WST
donat.adams@fhnw.ch
IMN

Test 1 Musterlösung

Name, Nummer: Datum: 26. April 2017

1. Autonummern (10) 344791

Wie viele achtstellige Autonummern können aus den Ziffern 1, 3, 3, 3, 4, 0, 0, 0 gebildet werden? Bei Nummernschildern gibt es keine führenden Nullen.

Lösung:

Wir berechnen die Anzahl aller achtstelligen Zahlen (auch mit führenden Nullen) und ziehen dann die Anzahl der Zahlen ab, die führende Nullen haben:

$$N_8 = \frac{7!}{3! \cdot 3!} = 1120$$

Nun betrachten wir die Anzahl der Zahlen mit führenden Nullen: Um sie zu bilden, müssen wir eine 0 auf die erste Stelle setzen. Es bleiben 2 Nullen und insgesamt 7 Zahlen zu verteilen auf 7 Plätze. Alle Kombinationen, die wir so bilden sind verboten:

$$N_v = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot} = 420$$

Also

$$N = 1120 - 420 = 700 \ .$$

2. Golf (10) 253300

Die Herren Amrein, Barth und Conelli spielen zusammen Golf. Ihre durchschnittlichen Leistungen sind unten angegeben: Die durchschnittliche Anzahl Schläge pro Loch und die Anzahl Treffer beim ersten Schlag mal 100.

Jetzt stehen sie bei Loch 5. Jeder schlägt seinen Ball ein Mal. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der Spieler beim ersten Schlag ins Loch trifft?

	Schläge pro Loch	Treffer bei erstem Schlag $\times$ 100
Amrein	4.2	17
Barth	5.1	7
Conelli	4.5	12

Lösung:

Wir Rechnen mit der Gegenwahrscheinlichkeit:

$$p_t = 1 - q_t$$

dabei ist q_t die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Herren das Loch beim ersten Schlag verfehlen. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist

$$q_t = (1 - \frac{17}{100}) \cdot (1 - \frac{7}{100}) \cdot (1 - \frac{12}{100}) \approx 0.739 \ .$$

Also

$$p_t \approx 0.261$$

3. Belegung Tram (10) 973423

Die Tabelle unten gibt die Belegung des Trams 7 in Abhängigkeit der Tageszeit an.

Zeit [h]	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Personen	9	18	52	120	59	23	36	65	29	25	10	24	108

Zeit [h]	18	19	20	21	22	23	24
Personen	109	28	13	21	10	9	16

Berechnen Sie die angegebenen Grössen und erstellen Sie einen Box-und-Whisker Plot für die Daten.

- Median der Belegung
- Quartile $Q_{0.25}$ und $Q_{0.75}$.
- Aussreissergrenzen. Markieren Sie Ausreisser.

Lösung:

- Wir ordnen und nummerieren die Datenpunkte einzeln, d.h. mit den Indizes 1 bis 20. Wir haben eine gerade Anzahl von Datenpunkten. Also

$$\tilde{x} = \frac{1}{2} \cdot [x_{10} + x_{11}] = \frac{1}{2} \cdot [24 + 25] = 24.5$$

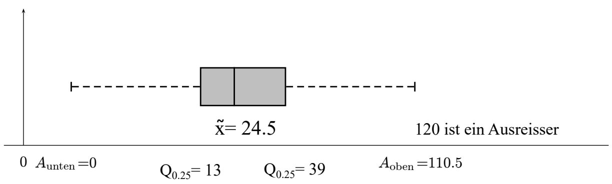
- $Q_{0.25} = x_5 = 13$ und $Q_{0.75} = x_{15} = 39$.
- Die Aussreissergrenzen berechnen sich wie folgt:

$$d_Q = Q_{0.75} - Q_{0.25} = 39$$

also

$$A_{\mathrm{u}} = -45.5 \text{ und } A_{\mathrm{o}} = 110.5$$

Die negative Aussreissergrenze setzen wir auf das Minimum $A_{\mathrm{u}} = 0$.



4. Einfacher Einsatz Roulette (10) 882179

Roulette ist ein Glückspiel bei dem die Kugel im Roulettekessel auf die Zahlen 0 bis 36 fallen kann (37 Möglichkeiten). Herr Meister setzt stets genau 10 CHF auf die geraden Zahlen $\{2, 4, \ldots, 34, 36\}$ (18 Zahlen). Fällt die Kugel tatsächlich auf eine gerade Zahle, erhält er das doppelte vom Einsatz.

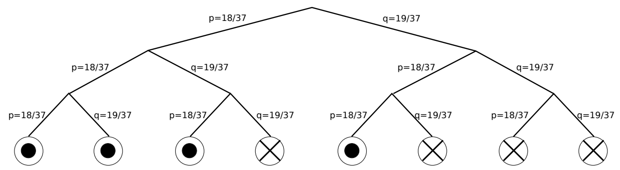
$$X = \{0, 1, 2, \ldots, 35, 36\}$$

(a) Zeichnen Sie den Ereignisbaum für 3 Spiele. Benutzen die angegebenen Codes in der Zeichnung (Wahrscheinlichkeiten p und q bei den Verzweigungen, Punkt für Äste mit Gewinn, Kreuz für Äste mit Verlust).

(b) Betrachten Sie die Äste, bei denen Herr Meister *mehr* Geld gewinnt als er einsetzt. Wie viele CHF kann er gewinnen? Berechnen Sie den Erwartungswert.

(c) Betrachten Sie nun die Äste, bei denen Herr Meister *weniger* Geld gewinnt als er einsetzt. Wie viele CHF kann er verlieren? Berechnen Sie den Erwartungswert.

Lösung:



(a) Herr Meister gewinnt nur bei 18 Zahlen von 37. Die Gewinnwahrscheinlichkeit ist $p = \frac{18}{37}$. Wir markieren die Äste, auf denen er mehr gewinnt als er verliert mit einem Punkt und die auf denen er mehr verliert als gewinnt mit einem Kreuz.

(b) Es gibt zwei Typen von erfolgreichen Ästen:

- 0 Misserfolge: $P_0 = \left(\frac{18}{37}\right)^3 = 0.115136$, 1 Ast
- 1 Misserfolg: $P_1 = \left(\frac{18}{37}\right)^2 \cdot \frac{19}{37} = 0.121533$, 3 Äste

Der Erwartungswert für den Gewinn ist

$$E(X) = 1 \cdot 0.115136 \cdot 30 + 3 \cdot 0.121533 \cdot 10 = 7.10$$

(c) Es gibt zwei Typen von verlustreichen Ästen:

- 3 Misserfolge: $Q_3 = \left(\frac{19}{37}\right)^3 = 0.135412$, 1 Ast
- 2 Misserfolg: $Q_2 = \left(\frac{19}{37}\right)^2 \cdot \frac{18}{37} = 0.128285$, 3 Äste

Der Erwartungswert für den Gewinn ist

$$E(X) = 1 \cdot 0.135412 \cdot (-30) + 3 \cdot 0.128285 \cdot (-10) = -7.91$$

Gesamthaft muss Herr Meister mit einem Verlust von $7.10 + (-7.91) = -0.81$ CHF rechnen.

5. Qualitätskontrolle Batterie-Zellen (10) 936391

Ein Batterielieferant garantiert, dass sein Produkt — Lithium-Ionen-Zellen — nur 3 % Ausschuss enthalten. Zur Kontrolle testet der Käufer die Zellen mit einer Stichprobe von 50 Zellen. Sind mehr als k Zellen fehlerhaft, wird die Lieferung zurückgewiesen.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei einer tatsächlichen Ausschussrate von 3 % höchstens 2 fehlerhafte Zellen?

(b) Wie muss die Zahl k gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für Rücksendung trotz ausreichender Ausschussrate kleiner als 5 % ist?

Lösung:

fehlerhaft k	0	1	2	3	4	5
P_k	0.218065	0.337214	0.255518	0.126442	0.0459493	0.0130742
$\sum_{i=0}^{k} P_i$	0.218065	0.55528	0.810798	0.93724	0.983189	0.996264

(a) Wir addieren die Wahrscheinlihckeiten für 0, 1 und 2 fehlerhafte Zellen (Binomial-Verteilung, $n = 50$, $p = 0.03$, kann z.B. mit Excel berechnet werden):

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= 0.218065 + 0.337214 + 0.255518 = 0.810798 \end{aligned}$$

Das heisst bei einer Ausschussrate von 3 % deckt $k = 2$ (zurücksenden nur bei mehr als 2 fehlerhaften Platinen) 81.1 % der Fälle ab, und nur in 8.9 % der Fälle wird die Lieferung zurückgesandt, obwohl die Ausschussrate bei 3 % liegt.

(b) Wir rechnen mit der Gegenwahrscheinlichkeit: k soll so gewählt werden, dass wir mindestens 95 % der Fälle abdecken. Aus der Tabelle lesen wir heraus, dass dies bei $k = 4$ gegeben ist: $\sum_{i=0}^{4} P_i = 0.983189$.