Serie 1, Musterlösung

Klasse: 4U, 4Mb, 4Eb — Datum: FS 19

1. Summen übersichtlich und kurz — 84J2YS

Schreiben Sie die folgenden Summen auf mindestens zwei verschiedene Arten mit dem Summensymbol.

(a) $5 + 9 + 13 + \ldots + 425$

(b) $1 + 4 + 9 + \ldots + 1000000$

(c) $2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 1024$

(d) $-2 + 4 + 22 + 76 + \ldots + 531436$

(e) $500 + 493 + 486 + 479 + \ldots + 10$

(f) $30 + 42 + 56 + 72 + \ldots + 10100$

(g) $26 + 37 + 50 + \ldots + 626$

(h) $3 + 15 + 35 + 63 + \ldots + 39999$

Lösung:

(a) $\sum_{i=0}^{105} 5 + 4i = \sum_{k=1}^{106} 1 + 4k$

(b) $\sum_{i=1}^{1000} i^2 = \sum_{i=0}^{999} (i+1)^2$

(c) $\sum_{i=1}^{10} 2^i = \sum_{i=0}^{9} 2^{i+1}$

(d) $\sum_{i=1}^{12} 3^i - 5 = \sum_{i=0}^{11} 3^{i+1} - 5$

(e) $\sum_{i=0}^{70} 500 - 7i = \sum_{k=1}^{71} 3 + 7k$

(f) $\sum_{i=5}^{100} i \cdot (i+1) = \sum_{i=1}^{96} (i+4) \cdot (5+i)$

(g) $\sum_{i=5}^{25} 1 + i^2 = \sum_{i=0}^{20} 1 + (i+5)^2$

(h) $\sum_{i=1}^{100} (2i-1) \cdot (2i+1) = \sum_{i=1}^{100} (4i^2 - 1)$

2. Rechenregeln — R7B3FX

Benutzen Sie die Regeln unten um die Summen zu berechnen.

(a) $\sum_{i=0}^{15} 5 + 3i$

(b) $\sum_{i=1}^{10} (3i)^2$

(c) $\sum_{i=0}^{9} 2^{i+1}$

(d) $\sum_{i=1}^{15} i^2 - 5$

(e) $\sum_{i=0}^{9} 50 - 5i$

(f) $\sum_{i=5}^{10} \frac{i \cdot (i+1)}{2}$

(g) $\sum_{i=0}^{12} 1 + (i+3)^2$

(h) $\sum_{i=1}^{11} (3i-1) \cdot (3i+1)$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{15} 5 + 3i &= \sum_{i=1}^{16} 5 + 3 \cdot (i-1) \\ &= \sum_{i=1}^{16} 2 + 3 \sum_{i=1}^{16} i \\ &= 2 \cdot 16 + 3 \cdot \frac{16 \cdot 17}{2} = 440\end{aligned}$$

(b)

$$\sum_{i=1}^{10}(3i)^2 = 9 \cdot \sum_{i=1}^{10} i^2 = 9\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 3465$$

(c)

$$\sum_{i=0}^{9} 2^{i+1} = 2\sum_{i=0}^{9} 2^i = 2 \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2} = 2046$$

(d)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{15} i^2 - 5 &= \sum_{i=1}^{15} i^2 - 5\sum_{i=1}^{15} 1 \\ &= \frac{15 \cdot 16 \cdot 31}{6} - 5 \cdot 15 = 1165\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{9} 50 - 5i &= \underbrace{50}_{i=0} + 50\sum_{i=1}^{9} 1 - \underbrace{5 \cdot 0}_{i=0} - 5 \cdot \sum_{i=1}^{9} i \\ &= 50 + 50 \cdot 9 - 5 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 275\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}\sum_{i=5}^{10} \frac{i \cdot (i+1)}{2} &= \frac{1}{2} \cdot \left\{\sum_{i=5}^{10} i^2 + i\right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{\sum_{i=1}^{10} i^2 - \sum_{i=1}^{4} i^2 + \sum_{i=1}^{10} i - \sum_{i=1}^{4} i\right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6} + \frac{10 \cdot 11}{2} - \frac{4 \cdot 5}{2}\right\} = 200\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{12} 1 + (i+3)^2 &= \sum_{i=1}^{13} 1 + (i+2)^2 = \sum_{i=1}^{13} i^2 + 4i + 5 \\ &= \sum_{i=1}^{13} i^2 + \sum_{i=1}^{13} i + 5\sum_{i=1}^{13} 1 \\ &= \frac{13 \cdot 14 \cdot 27}{6} + 4 \cdot \frac{13 \cdot 14}{2} + 5 \cdot 13 = 1248\end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{11}(3i-1)\cdot(3i+1) &= \sum_{i=1}^{11}9i^2+3i-3i-1\\ &= 9\sum_{i=1}^{11}i^2-\sum_{i=1}^{11}1\\ &= 9\cdot 2\frac{11\cdot 12\cdot 23}{6}-11=4543\end{aligned}$$

Sammlung Rechenregeln:

- Distributiv-Gesetz und Umordnung von endlich viel Summanden

$$\sum_{i=1}^{n}A\cdot a_i = A\sum_{i=1}^{n}a_i \text{ und } \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i$$

- Summe der Einsen

$$\sum_{i=1}^{n}1=n$$

- Summe der Indices

$$\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

- Summe von Quadraten

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

- Summe von Kuben

$$\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{2^2}$$

- Exponentialsumme

$$\sum_{k=0}^{n}r^k=\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

D