WST
www.adams-science.org

Serie 11 Musterlösung

Klasse: 4Mb, 4Eb | Datum: FS 17

1. Messreihen — 621147

Gegeben seien die Messreihen x = 1, 2, 3, 2, 1 und y = 2, 2, 4, 1 aus normalverteilten Grundgesamtheiten. Wir testen unter der Voraussetzung $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ die Gleichheit der Erwartungswerte.
Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$.

Lösung:
Kategorie: unverbundene Stichproben, gleiches σ.
Wir testen die Hypothese $\mu_1 = \mu_2$ für x und y
x (bekommt Index 1) und y (bekommt Index 2): $n = N_1 + N_2 - 2 = 4 + 5 - 2 = 7$ und $t_{7;1-0.025} = t_{22;0.975} = 2.365$.
Varianz:

$$(s_1)^2 = 0.7 \text{ und } (s_2)^2 = 1.58333$$

also

$$s^2 = \frac{(4-1)\cdot 0.7 + (5-1)\cdot 1.5833}{7} = 1.07857$$

Testgrösse:

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{s} \cdot \sqrt{\frac{4\cdot 5}{4+5}} = \frac{1.8 - 2.25}{1.58333} \cdot \sqrt{\frac{4\cdot 5}{9}} = -0.645925$$

Die Testgrösse liegt im Annahmebereich. Statistischer Schluss: $\overline{x} = \overline{y}$.

2. Drei Messreihen — 613036

Stammen die drei Messreihen x, y und z unter der Voraussetzung $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2$ aus der gleichen normalverteilten Grundgesamtheit? Das Signifikanzniveau ist $\alpha = 1\%$.

x	18.0	14.5	13.5	12.5	23.0	24.0	21.0	17.0	18.5	9.5	14.0		
y	27.0	34.0	20.5	29.5	20.0	28.0	20.0	26.5	22.0	24.5	34.0	35.5	19.0
z	21.5	20.5	19.0	24.5	16.0	13.0	20.0	16.5	17.5	19.0			

Lösung:
Kategorie: unverbundene Stichproben, gleiches σ.
Wir testen nacheinander die Hypothese $\mu_1 = \mu_2$ für x und y, dann für x und z und schliesslich für y und z.

- x (bekommt Index 1) und y (bekommt Index 2): $n = N_1 + N_2 - 2 = 11 + 13 - 2 = 22$ und $t_{22;1-0.005} = t_{22;0.995} = 2.819$.
  Varianz:

  $$(s_1)^2 = 20.8045 \text{ und } (s_2)^2 = 33.7308$$

also

$$s^2 = \frac{(11-1)\cdot 20.8045 + (13-1)\cdot 33.7308}{22} = 27.8552$$

Testgrösse:

$$t = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{s}\cdot\sqrt{\frac{11\cdot 13}{11+13}} = \frac{16.8636-26.1923}{5.2778}\cdot\sqrt{\frac{11\cdot 13}{24}} = -4.31448$$

Die Testgrösse liegt ausserhalb des Annahmebereichs. Statistischer Schluss: $\overline{x}\neq\overline{y}$.

- x (bekommt Index 1) und z (bekommt Index 2): $n = N_1+N_2-2 = 11+10-2 = 19$ und $t_{19;0.995} = 2.861$.
  Varianz:

  $$(s_1)^2 = 20.8045 \text{ und } (s_2)^2 = 10.2917$$

  also

  $$s^2 = \frac{(11-1)\cdot 20.8045 + (10-1)\cdot 10.2917}{19} = 15.8248$$

  Testgrösse:

  $$t = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{s}\cdot\sqrt{\frac{11\cdot 10}{11+10}} = \frac{16.8636-18.75}{3.97803}\cdot\sqrt{\frac{11\cdot 10}{21}} = -1.08528$$

  Die Testgrösse liegt im Annahmebereich. Statistischer Schluss: $\overline{x}=\overline{z}$.

- y (bekommt Index 1) und z (bekommt Index 2): $n = N_1+N_2-2 = 13+10-2 = 21$ und $t_{21;0.995} = 2.831$.
  Varianz:

  $$(s_1)^2 = 33.7308 \text{ und } (s_2)^2 = 10.2917$$

  also

  $$s^2 = \frac{(13-1)\cdot 33.7308 + (10-1)\cdot 10.2917}{21} = 23.6854$$

  Testgrösse:

  $$t = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{s}\cdot\sqrt{\frac{11\cdot 10}{11+10}} = \frac{26.1923, 18.75}{4.86677}\cdot\sqrt{\frac{11\cdot 10}{21}} = 3.63559$$

  Die Testgrösse liegt ausserhalb des Annahmebereichs. Statistischer Schluss: $\overline{y}\neq\overline{z}$.

3. Hilfsstoffe **697779**

Der durchschnittliche Verbrauch eines bestimmten Hilfsstoffes in zwei vergleichbaren Filialen einer Unternehmung soll geprüft werden. Dazu wurde der Verbrauch während einer Anzahl Tage bei beiden Filialen ermittelt.
Kann statistisch erhärtet werden, dass die eine Filiale signifikant mehr von dem entsprechenden Hilfsstoff verbraucht? Das Signifikanzniveau ist $\alpha = 1\%$.

	1.5	3.5	2.6	4.9	6.8	4.9	6.2	5.8	6.4
x	8.8	4.5	7.1	8.3	3.6	7.6	7.7	4.9	5.9
	3.4	4.5	6.6	5.5	7.7	8.8	4.7	6.3	
	5.5	6.6	5.6	6.6	6.1	8.3	5.5	7.3	8.8
y	6.6	6.4	7.8	6.6	7.7	5.5	7.7	6.6	6.6
	5.5	5.4	6.6	5.5	8.8	8.8	9.9	7.7	

Lösung:
Kategorie: unverbundene Stichproben, gleiches σ.
Wir testen die Hypothese $\mu_1 = \mu_2$ für x und y
x (bekommt Index 1) und y (bekommt Index 2): $n = N_1 + N_2 - 2 = 26 + 26 - 2 = 50$ und $t_{50;1-0.005} = t_{50;0.995} = 2.678$.
Varianz:

$$(s_1)^2 = 3.61386 \text{ und } (s_2)^2 = 1.59705$$

also

$$s^2 = \frac{(26-1)\cdot 3.61386 + (26-1)\cdot 1.59705}{50} = 2.60545$$

Testgrösse:

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{s} \cdot \sqrt{\frac{26 \cdot 26}{26 + 26}} = \frac{5.71154 - 6.92308}{1.61414} \cdot \sqrt{\frac{26 \cdot 26}{52}} = -2.70625$$

Die Testgrösse liegt ausserhalb des Annahmebereichs. Statistischer Schluss: $\overline{x} \neq \overline{y}$.

4. Bindemittel **602709**

Mit zwei verschiedenen Holzwerkstoffbindemitteln A und B werden Spanplatten hergestellt. Mit dem Bindemittel A erhalten wir 10 Prüfkörper, mit dem Mittel B deren 12. Alle Prüfkörper werden einem Querzugfestigkeitstest unterworfen. Folgende Werte wurden gemessen:

A	0.745	0.824	0.804	0.863	0.873	0.814	0.804	0.794	0.804	0.7453
B	0.745	0.686	1.049	1.059	0.873	0.834	0.735	0.971	0.932	0.932
	0.843	0.87								

Das Signifikanzniveau ist $\alpha = 1\%$.

Lösung:

Kategorie: unverbundene Stichproben, verschiedene σ.
Wir testen die Hypothese $\mu_1 = \mu_2$ für A und B
A (bekommt Index 1) und B (bekommt Index 2): Varianz:

$$(s_1)^2 = 0.001746 \text{ und } (s_2)^2 = 0.0140632 \Rightarrow s^2 = \frac{0.001746}{10} + \frac{0.0140632}{12} = 0.00134653$$

$$c = \frac{0.001746/10}{0.001746/10 + 0.0140632/12} = 0.129667$$

und damit

$$n = \left\lfloor \left(\frac{c^2}{N_1 - 1} + \frac{(1-c)^2}{N_2 - 1} \right)^{-1} \right\rfloor = \left\lfloor \left(\frac{0.0168}{9} + \frac{0.757}{11} \right)^{-1} \right\rfloor = \left\lfloor (0.0707)^{-1} \right\rfloor = 14$$

Annahme-Bereich: $t_{14;0.995} = 2.977$
Testgrösse:

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{s} = \frac{0.807 - 0.877667}{0.0366951} = -1.92578$$

Die Testgrösse liegt im Annahmebereich. Statistischer Schluss: $\overline{x} = \overline{y}$.

5. Widerstände **136503**

Zwei verschiedene Messmethoden für Widerstände sollen miteinander verglichen werden. Vergleichsmessungen an fünf Widerständen ergaben das folgende Messprotokoll:

i	1	2	3	4	5
1. Methode: x_i [in Ω]	100.5	102.4	104.3	101.5	98.4
2. Methode: y_i [in Ω]	98.2	99.1	102.4	101.1	96.2

Bestimmen Sie, ob beide Messmethoden als gleichwertig angesehen werden können. Signifikanzniveau α =1%.

Lösung:

Kategorie: verbundene Stichproben, gleiche σ.
Wir testen die Hypothese $\mu_1 = \mu_2$ für 1. Methode und und 2. Methode
Annahme-Bereich: $t_{5-1,0.995} = 4.603$
Differenz:

$$d = \begin{pmatrix} 100.5 \\ 102.4 \\ 104.3 \\ 101.5 \\ 98.4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 98.2 \\ 99.1 \\ 102.4 \\ 101.1 \\ 96.2 \end{pmatrix} = \{2.3, 3.3, 1.9, 0.4, 2.2\}$$

Mittelwert der Differenz:

$$\overline{d} = 2.02$$

Varianz der Differenz:

$$(s_d)^2 = 1.097$$

Testgrösse:

$$t = \frac{\overline{d}}{s} = \frac{2.02}{1.04738} = 4.31$$

Die Testgrösse liegt im Annahmebereich. Statistischer Schluss: $\overline{x} = \overline{y}$.

6. Leimungsgrad **014452**

Es soll untersucht werden, ob zwei Laboranten vergleichbare Ergebnisse bei der Bestimmung des Leimungsgrades von Papieren liefern. Beide Laboranten haben 8 verschiedene Papiersorten gemessen. Das Signifikanzniveau ist $\alpha = 1\%$.

Sorte 1	2	3	4	5	6	7	8	
Labor A	18.60	27.60	27.50	25.00	24.50	26.80	29.70	26.50
Labor B	18.58	27.37	27.27	24.64	24.10	26.33	29.33	26.63

Lösung:
Kategorie: verbundene Stichproben, gleiche σ.
Wir testen die Hypothese $\mu_1 = \mu_2$ für Laborant 1 und für Laborant 2
Annahme-Bereich: $t_{8-1,0.995} = 3.499$
Differenz:

$$d = \begin{pmatrix} 18.6 \\ 27.6 \\ 27.5 \\ 25. \\ 24.5 \\ 26.8 \\ 29.7 \\ 26.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 18.58 \\ 27.37 \\ 27.27 \\ 24.64 \\ 24.1 \\ 26.33 \\ 29.33 \\ 26.63 \end{pmatrix} = \{0.02, 0.23, 0.23, 0.36, 0.4, 0.47, 0.37, -0.13\}$$

Mittelwert der Differenz:

$$\overline{d} = 0.24375$$

Varianz der Differenz:

$$(s_d)^2 = 0.0421696$$

Testgrösse:

$$t = \frac{\overline{d}}{s} = \frac{0.24375}{0.205352} = 3.3573$$

Die Testgrösse liegt im Annahmebereich. Statistischer Schluss: $\overline{x} = \overline{y}$.