Serie 3, Musterlösung

Klasse: 4U, 4Mb, 4Eb — Datum: FS 19

1. Nüsse **900218**

Von 10 Nüssen seien 4 verdorben. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Griff blindlings 3 gute heraus zu greifen?

Lösung:

Total Anzahl Möglichkeiten 10 Nüsse auf 3 Plätze zu verteilen:

$$m = 10 \cdot 9 \cdot 8$$

Anzahl Möglichkeiten 6 gute Nüsse auf 3 Plätze zu verteilen:

$$g = 6 \cdot 5 \cdot 4$$

Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{g}{m} = \frac{120}{720} = \frac{1}{6} \approx 0.16\dot{6}\ .$$

Alternativ:

Lösung kann auch mit ungeordneten Stichproben berechnet werden: Total Anzahl Möglichkeiten (10 Nüsse auf 3 Plätze zu verteilen):

$$m = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!}$$

Anzahl Möglichkeiten 6 gute Nüsse auf 3 Plätze zu verteilen:

$$g = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!}$$

2. Wochentage **475899**

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass 7 beliebige Studierende an 7 verschiedenen Wochentagen geboren sind, wenn angenommen wird, dass alle Wochentage gleichberechtigt sind?

Lösung:

Total Anzahl Möglichkeiten 7 Wochentage den 7 Studierenden zuzuordnen (mit Zurücklegen):

$$m = 7^7 = 823\,543$$

Anzahl Möglichkeiten 7 verschiedene Wochentage den 7 Studierenden zuzuordnen (ohne Zurücklegen):

$$g = 7! = 5\,040$$

Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{g}{m} = \frac{5\,040}{823\,543} \approx 0.00612\ .$$

Alternativ:

Wir stellen uns das Experiment in 7 Stufen vor:

(a) Student 1 nennt den Tag, an dem er geboren ist. Wahrscheinlichkeit, dass es kein Tag ist, der vorher schon genannt wurde: $p_1 = \frac{7}{7} = 1$
(b) Student 2 nennt den Tag, an dem er geboren ist. Wahrscheinlichkeit, dass es kein Tag ist, der vorher schon genannt wurde: $p_2 = \frac{6}{7}$
(c) Student 3 nennt den Tag, an dem er geboren ist. Wahrscheinlichkeit, dass es kein Tag ist, der vorher schon genannt wurde: $p_3 = \frac{5}{7}$
(d) Student 4 nennt den Tag, an dem er geboren ist. Wahrscheinlichkeit, dass es kein Tag ist, der vorher schon genannt wurde: $p_4 = \frac{4}{7}$
(e) Student 5 nennt den Tag, an dem er geboren ist. Wahrscheinlichkeit, dass es kein Tag ist, der vorher schon genannt wurde: $p_5 = \frac{3}{7}$
(f) Student 6 nennt den Tag, an dem er geboren ist. Wahrscheinlichkeit, dass es kein Tag ist, der vorher schon genannt wurde: $p_6 = \frac{2}{7}$
(g) Student 7 nennt den Tag, an dem er geboren ist. Wahrscheinlichkeit, dass es kein Tag ist, der vorher schon genannt wurde: $p_7 = \frac{1}{7}$

Wahrscheinlichkeit, dass alle Stufen erfolgreich sind:

$$p = p_1 \cdot p_2 \; \ldots \; \cdot p_6 \cdot p_7 = \frac{5\,040}{823\,543} \approx 0.00612 \; .$$

3. Mindestens eine 6 **793891**

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 4 Würfen mit einem symmetrischen Würfel mindestens einmal eine Sechs auftritt?

Lösung:

Total Anzahl Möglichkeiten bei 4 Würfen:

$$m = 6^4 = 1296$$

Anzahl Möglichkeiten genau eine 6 zu würfeln:

$$g_1 = 4 \cdot 5^3 = 500$$

Anzahl Möglichkeiten genau zwei 6 zu würfeln:

$$g_2 = \binom{4}{2} \cdot 5^2 = 150$$

und weiter:

$$g_3 + g_4 = \binom{4}{3} \cdot 5^1 + \binom{4}{4} \cdot 5^0 = 20 + 1$$

Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{g}{m} = \frac{671}{1296} \approx 0.518 \; .$$

Alternativ:

Gegenwahrscheinlichkeit:

$$p(\text{mind. eine Sechs}) = 1 - p(\text{keine Sechs})$$

4 stufiges Experiment, bei jeder Stufe ist die Wahrscheinlichkeit *keine* Sechs zu würfeln $p = 5/6$.

$$p(\text{mind. eine Sechs}) = 1 - (5/6)^4 = \frac{671}{1296} \approx 0.518$$

4. Glühbirnen 881970

Unter 20 Glühbirnen sind 6 unbrauchbar. Es werden 6 geprüft. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dabei 6 gute zu finden?

Lösung mit geordneten Stichproben:

Total Anzahl Möglichkeiten 20 Birnen auf 6 Plätze zu verteilen (ohne Zurücklegen):

$$m = \frac{20!}{(20-6)!} = 27\,907\,200$$

Anzahl Möglichkeiten 6 gute Birnen auf 6 Plätze zu verteilen:

$$g = \frac{14!}{(14-6)!} = 2\,162\,160$$

Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{g}{m} = \frac{1001}{12\,920} \approx 0.0775\ .$$

Lösung mit ungeordneten Stichproben:

Total Anzahl Möglichkeiten 20 Birnen auf 6 Plätze zu verteilen (ohne Zurücklegen):

$$m = \binom{20}{6} = 38\,760$$

Anzahl Möglichkeiten 6 gute Birnen auf 6 Plätze zu verteilen:

$$g = \binom{14}{6} = 3\,003$$

Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{g}{m} = \frac{1001}{12\,920} \approx 0.0775\ .$$

Lösung Experiment 6 Stufen:

Wir denken uns die Stichproben als Experiment mit 6 Stufen:

(a) Lampe 1 wird gezogen. Wahrscheinlichkeit, dass sie funktioniert: $p_1 = \frac{14}{20}$

(b) Lampe 2 wird gezogen. Wahrscheinlichkeit, dass sie funktioniert: $p_2 = \frac{13}{19}$

(c) Lampe 3 wird gezogen. Wahrscheinlichkeit, dass sie funktioniert: $p_3 = \frac{12}{18}$

(d) Lampe 4 wird gezogen. Wahrscheinlichkeit, dass sie funktioniert: $p_4 = \frac{11}{17}$

(e) Lampe 5 wird gezogen. Wahrscheinlichkeit, dass sie funktioniert: $p_5 = \frac{10}{16}$

(f) Lampe 6 wird gezogen. Wahrscheinlichkeit, dass sie funktioniert: $p_6 = \frac{9}{15}$

Wahrscheinlichkeit, dass alle Stufen erfolgreichsind

$$p_t = p_1 \cdot p_2 \cdot \ \ldots \ \cdot p_5 \cdot p_6 = \frac{1001}{12\,920} \approx 0.0775$$

5. Zahlenschloss 548253

Ein Zahlenschloss hat 5 Räder mit je 6 Buchstaben. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Schloss aufgeht, wenn eine zufällige Buchstabenkombination eingestellt wird? **Lösung:**

Total Anzahl möglicher Buchstabenkombinationen

$$m = 6^5 = 7\,776$$

Anzahl richtige Kombinationen

$$g = 1$$

Wahrscheinlichkeit

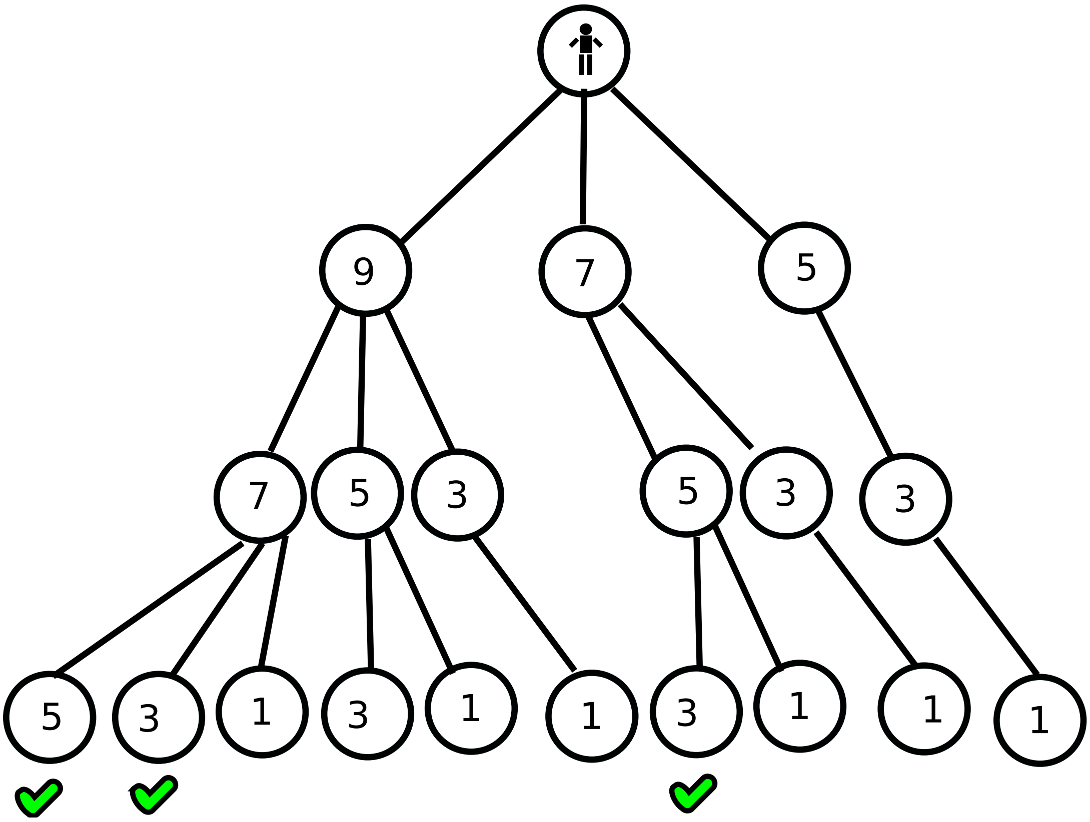
$$p = \frac{g}{m} = \frac{1}{7\,776} \approx 0.000129\ .$$

6. Dreieck **080641**

Wir haben fünf Strecken mit den Längen von jeweils 1, 3, 5, 7 und 9 Einheiten. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man mit drei willkürlich ausgewählten Strecken ein Dreieck bilden kann.

Lösung:

Die Bedingung, dass ein Dreieck entsteht ist $l_1 < l_2 + l_3$, d.h. eine Strecke muss kürzer sein als die Summe der anderen. Wir wählen zuerst die längste Strecke, dann eine kürzere und schliesslich die kürzeste. So entsteht der Ereignisbaum:



Total Anzahl Kombinationen

$$m = 10$$

Anzahl richtige Kombinationen

$$g = 3$$

Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{g}{m} = \frac{3}{10}\ .$$

7. Wahrscheinlichkeiten beim Würfeln **162509**

Ein symmetrischer Würfel wird sechs mal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Resultate:

(a) Jede Zahl gerade
(b) Keine Sechs
(c) Weder eine Fünf noch eine Sechs.

Lösung:

(a) $p = \left(\frac{3}{6}\right)^6 \approx 0.0156$
(b) $p = \left(\frac{5}{6}\right)^6 \approx 0.335$
(c) $p = \left(\frac{4}{6}\right)^6 \approx 0.0878$

8. Wahrscheinlichkeiten beim Würfeln **162509**

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem symmetrischen Würfel bei zwei Würfen mindestens einmal eine Sechs zu erhalten?

Lösung:
Wahrscheinlichkeit 2 Sechsen zu würfeln

$$p_2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 1/36$$

Wahrscheinlichkeit genau 1 Sechs zu würfeln

$$p_1' = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$$

Es gibt 2 Möglichkeiten genau 1 Sechs zu würfeln:

$$p_1 = 2 \cdot p_1' = \frac{5}{18}$$

Also

$$p = p_1 + p_2 = \frac{11}{36} \approx 0.3056$$

2. Lösungsmöglichkeit:
Total Anzahl Kombinationen

$$m = 6^2$$

Anzahl günstige Kombinationen (eine Sechs oder 2 Sechsen):

$$g = g_1 + g_2 = 2 \cdot 5 + 1$$

Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{g}{m} = \frac{11}{36} \approx 0.306\ .$$

9. Ölbohrungen **274503**

Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem gewissen Gebiet eine Ölbohrung fündig wird, sei p = 0.1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben 10 Bohrungen mindestens einen Erfolg?

Lösung:
Anstatt alle Möglichkeiten (genau 1 Erfolg, genau 2 Erfolge, etc.) zu addieren, ist

es einfacher mit der Gegenwahrscheinlichkeit zu rechen, d.h. wir berechnen q_t, Die Wahrscheinlichkeit, dass 10 Bohrungen keinen Erfolgt haben. Dann ist die gesucht Wahrscheinlichkeit

$$p_t = 1 - q_t$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Misserfolg ist $q = 1 - p = 0.9$. Die Wahrscheinlichkeit für 10 Misserfolge nacheinander ist

$$q_t = 0.9^{10} \approx 0.348678$$

Also

$$p_t = 0.651$$

10. Tontaubenschiessen **153300**

Die Herren A, B und C treffen eine fliegende Tontaube mit der Wahrscheinlichkeit $p_A = 0.5$, $p_B = 2/3$ und $p_C = 0.75$. Eine Tontaube fliegt vorbei, und sie schiessen alle gleichzeitig. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Taube getroffen wird?

Lösung:

Wir Rechnen mit der Gegenwahrscheinlichkeit:

$$p_t = 1 - q_t$$

dabei ist q_t die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Herren die Tontaube verfehlen. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist

$$q_t = (1 - 0.5) \cdot (1 - 2/3) \cdot (1 - 0.75) \approx 0.041\dot{6}\ .$$

Also

$$p_t \approx 0.958$$

11. Wahrscheinlichkeit Treffer **137240**

Ein Schuss trifft das Ziel mit der Wahrscheinlichkeit p =0.5. Wie viele Schüsse sind nötig, um mit 99% Wahrscheinlichkeit mindestens einmal zu treffen?

Lösung:

Hier ist es einfacher mit der Gegenwahrscheinlichkeit zu rechnen: Die Wahrscheinlichkeit nach n Schüssen nie getroffen zu haben ist

$$q_t = (1 - p)^n$$

Also ist die Wahrscheinlichkeit nach n Schüssen mindestens ein Mal getroffen haben

$$p_t = 1 - q_t$$

Wir setzen die Zahlen aus der Aufgabe zusammen:

$$0.99 = 1 - (1 - p)^n = 1 - (0.5)^n \ \Rightarrow\ 0.01 = (0.5)^n$$

Wir lösen die Gleichung durch Logarithmierung:

$$\log(0.01) = n \cdot \log(0.5) \ \Rightarrow\ n = \frac{\log(0.01)}{\log(0.5)} \approx 6.64$$

Also sind mindestens 7 Versuche nötig.

12. Jumbo Jet **AV1ZZI**

Ein Flugzeug hat an jedem Flügel zwei Motoren. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Motor beim Flug über den Atlantik versagt, sei q. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es über dem Ozean abstürzt, wenn

(a) für einen Flug mindestens zwei Motoren funktionieren müssen,

(b) an jedem Flügel mindestens ein Motor intakt sein muss?

Lösung:

(a) Wir notieren die Wahrscheinlicheiten, für die Ausfälle von der Motoren

Ausfälle	0	1	2	3	4
Wahrsch. für ein Ereignis	q^4	$q^3(1-q)$	$q^2(1-q)^2$	$q(1-q)^3$	$(1-q)^4$
Anzahl Realisierungen	1	4	6	4	1
Wahrscheinlichkeit total	$1 \cdot q^4$	$4 \cdot q^3(1-q)$	$6 \cdot q^2(1-q)^2$	$4 \cdot q(1-q)^3$	$(1-q)^4$

Für den Absturz müssen genau 4 oder 3 Motoren ausfallen, also $p(\text{Absturz}) = (1-q)^4 + 4 \cdot q(1-q)^3$

(b) Durch die Bedingung, dass an jedem Flügel mindestens ein Motor intakt sein muss, wird das Flugzeug verletzlicher: Es stürzt ab, wenn genau 4 oder 3 Motoren ausfallen — wie oben — aber auch, wenn 2 Motoren an einem Flügel ausfallen. Wir nennen die Motoren A,B,C und D, die fatalen Ausfällen markieren wir: AB(*), AC, AD, BC, BD und CD(*). Es sind also nur zwei der insgesamt 6 möglichen Realisierungen, also $p(\text{Absturz}) = (1-q)^4 + 4 \cdot q(1-q)^3 + 2 \cdot q^2(1-q)^2$