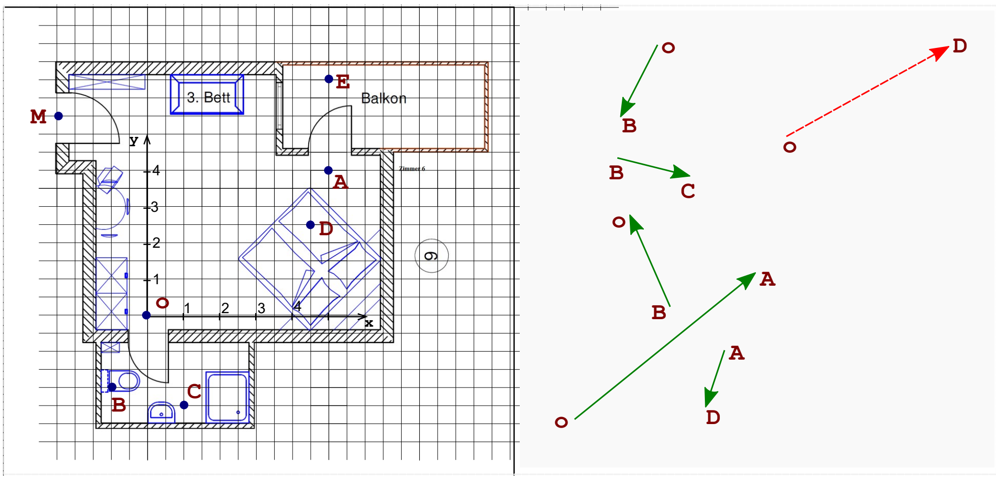
a) Können Sie unter Zuhilfenahme des Koordinatensystems auch die restlichen Pfeile in analoger Weise komponentenweise durch Zahlen darstellen? Tragen Sie die Komponenten für jeden Pfeil rechts ein.

b) Versuchen Sie nun, die Pfeile rechnerisch zusammenzusetzen. Welche Rechnung könnte wohl die Tatsache ausdrücken, dass der Weg

O-A-D auf direktem Weg durch den Pfeil O-D ausgedrückt werden kann?

c) Setzen Sie nun rechnerisch alle grünen Pfeile zusammen.

d) Vergleichen Sie ihr Resultat mit dem direkten (roten) Pfeil $\overrightarrow{OD}$.



Lösung:

Beispiel 1.15 Nicolas Mutter **6GQYZ3**

Nicolas Mutter beobachtet all dies vom Punkt M aus.

a) Welchen Weg müsste sie gehen zu A? Von M zu D? Beschreibe die Wege mit Zahlen.

b) Sind ihre Wege dieselben die von Nicola, der ja bei O starten würde?

c) Wie würde der den Weg von A nach D beschreiben? Kann sie dafür die Wege, die sie gemessen hat (=Pfeile), benutzen?

Lösung:

Definition 1.4 Vektoradditon

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden addiert, indem

- $\vec{b}$ parallel verschoben wird, bis sein Anfangspunkt mit dem Endpunkt von $\vec{a}$ zusammenfällt.
- Der Summenvektor $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ geht vom Anfangspunkt von $\vec{a}$ bis zum Endpunkt von $\vec{b}$

Definition 1.5 Gegenvektor = inverser Vektor

Zu jedem Vektor $\vec{a}$ gibt es einen Gegenvektor $-\vec{a}$. Er besitzt den gleichen Betrag aber die entgegengesetzte Richtung.

Definition 1.6 Differenz-Vektor

Der Differenz-Vektor $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ ist die Summe von $\vec{a}$ und $-\vec{b}$

Definition 1.7 Multiplikation mit einer Zahl

Durch die Multiplikation von $\vec{a}$ mit einer reellen Zahl λ entsteht ein neuer Vektor $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$ mit Betrag $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$. $\vec{b}$ ist parallel (Fall $\lambda > 0$) oder antiparallel (Fall $\lambda < 0$) zu $\vec{a}$ gerichtet.

Vektoren in der Physik

Beispiel 1.16 Boot auf dem Fluss **5T7KSP**

Wir wollen einen Fluss in einem Boot überqueren. Der Fluss ist 50 m breit und strömt mit einer Geschwindigkeit von 2 m/s.

a) Der Bootsmann fährt senkrecht zur Strömungsrichtung mit seinem Boot das in ruhendem Wasser mit 3.4 m/s fährt. Wo kommt er auf der Gegenseite an?

b) Wie lange dauert die Überquerung?

c) Ein Beobachter sieht unser Boot vom Ufer aus. Er zeichnet unsere Position beim Start und nach 10 Sekunden auf. Welche Geschwindigkeit berechnet er aus der Skizze?

d) Bettina schlägt vor, unsere Position mit einem Pfeil anzugeben, den sie wie folgt berechnet:

$$\vec{s} = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3.4 \end{pmatrix} \text{ m/s}$$

dabei ist t die Zeit in Sekunden, die wir unterwegs sind. Die Geschwindigkeit des Bootes ist jetzt auch ein Pfeil:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3.4 \end{pmatrix} \text{ m/s}$$

Welche Anlegestelle auf der anderen Seite des Flusses berechnet Sie? Welche absolute Geschwindigkeit berechnet Sie für das Boot?

Lösung:

1.3 Vektoren in der Geometrie, Teil 2

Lernziele 1.16 Vektoren in der Geometrie

- Definition Betrag eines Vektors
- Berechnung eines Verbindungsvektors
- Geometrische Anwendungen: Berechnung eines Mittelpunkts einer Strecke, Schwerpunkt eines Dreiecks, Teilungspunkte einer Strecke
- Angabe eines Vektors mit Länge und Winkel (Polarkoordinaten).

Beispiel 1.17 Diagonalen in Rechteck (Vorwissen) **YWC8BB**

a) Berechnen Sie die Länge der Diagonalen in einem Rechteck mit Seitenlängen 3 cm und 4 cm.

b) Berechnen Sie die Länge des Pfeils

c) Wie lange ist die Diagonale in einem Rechteck Seitenlänge x Zentimeter und y Zentimeter?

Lösung:

Definition 1.8 Betrag eines Vektors

Der **Betrag eines Vektors** $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist (in einer Orthogonalbasis)

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + +(a_2)^2}$$

.

Infobox 1.4 Rechnen mit dem Betrag

- Das Konzept oben kann verallgemeinert werden. Für $\mathbf{R}^N$ ist der Betrag
$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + \ \dots \ + (a_N)^2}$$
- Für den Betrag eines Vektor gilt immer
$$|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$$

Beispiel 1.18 Parallelogramm **DDBD9S**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 2.25 \\ -1.3 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 2.7 \end{pmatrix}$$

Sind die Punkte die aufeinanderfolgenden Ecken eines Parallelogramms ABCD?

a) Lösen Sie die Aufgaben, indem Sie die Verbindungsvektoren berechnen.

b) Rechnen Sie die Seitenlängen berechnen.

Lösung:

Beispiel 1.19 Mittelpunkt **I9QK6H**

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{Q} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Länge der Strecke PQ

b) Erstellen Sie eine Skizze und berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes $\vec{M}$ der Strecke PQ

Lösung:

Beispiel 1.20 Schwerpunkt eines Dreiecks **6JL1WJ**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{B} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \vec{C} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten das Dreieck ABC.

a) Berechnen Sie den Mittelpunkt $\vec{M}$ der Kante c.

b) Berechnen Sie den Verbidungsvektor $\overrightarrow{MC}$. Was sind die Koordinaten des Schwerpunktes?

c) Geben den Schwerpunkt eines allgemeinen Dreiecks ABC an mit Hilfe der Koodinaten der Eckpunkte $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ (d.h. ohne Koodinaten rechen).

d) Überprüfen Sie Ihren Ausdruck, indem Sie in den allgemeinen Ausdruck die Koordinaten von oben einsetzen und mit dem Resultat aus Teilaufgabe c) vergleichen.

Lösung:

Beispiel 1.21 Kompass und Winkel (Vorwissen) **IJ5I6F**

a) Nicolas läuft 3 m von Punkt O weg. Dabei schliesst er mit der positiven x-Achse einen Winkel von 35° ein. Beschreibe seinen Weg mit einem Pfeil in der Zeichnung und danach mit Zahlen.

b) Wo landet er, wenn er 7 m läuft und mit der positiven x-Achse einen Winkel von 55° einschliesst?

c) Wo landet er, wenn er beide Wege nacheinander läuft (also die Wege aneinander hängt)?

Lösung:

Definition 1.9 Polarkoordinaten

Wir betrachten $w > 0$ und $0 \geq \varphi < 360°$. Der Vektor

$$\vec{w} = w \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

hat die Länge w und schliesst mit der x-Achse den Winkel φ ein.
Wir nennen (w, φ) die Polarkoordinaten von $\vec{w}$.
Achtung: In der Mathematik und in der Physik werden Winkel im Gegenuhrzeigersinn gemessen, d.h. $10°$ ist im Gegenuhrzeigersinn und $-10°$ ist im Uhrzeigersinn.

Beispiel 1.22 Polarkoodinaten **UCWJYR**

Geben Sie die Vektoren in Karthesischen Koordinaten an

1. $a = 1,\ \varphi = 45°$
2. $b = 2,\ \varphi = 135°$
3. $c = 5,\ \varphi = 25°$
4. $d = 2,\ \varphi = 60°$
5. $e = \sqrt{2},\ \varphi = -45°$
6. $f = 7,\ \varphi = 35°$

Lösung:

1. $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
2. $\vec{b} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$
3. $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4.53154 \\ 2.11309 \end{pmatrix}$
4. $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$
5. $\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
6. $\vec{f} = \begin{pmatrix} 5.73406 \\ 4.01504 \end{pmatrix}$

Wir nennen die Komponenten $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ auch **Kartesische Koordinaten**. Für jeden Vektor können wir daraus Betrag und φ (den Winkel, den $\vec{v}$ mit der x-Achse einschliesst) berechnen. Das Paar v und φ bestimmt einen Vektor eindeutig. Wir nennen dieses Zahlenpaar die **Polar-Koordinaten** des Vektors $\vec{v}$. Es gilt (im 1. und 4. Quadrant):

$$\varphi = \arctan(\frac{v_y}{v_x})$$

Liegt $\vec{v}$ im 2. oder 3. Quadranten (d.h. $v_x < 0$), dann gilt

$$\varphi = \arctan(\frac{v_y}{v_x}) + 180°$$

Beispiel 1.23 Kartesische Koordinaten/Polarkoordinaten R3601V

Notieren Sie in welchem Quadranten die Vektoren liegen und berechnen Sie Winkel und Länge:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7.96956 \\ -0.697246 \end{pmatrix}$

b) $\vec{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5\sqrt{3} \end{pmatrix}$

e) $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

f) $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Lösung:

Um den Winkel zu erhalten, berechnen wir

$$\begin{aligned} \varphi' &= \arccos\left(\frac{\begin{pmatrix} 7.9696 \\ -0.6972 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 7.9696 \\ -0.6972 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} \right) \\ &= \arccos\left(\frac{7.9696}{8 \cdot 1} \right) = \arccos(0.9962) \\ &= 0.0873 \end{aligned}$$

Das Resultat ist im Bogenmass, und entspricht 5°. Damit ist der Winkel bis auf das Vorzeichen bestimmt. Wir zählen die Winkel der Vektoren im 1 und 2 Quadranten mit positivem Vorzeichen und im 3 und 4 mit einem negativen Vorzeichen. Vektor $\vec{a}$ liegt im Q4, also $\varphi = -5°$.

1. Q4, $a = 8$, $\varphi = -5°$
2. Q1, $b = 1$, $\varphi = 60°$
3. Q4, $c = 2$, $\varphi = -60°$
4. Q2, $d = 10$, $\varphi = 120°$
5. Q1, $e = 2$, $\varphi = 15°$
6. Q3, $f = \sqrt{2}$, $\varphi = 270°$

Infobox 1.5 Vektoren (frühere Definition in der Geometrie)

- In der Literatur finden sich noch Definitionen wie "Ein **Vektor** ist in der Geometrie eine Menge zueinander paralleller, gleich langer und gleich gerichteter Pfeile."
- Diese Definition hat den Vorteil, dass sie kein Koodinatensystem benutzt (Pfeile existieren auch ausserhalb des Koordinatensystems).
- Die Definition hat aber den Nachteil, dass sie nur für die Geometrie gültig ist. Wir haben aber am Anfang des Kapitels auch Vektoren ausserhalb der Geometrie kennengelernt (z.B. Vektor mit Verdienst).
- Die grundlegende Definition der Vektoren funktioniert ohne Komponenten und hält folgendes fest: Eine Menge V heisst Vektorraum, falls für alle $\vec{a} \in V$, $\vec{b} \in V$ Vektoren und $\lambda \in \mathbb{R}$, gilt, dass auch
$$\vec{a} + \vec{b} \in V,\ \lambda\vec{a} \in V \text{ und } \lambda\vec{b} \in V$$
- Wichtig ist zu unterscheiden zwischen Punkten (Ortsvektoren, wir notieren sie mit Grossbuchstaben, z.B $\vec{A}$) und allgemeinen Vektoren (wir notieren sie mit Kleinbuchstaben, z.B $\vec{a}$) . Punkte dürfen nicht verschoben werden. Allgemeine Vektoren dürfen überall hin verschoben werden. Manchmal wird auch gesagt, 'ein Vektor ist eine Klasse von Pfeilen' (d.h. nicht ein Pfeil, sondern eine unendliche Menge von Pfielen mit gleicher Länge und gleicher Richtung).

Weitere Aufgaben

Beispiel 1.24 Quadrat **FNI0DZ**

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{D} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmeen Sie die Länge der Seiten.

b) Bestimmen Sie die Mittelpunkte der Seiten.

c) Bestimmen Sie den Mittelpunkt des Quadrats.

Lösung:

Beispiel 1.25 Parallelogramm II **LJY3HS**

Überprüfen Sie, ob das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

a)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{D} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Beispiel 1.26 Parallelogramm III

Ergänzen Sie die Punkte zu einem Parallelogramm ABCD.

a)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 21 \\ -11 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -75 \\ 199 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Beispiel 1.27 Gleichschenklige Dreiecke **5CE2XT**

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig. Berechnen Sie den Flächeninhalt.

a)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

c)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2.75 \end{pmatrix}, \vec{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Beispiel 1.28 Diagonalen im Quader, Abstecher nach $\mathbb{R}^3$ XVB9GC

a) Berechnen Sie die Länge der Diagonalen in einem Quader mit Seitenlängen 3 cm, 4 cm und 8 cm.

b) Wie lange ist die Diagonale in einem Quader mit Seitenlängen x, y und z Zentimeter?

Lösung:

1.4 Darstellung der Gerade in $\mathbb{R}^2$

Lernziele 1.28 Darstellung der Gerade

- Senkrechte Vektoren Bestimmen in $\mathbb{R}^2$
- Definition Lineare Abbhängigkeit von Vektoren
- Definition Geradengleichung in Parameterform
- Berechnung der Koordinatengleichung einer Geraden aus der Parameterform

1.5 Gegenseitige Lage von Geraden in $\mathbb{R}^2$

Lernziele 1.28 Gegenseitige Lage von Geraden in $\mathbb{R}^2$

- Mögliche gegenseitige Lagen von Geraden in $\mathbb{R}^2$ kennen: parallele, identische Ebenen und Schnittpunkt
- Gegenseitige Lage von Geraden bestimmen
- Schnittpunkt berechnen
- evtl. Anwendungen der Parameterdarstellung in der Geometrie, z.B. PUnkte an einer Geraden spiegeln