WST
donat.adams@fhnw.ch
IMN

# MSP Musterlösung

Name, Nummer: Datum: 12. Juli 2017

## 1. Energie eines Super-Kondensators 2Y6HUB

An einer Sendung von Super-Kondensatoren mit Energie-Gehalt $E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$ wurden folgende Messungen vorgenommen:

- Kapazität: $C = 42\,\mathrm{Ah/V} \pm 2\%$
- Spannung: $U = 2.5\,\mathrm{V} \pm 1\%$

(a) Welchen mittleren Wert erhält man für den Energie-Gehalt?

(b) Wie gross ist die absolute bzw. relative Messunsicherheit von $E$?

**Lösung:**
Der Energie Gehalt ist $E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = 472.5$ kJ. Wir berechnen zuerst den prozentualen Messfehler:

$$\frac{\Delta E}{E} = \sqrt{\left|1 \cdot \frac{\Delta C}{C}\right|^2 + \left|2 \cdot \frac{\Delta U}{U}\right|^2}$$

also

$$\frac{\Delta E}{E} = \sqrt{|1 \cdot 0.02|^2 + |2 \cdot 0.01|^2} = 0.028$$

Die relative Messunsicherheit ist 80 % und die absolute $E \cdot 0.028 = 13.4$ kJ. Wir schreiben

$$E = 472.5 \pm 13.4 \text{ kJ}$$

## 2. Korrelation 7W6C3V

Bestimmen Sie, ob zwischen den Datensätzen eine signifikante Korrelation besteht. Signifikanz-Niveau $\alpha = 0.1\%$.

| $x_i$ | 0 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 36 | 21 | 24 | 16 | 13 | 10 | 6 |

**Lösung:**
Der Korrelationskoeffizient ist

$$r_{xy} = -0.931581$$

bei $n = 7$ Datenpunkten. Die Testgrösse ist

$$t_{\text{reg}} = \frac{-0.931581 \cdot \sqrt{7-2}}{\sqrt{1-(-0.931581)^2}} = -5.73009\ .$$

Der kritische Wert ist

$$t_{8-2;0.9995} = 6.86883$$

Die Testgrösse im Betrag $|t_{\text{reg}}|$ kleiner als der kritische Wert, also sind die Datensätze nicht korreliert.

### 3. Regression: Temperatur-Höhe VY13U7

Für den 5.7.2017 hat MeteoSchweiz folgende Tabelle zur Tagestemperatur veröffentlicht.

| Station | Höhe über Meer (m) | Tagestemperatur (°C) |
|---|---|---|
| Basel | 260 | 16.6 |
| Güttingen | 432 | 16.7 |
| Zürich | 408 | 15.9 |
| Vaduz | 455 | 10.4 |
| Altdorf | 446 | 17.6 |
| Piotta | 1014 | 6.9 |
| Samedan | 1721 | 11.6 |
| Lugano | 278 | 19.4 |
| Zermatt | 1616 | 10.1 |
| Adelboden | 1348 | 13.5 |
| Bern | 540 | 13.2 |
| Mathod | 445 | 11.5 |
| Genf | 378 | 15 |
| Wengen | 1268 | 5.4 |
| Brünig | 1008 | 24.7 |

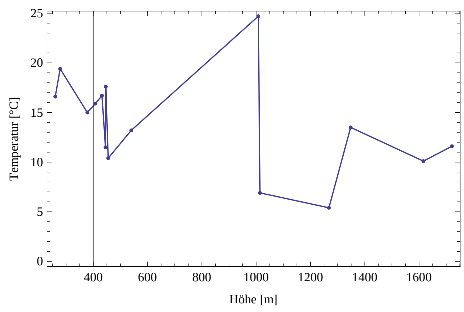
(a) Zeichnen Sie für diese Daten ein aussagefähiges Diagramm mit beschrifteten Achsen.

(b) Berechnen Sie die Regressionsgerade.

(c) Berechnen Sie daraus den Schätzwert die Temperatur in St. Gallen (Höhe 779 m).

(d) Um wieviel nimmt die Temperatur pro Hundert Höhenmeter ab?

**Lösung:**



(a) Diagramm oben

(b) $T(h) = 17 - 0.004 \cdot h$

(c) Temperatur in St. Gallen (Höhe 779 m):

$$T(h) = 17 - 0.004 \cdot 779 = 13.88 \text{ °C}$$

(d) $\Delta = m \cdot 100 = -0.4$ °C

## 4. Kathoden-Material **RNFANW**

Ein neues Kathoden-Material wurde entwickelt und ergibt die unten angegebenen Kapazitäten (in mAh/g). Das herkömmliche Material hat eine Kapazität von 160 mAh/g.

| Kapazität [mAh/g] | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 161.71 | 172.24 | 161.97 | 170.14 | 184. | 160.68 | 172.43 | 177.85 |
| | 175.72 | 160.11 | 174.95 | 159.09 | 169.97 | 172.27 | 192.25 | 154.6 |

(a) Berechnen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung der Stichprobe.

(b) Stellen Sie eine sinnvolle Aussage (= Hypothese) auf, die getestet werden kann.

(c) Benennen Sie den Test, mit dem diese Hypothese überprüft werden kann.

(d) Berechnen Sie den Test mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$.

(e) Was bedeutet das Testergebnis für Kapazität des neuen Kathoden-Materials?

**Lösung:**

(a) $\overline{x} = 170$ und $s = 10$

(b) $H_0$: Die Kapazität ist ebenfalls 160 mAh/g.

(c) t-Test des Erwartungswerts.

(d) Die Prüfgrösse $t$ ist

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{s} \cdot \sqrt{n} = \frac{170 - 160}{10} \cdot \sqrt{16} = 4$$

Die kritischen Grenzen sind

$$\pm t_{n-1;1-\alpha/2} = \pm t_{15;0.975} = \pm 2.13$$

Die Prüfgrösse liegt nicht im kritischen Bereich.

(e) Die Kapazität konnte signifikant erhöht werden.

## 5. Star-Iso (10) **2DFF1X**

Es soll untersucht werden, ob das Getränk "Star-Iso" die Leistung beim Velo-Fahren verbessert. Dazu werden die Durchschnittsgeschwindigkeiten [in km/h] im Training gemessen:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ohne SI | 46.60 | 46.22 | 47.83 | 45.12 | 45.30 | 46.73 | | |
| mit SI | 46.58 | 46.85 | 48.83 | 48.55 | 48.10 | 48.22 | 46.07 | 47.37 |

(a) Mit welchem statistischen Test kann man die Wirksamkeit des Getränks prüfen?

(b) Geben Sie eine sinnvolle zweiseitige Nullhypothese an, die getestet werden könnte.

(c) Nehmen Sie an, dass die beiden Stichproben die gleiche Varianz besitzen. Berechnen Sie den Test mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5%.

(d) Was bedeutet das Testergebnis?

**Lösung:**

(a) Es gilt $\overline{x} = 46.3$, $\overline{y} = 47.57$, $s_1 = 1.00146$ un $s_2 = 1.00285$. Die Standardabweichungen liegen nahe beieinander, also vergleichen wir zwei Mittelwerte mit gleicher Varianz aus unverbundenen Stichproben.

(b) $H_0: \ \mu_1 = \mu_2$

(c) Wir bestimmen die Hilfsgrösse $s$:

$$s^2 = \frac{(N_1 - 1) \cdot (s_1)^2 + (N_2 - 1) \cdot (s_2)^2}{N_1 + N_2 - 2} = \frac{5 \cdot (1.00)^2 + 7 \cdot (1)^2}{12} = 1.0$$

Damit ist $s =$ und die Prüfgrösse $t$ ist

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{s} \cdot \sqrt{\frac{N_1 \cdot N_2}{N_1 + N_2}} = \frac{46.3 - 47.57}{1}\sqrt{\frac{6 \cdot 8}{6 \cdot 8}} = -2.34$$

Die kritischen Grenzen sind bei

$$\pm t_{N_1+N_2-2;1-\alpha/2} = \pm t_{14;0.975} = 2.18$$

(d) Die Prüfgrösse liegt im kritischen Bereich, die Nullhypothese wird angenommen (statischer Schluss). Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% hat das Getränk einen positiven Einfluss auf die Leistung.

## 6. Vertrauensintervall **HXQCYC**

Unsere Tests der gelieferten Batterie-Zellen ergeben eine Kapazität von $(90 \pm 1.2)$ Ah bei einer Stichprobe von 18 Zellen. Wir sind enttäuscht, uns wurden 92 Ah versprochen.
Wir nehmen an, dass die Kapazitäten normalverteilt sind.

(a) Bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 10%, in welchem Intervall liegt der Erwartungswert der Kapazität

(b) Welche Stichprobengrösse ist ungefähr notwendig, wenn das Vertrauensintervall die Länge 0.5 Ah haben soll?

(c) Der Lieferant überholt seine Produktionsanlage und schickt eine neue Lieferung von 30 Zellen. Wir prüfen diese. ($H_0 : \mu = 92$ Ah, *Irrtumswahrscheinlichkeit* $\alpha = 1\%$). Der Test liefert die Werte $C = 91.5 \pm 0.8$ Ah. Wie lautet nun das Testergebnis?

**Lösung:**

(a) Das Vertrauensintervall ist

$$\bar{x} - \frac{t_{n;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{N}} \cdot s \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{t_{n;1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{N}} \cdot s$$

hier also mit $\bar{x} = 90$, $s = 1.2$, $t_{18;0.95} = 1.734$ und $N = 18$

$$89.5095 \leq \mu \leq 90.4905$$

Statitischer Schluss: Die Zellen haben eine niedrigere Kapazität.

(b) Die Breite des Intervalls ist $\Delta\mu$ =1 Ah also

$$N \approx 4\frac{s^2}{(\Delta\mu)^2} = 23.04$$

Es sind also mindestens 24 Proben erforderlich.

(c) (Alternative zu Vertrauensintervall): Wir transformieren $\bar{x}$ in den t-Raum, d.h. wir bestimmen die Prüfgrösse

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \cdot \sqrt{N} = -3.423$$

Die Kritische Grenze liegt bei $t_{18;0.995} = 2.75639$. Statitischer Schluss: Die Zellen haben eine niedrigere Kapazität.

## 7. Lebensdauer Batterien **12UWQE**

Die Lebensdauer von Batterien ist erreicht, wenn die Kapazität unter den Wert von 0.8 mal die Nennkapazität fällt.
Im Bereich zwischen 30 und 40 °C nimmt die Lebensdauer von Li-Ionen Batterien exponentiell ab

$$t = Ae^{-\lambda \cdot T}$$

wobei $t$ die Lebensdauer bezeichnet und $T$ die Temperatur.
Folgende Lebenszeiten wurden gemessen.

| Messung | Betriebstemperatur [°C] | Lebensdauer [Anz. Zyklen] |
|---|---|---|
| 1 | 31 | 2899 |
| 2 | 32 | 3006 |
| 3 | 33 | 2984 |
| 4 | 34 | 2829 |
| 5 | 35 | 2930 |
| 6 | 36 | 2782 |

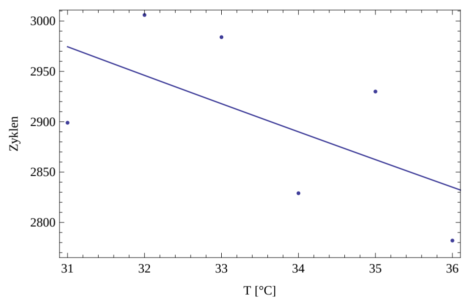
(a) Erstellen Sie für die Daten ein Diagramm und beschrifteten Sie die Achsen.

(b) Berechnen Sie die Parameter $A$ und $\lambda$ im Ausdruck für die Lebensdauer aufgrund der gegebenen Daten.

(c) Bestimmen Sie die erwartete Lebensdauer bei einer Betriebstemperatur von 40°C.

(d) Um wie viel nimmt die Lebensdauer durchschnittlich zu, wenn die Betriebstemperatur um 1 °C erhöht wird?

**Lösung:**




(a) Diagramm oben.

(b) Lineare Regression für $T_i$, $\log(Z_i)$ ergibt

$$Z_l(T) = 8.29555 - 0.00960411 \cdot T$$

also

$$Z(T) = e^{8.29555-0.00960411 \cdot T} = 4006 \cdot e^{-0.00960411 \cdot T}$$

(c) $Z(40) = 2728.17$

(d) Wir berechnen z.B. $Z(40)/Z(39) = 0.99$, d.h bei jedem Grad Erhöhung der Betriebstemperatur sinkt die Lebensdauer um 1%