Serie 2, Musterlösung

Klasse: 4U, 4Mb, 4Eb Datum: FS 19

1. Binomialkoeffizienten QVHKRQ

Berechnen Sie folgende Ausdrücke ohne Taschenrechner. Es gilt $n \geq 1$.

(a) $\binom{7}{3}$

(b) $\binom{7}{4}$

(c) $\binom{7}{0}$

(d) $\binom{7}{7}$

(e) $\binom{n}{0}$

(f) $\binom{n}{n}$

(g) $\binom{n}{n-1}$

Lösung:

(a) $\binom{7}{3} = 35$

(b) $\binom{7}{4} = 35$

(c) $\binom{7}{0} = 1$

(d) $\binom{7}{7} = 1$

(e) $\binom{n}{0} = 1$

(f) $\binom{n}{n} = 1$

(g) $\binom{n}{n-1} = n$

2. Binomialkoeffizient RUZ9F3

Zeige, dass für $n > k$ und $n, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Lösung:

Wir halten fest:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

anderseits

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot [n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot [k]!}$$

also stimmen die Ausdrücken in der ersten Gleichung und in der zweiten Gleichung überein. Dies ist übrigens eine abstrakte Form um auszudrücken, dass das Pascal-Dreieck symmetrisch ist.

3. Binomialkoeffizient **5BEBY**

Zeige, dass für $n > k$ und $n, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n! \cdot k}{k \cdot (k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)} \\
&= \frac{n! \cdot k}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n! \cdot k + n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

Diese Regel wird "Pascal'sche Regel" genannt.

4. Binomial-Koeffizienten **AFPEAX**

Zeige, dass für $n > k$ und $n, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\binom{n}{k-1} + 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+2}{k+1}$$

Lösung:

Wir verwenden die Regel von Pascal und berechnen zwei Ausdrücke separat:

$$\begin{aligned}
L_1 = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \binom{n+1}{k} \\
L_2 = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} &= \binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} = \binom{n+1}{s} = \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

dabei haben wir beim zweiten Ausdruck $k+1 = s$ substituiert. Beachte, dass L_1+L_2 der Ausdruck ist, der in der Aufgabenstellung gesucht ist. Zusammen erhalten wir

$$L_1 + L_2 = \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1}$$

Wir können $n+1 = m$ und $k+1 = l$ substituieren. Das ergibt

$$\begin{aligned}
L_1 + L_2 &= \binom{m}{l-1} + \binom{m}{l} \\
&= \binom{m+1}{l} = \binom{n+1+1}{k+1} = \binom{n+2}{k+1}
\end{aligned}$$

5. Totozettel 021196

Auf wie viele Arten kann ein Totozettel mit 13 Partien ausgefüllt werden? Beim Toto kann man jeweils tippen,

- dass die erste Mannschaft gewinnt (1)
- dass die zweite Mannschaft gewinnt (2)
- dass es ein unentschieden gibt (0).

Lösung:

Diese drei Ziffern können nun an 13 Stellen eingefüllt werden. Es handelt sich um eine geordnete Stichprobe ($k = 13$) mit Wiederholungen ($n = 3$):

$$V_w(3, 13) = 3^{13} = 1\,594\,323$$

6. Garderobe 698404

Frau Meier hat 3 Hüte, 4 Kleider und 5 Paar Schuhe. Auf wie viele Arten kann sie sich zum Ausgehen anziehen, wenn alles zusammen passt und das Tragen eines Hutes

(a) Pflicht ist.

(b) freiwillig ist.

Lösung:
Wir betrachten die Kleidungsstücke als Teilversuch in einem Ergebnisbaum.

(a) Wenn der Hut eine Pflicht ist, dann hat Frau Meier auf der ersten Stufe 3 (Hüte), dann 4 (Kleider) und schliesslich 5 (Schuhe).
Anzahl Möglichkeiten sich zu kleiden:

$$V = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

(b) Wenn der Hut freiwillig ist, dann hat Frau Meier auf der ersten Stufe 4 (3 Hüte oder kein Hut), dann 4 (Kleider) und schliesslich 5 (Schuhe). Anzahl Möglichkeiten sich zu kleiden:

$$V = 4 \cdot 4 \cdot 5 = 80$$

7. Werfen einer Münze 747636

Eine Münze wird 8 mal geworfen. Welcher Bruchteil der möglichen Ausfälle enthält Kopf und Zahl gleich oft?

Lösung:
Wir berechnen zuerst die Anzahl aller möglicher Ausgänge. Wir haben 8 Resultate,

die entweder Kopf oder Zahl sein können. Das ist eine geordnete Stichprobe ($k = 8$) mit Wiederholungen ($n = 2$).

$$V_w = 2^8 = 256 \; .$$

Jetzt berechnen wir alle Ausgänge, bei denen wir gleich viel Mal Kopf wie Zahl haben, nämlich 4:4. Für die Überlegungen ändern wir den Testvorgang ab: Wir Teilen die Adressen 1 bis 8 an die 4 Münzen, die auf Kopf sein müssen. Für diese vier Münzen haben wir die Wahl, wo wir sie platzieren. Die restlichen 4 Adressen geben wir den übrigen vier Münzen. Hier haben wir keine Wahlmöglichkeiten mehr. Es handelt sich um eine ungeordnete Stichprobe ohne Wiederholungen:

$$C(8;4) = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$$

Also ist der Anteil:

$$p = \frac{70}{256} \approx 0.273$$

8. Zeichenkombinationen 606162

Gegeben seien die folgenden 15 Zeichen. Wie viele Anordnungen gib es jeweils?

(a)
$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6$$

(b)
$$a,\ a,\ a,\ a,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6$$

(c)
$$a,\ a,\ a,\ a,\ b,\ b,\ b,\ b,\ b,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6$$

(d)
$$a,\ a,\ a,\ a,\ b,\ b,\ b,\ b,\ b,\ c,\ c,\ c,\ c,\ c,\ c$$

Lösung:

(a) Hier sind alle 15 Zeichen unterscheidbar. Sie könnten auch mit a, b, c, d, e, ... benannt werden. Wir sollen sie auf 15 Plätze setzen. Es handelt sich um eine Permutation
$$P(15) = 15! = 1\,307\,674\,368\,000$$

(b) Wir gehen vom vorherigen Teilresultat aus. Und überlegen uns, welche Kombinationen jetzt gleich aussehen, wenn die a- ununterscheidbar sind. Wir stellen fest, dass die a- nun untereinander permutiert werden können. Dafür gibt es
$$P(4) = 4! = 24$$
Möglichkeiten. Also
$$P = \frac{P(15)}{P(4)} = 54\,486\,432\,000$$

(c) Wir gehen vom vorherigen Teilresultat aus. Und überlegen uns, welche Kombinationen jetzt gleich aussehen, wenn die b-ununterscheidbar sind. Wir stellen fest, dass die b- nun untereinander permutiert werden können. Dafür gibt es

$$P(5) = 5! = 120$$

Möglichkeiten. Also

$$P = \frac{P(15)}{P(4) \cdot P(5)} = 454\,053\,600$$

(d) Wieder gehen wir vor vorherigen Resultat aus und berechnen:

$$P = \frac{P(15)}{P(4) \cdot P(5) \cdot P(6)} = 630\,630$$

Wir merken uns also: Wenn wir l-Gruppen mit jeweils n_1, n_2, $\ldots$ n_l ununterscheidbaren Elementen haben, dann ist die Anzahl möglicher Permutationen gleich

$$P = \frac{P(n_1 + n_2 + \ \ldots \ + n_l)}{P(n_1) \cdot \ P(n_2) \cdot \ \ldots \ \cdot P(n_l)}$$

9. Buchstabenkombinationen **867441**

Auf wie viele Arten können Buchstaben der folgenden Wörter permutiert werden

(a) BERLIN

(b) PFEFFER

(c) MISSISSIPPI

(d) OBERRHEINDAMPFSCHIFFFAHRTSKAPITÄNSMÜTZE

Lösung:

(a) Permutation von 6 unterscheidbaren Elementen:

$$P(6) = 6! = 720$$

(b) Wir benutzen die Resultate aus der vorherigen Aufgabe. Wir haben den Buchstaben E 2 mal, den Buchstaben F 3 mal, den Buchstaben P 1 mal und den Buchstaben R 1 mal.

$$P = \frac{(2+3+1+1)!}{2! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1} = \frac{5040}{12} = 420\ .$$

(c) Wir haben den Buchstaben I 4 mal, den Buchstaben M 1 mal, den Buchstaben P 2 mal und den Buchstaben S 4 mal.

$$P = \frac{(4+1+2+4)!}{4! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 4!} = \frac{39\,916\,800}{1152} = 34\,650\ .$$

(d) Häufigkeiten:

A	Ä	B	C	D	E	F	H	I	K
3	1	1	1	1	3	4	3	3	1

und

M	N	O	P	R	S	T	Ü	Z
2	2	1	2	3	3	3	1	1

Es ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} P &= \frac{(39)!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1} \\ &= \frac{20397882081197443358640281739902897356800000000}{53747712} \\ &\approx 3.7951 \cdot 10^{38} \end{aligned}$$

10. Fussballteam 090239

Eine Klasse hat 15 Fussballspieler, einer davon heisst Klaus. Auf wie viele Arten kann eine Mannschaft von 11 Spielern zusammengestellt werden

(a) mit Klaus,

(b) ohne Klaus?

Lösung:

(a) Klaus wählen wir in die Mannschaft. Es bleibt uns 14 Spieler auf die übrigen 10 Plätze zu verteilen. Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle (ungeordnete Stichprobe ohne Wiederholungen).

$$C(15, 10) = \binom{14}{10} = \frac{14!}{10! \cdot 4!} = 1001$$

(b) Klaus darf nicht in die Mannschaft. Deshalb blieben nur 14 Spieler, die wir auf 11 Plätze verteilen:

$$C(14, 11) = \binom{14}{3} = \frac{14!}{11! \cdot 3!} = 364$$

11. Anstossen auf Party 876413

Wie viele Personen befinden sich in einer Gesellschaft, wenn beim Anstossen 253 mal die Gläser klirren?

Lösung:

Wir machen zuerst ein vereinfachtes Beispiel: 5 Personen sind an der Party und Stossen an (und es sind Ingenieurinnen/Ingenieure, deshalb machen sie die Prozedur ganz systematisch:

- Die erste Person A stösst mit den 4 weitere an und stellt sich beiseite.
- Die zweite Person B stösst mit den 3 weitere an und stellt sich beiseite.

- C stösst mit den 2 weitere an und stellt sich beiseite.
- D stösst mit E an.

Die Gläser erklingen

$$N = 1 + 2 + 3 + 4 \text{ mal.}$$

Wären es n Personen wäre es

$$N = 1 + 2 + 3 + \ldots (n-3) + (n-2) + (n-1) \text{ mal.}$$

Wir summieren

$$N = (n-1) + 1 \ + (n-2) + 2 \ + (n-3) + 3 + \ldots = \frac{(n-1)}{2} \cdot n \text{ mal.}$$

Wir lösen also die Gleichung $\frac{(n-1)}{2} \cdot n = 253$ nach n, erhalten die quadratische Gleichung $n^2 - n - 512 = 0$ und lösen nach n auf (Mitternachtsformel):

$$n = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 506}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 45}{2} = 23; \, -22$$

Die sinnvolle Lösung ist 23.

12. Parlament **548007**

In einem Parlament sind 3 Parteien vertreten: 60 Liberale, 40 Konservative und 30 Sozialisten.

(a) Wie viele zehner-Kommissionen lassen sich mit dem Verteilschlüssel fünf-drei-zwei bilden?

(b) Wie viele siebner-Kommissionen lassen sich mit dem Verteilschlüssel drei-zwei-zwei bilden?

Lösung:

(a) Zehnerkommissionen: Für die Wahl der 5 Liberalen haben wir $60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56$ Möglichkeiten. In welcher Reihenfolge sie gewählt werden spielt keine Rolle. Also teilen wir durch die Anzahl der Möglichkeiten, wie man 5 Personen auf 5 Sitzen anordnen kann:

$$N_L = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56}{5!}$$

Für die anderen Parteien wenden wir das selbe Schema an:

$$\begin{aligned} N_K &= \frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3!} \\ N_S &= \frac{30 \cdot 29}{2!} \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also N Möglichkeiten:

$$N = N_L \cdot N_K \cdot N_S = 2.35 \cdot 10^{13}$$

(b) Siebnerkommissionen:

$$\begin{aligned} N_L &= \frac{60 \cdot 59 \cdot 58}{3!} \\ N_K &= \frac{40 \cdot 39}{2!} \\ N_S &= \frac{30 \cdot 29}{2!} \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also N Möglichkeiten:

$$N = N_L \cdot N_K \cdot N_S = 1.18 \cdot 10^{10} \ .$$

13. Dreistellige Zahlen **894181**

Wie viele dreistellige Zahlen aus lauter verschiedenen Ziffern gibt es im Dezimalsystem? (ohne führende Nullen).

Lösung:

Die Ziffern sollen verschieden sein, deshalb entscheiden wir uns dafür die Adressen 1 bis 3 den Ziffern 0 bis 9 zuzuordnen.

- Bei der Adresse der ersten Ziffer können wir wählen zwischen 1 bis 9 (9 Möglichkeiten).
- Bei der Adresse der zweiten Ziffer können wir wählen zwischen 0 und den übrigen 8 Ziffern (9 Möglichkeiten)
- Bei der Adresse der dritten Ziffer können wir wählen zischen den 8 verbleibenden Ziffern.

Das gibt insegsamt $N = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 240$ Möglichkeiten.

14. Führende Nullen **893312**

Wie viele echte (ohne führende Nullen) siebenstellige Zahlen können aus den Ziffern 1, 2, 3, 3, 0, 0, 0 gebildet werden?

Lösung:

Wir berechnen die Anzahl aller siebenstellige Zahlen (auch mit führenden Nullen) und ziehen dann die Anzahl der Zahlen ab, die führende Nullen haben:

$$N_7 = \frac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$$

Nun betrachten wir die Anzahl der Zahlen mit führenden Nullen: Um sie zu bilden, müssen wir eine 0 auf die erste Stelle setzen. Es bleiben 2 Nullen und insgesamt 6 Zahlen zu verteilen auf 6 Plätze:

$$N_f = \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot} = 180$$

Also

$$N = 420 - 180 = 240 \ .$$

15. Sechsen würfeln 724169

Es werden 5 Würfel gleichzeitig geworfen.

(a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, genau eine Sechs zu erhalten?

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, genau zwei Sechen zu erhalten?

(c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, mindestens eine Sechs zu erhalten?

(d) Drücken sie die Zahlen aus den vorherigen Aufgaben im Verhältnis (in %) zu allen möglichen Ausfälle an.

Lösung:

(a) Wir skizzieren einen Ereignisbaum. Wir stellen zuerst fest, dass es unsere Resultate nicht beeinflusst, ob wir die Würfel gleichzeitig oder nacheinander werfen. Wir stellen uns den Versuch deshalb als anders dar, nämlich wie folgt: "Ein Würfel wird 5 Mal nacheinander geworfen".
Die Äste, die genau eine Sechs enthalten, zeichnen sich dadurch aus, dass bei den sechs Stufen genau eine Sechs vorkommt. Statt die Äste mit genau einer sechs zu zählen überlegen wir, wie wir diese Äste generieren können: Sie enthalten eine Sechs, die auf eine der 5 Stufen platziert werden soll (5 Möglichkeiten). Auf die übrig gebliebenen 4 Stufen können wir die Ereignisse 1, 2, 3, 4 und 5 setzen (je 5 Möglichkeiten):

$$N_1 = 5 \cdot 5^4 = 3125$$

(b) Die Äste, die genau zwei Sechsen enthalten, zeichnen sich dadurch aus, dass bei den sechs Stufen genau zwei Sechen vorkommen: Sie enthalten zwei Sechen, die auf eine der 5 Stufen platziert werden soll ($5 \cdot 4$ Möglichkeiten). Auf die übrig gebliebenen Stufen können wir die Ereignisse 1, 2 ,3, 4 und 5 setzen (je 5 Möglichkeiten):

$$N_2 = \binom{5}{2} \cdot 5^3 = 1250$$

(c) Die Äste, der vorherigen Unteraufgaben enthalten schon mindestens eine Sechs. Aber es gibt noch mehr Äste:

$$\begin{aligned}
\text{genau 3 Sechsen:} \quad N_3 &= \binom{5}{3} \cdot 5^2 &= 250 \\
\text{genau 4 Sechsen:} \quad N_4 &= \binom{5}{4} \cdot 5^1 &= 25 \\
\text{genau 5 Sechsen:} \quad N_5 &= \binom{5}{5} \cdot 5^0 &= 1
\end{aligned}$$

Insgesamt sind dies

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 = 46\,51$$

(d) Insgesamt gibt es $N_t = 6^5 = 7776$ mögliche Ausfälle.

$$\begin{aligned}
N_1/N_t &= 40.2\ \% \\
N_2/N_t &= 16.1\ \% \\
N/N_t &= 59.8\ \%
\end{aligned}$$

16. Glücksrad **055470**

Bei einem Glücksrad (3 unterscheidbare Felder am Rad) errät jemand von bei 10 mal Drehen 7 Mal den Ausfall richtig. Er meint er hat hellseherische Fähigkeiten. Beurteilen Sie diese Aussage. Gehen Sie dafür Schrittweise vor:

(a) Berechnen Sie die gesamte Anzahl der möglichen Ausfälle.

(b) Berechnen Sie die Anzahl Möglichkeiten um genau 1 Ausfall richtig zu erraten.

(c) Berechnen Sie die Anzahl Möglichkeiten um genau 2 Ausfälle richtig zu erraten.

(d) Berechnen Sie daraus die Anzahl Möglichkeiten mindestens 7 Ausfälle richtig zu erraten.

(e) Drücken Sie die Zahlen aus den vorherigen Aufgaben im Verhältnis (in %) zu allen möglichen Ausfälle an.

Lösung:

(a) Gesamte Anzahl der möglichen Ausfälle: $N_t = 3^{10} = 59\,049$

(b) Der Treffer kann beim ersten, zweiten, ... zehnten Drehen passieren. Wir haben also 10 Möglichkeiten ihn zu plazieren. Die verbleiben 9 freien Stufen besetzen wir mit den 2 Elementen, die der Wahrsager dort nicht getippt hat (er *muss* ja dort immer falsch tippen, sonst hätten wir mehr als einen Treffer).

$$N_1 = 10 \cdot 2^9 = \binom{10}{1} \cdot 2^9 = 5120$$

(c) Für den ersten Treffen habe wir 10 Möglichkeiten zum Platzieren, für den zweiten noch 9. Die Treffer sind ununterscheidbar ($\binom{10}{2}$). Die verbleiben 8 freien Stufen besetzen wir mit den 2 Elementen, die der Wahrsager dort nicht getippt hat:

$$N_2 = \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 2^8 = \binom{10}{2} \cdot 2^8 = 11\,520$$

(d) Sollen mindestens 7 Ausfälle richtig hervorgesagt werden, brauchen wir

$$N = N_7 + N_8 + N_9 + N_{10}$$

Wir berechnen nach dem obigen Schema:

$$\begin{aligned}
&\text{genau 7 Treffer:} \quad N_7 = \binom{10}{7} \cdot 2^3 = 960 \\
&\text{genau 8 Treffer:} \quad N_8 = \binom{10}{8} \cdot 2^2 = 180 \\
&\text{genau 9 Treffer:} \quad N_9 = \binom{10}{9} \cdot 2^1 = 20 \\
&\text{genau 10 Treffer:} \quad N_{10} = \binom{10}{10} \cdot 2^0 = 1
\end{aligned}$$

Insgesamt ergeben sich also $N = 1\,161$

(e) Im Verhältnis zu allen möglichen Ausfällen erhalten wir

$$\begin{aligned} N_1/N_t &= 8.7\ \% \\ N_2/N_t &= 19.5\ \% \\ N/N_t = &= 2.0\ \% \end{aligned}$$

Da der Anteil N/N_t=2% sehr klein ist, wo die Hervorsagen gelingen würden, falls nur zufällig geraten würde, ist dieses Experiment ein starker Hinweis, dass die Person hellseherische Fähigkeiten hat. Wir werden wieder auf dieses Experiment zurückkommen und diese Aussage präzisieren.