Serie 5, Musterlösung

Klasse: 4U, 4Mb, 4Eb Datum: FS 19

1. Ableitung und Summenzeichen **974558**

Leiten Sie die beiden Reihen ab und formulieren Sie einen Zusammenhang zwischen $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$ und $g(x)$.

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$$

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f(x)' &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (2j) \cdot \frac{x^{2j-1}}{(2j)!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \underbrace{\frac{2j}{(2j)!}}_{=*} \cdot x^{2j-1} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j-1}}{(2j-1)!} \end{aligned}$$

Bei * wurde werwendet, dass $\frac{2j}{(2j)!} = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ \frac{1}{(2j-1)!} & j > 0 \end{cases}$.

Jetzt führen wir eine Verschiebung der Indizes durch, denn wir wollen die Summation bei $j = 0$ beginnen: $j = k + 1$, d.h. $k = j - 1$. Ausserdem ergibt sich

$$j = 1 \;\Rightarrow k = (0-1) - 1 = 0 \text{ und } 2j - 1 = 2(k+1) - 1 = 2k + 2 - 1 = 2k + 1$$

Wir setzen das in die Summe ein und erhalten

$$f(x)' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Wir vergleichen mit der Aufgabenstellung und sehen, dass $f'(x) = -g(x)$.
Genau gleich erhalten wir

$$g(x)' = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$$

oder aus dem Vergleich mit der Aufgabenstellung $g'(x) = f(x)$. Tatsächlich sind $f(x) = \cos(x)$, und $g(x) = \sin(x)$ — es wurde die Potenzreihen-Entwicklung verwendet.

2. Lebensversicherung **014585**

Eine Versicherung schliesst mit 15 Kunden im Alter von 25 Jahren eine Lebensversicherungsverträge ab. Nach der Sterbetafel beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde die nächsten 30 Jahre überlebt bei 0.8. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass in 30 Jahren

(a) noch genau 6 Kunden leben,
(b) alle 15 Kunden leben,
(c) wenigstens 6 Kunden noch am Leben sind.

Lösung:
Binomial-Verteilung mit $p = 0.8$, $n = 15$.

(a) $P(X = 6) = 0.00067176$
(b) $P(X = 15) = 0.03518437$
(c) $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0.000113226 = 0.999887$

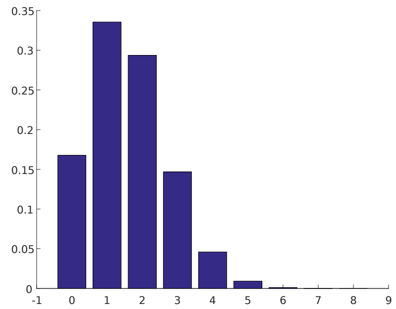
3. Binomialverteilte Zufallsvariable **028203**

X sei eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern $n = 8$ und $p = 0.2$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilungstabelle und erstellen Sie eine Visualisierung (Stab- oder Balkendiagramm).
(b) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten: $P(X = 0)$, $P(X \geq 5)$ und $P(1 \leq X \leq 3)$.

Lösung:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	0.1678	0.3355	0.2936	0.1468	0.0459	0.0092	0.0011	0.0001	$2.6 \cdot 10^{-6}$



Die Wahrscheinlichkeiten sind

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= 0.1678 \\ P(X \geq 5) &= 0.0092 + 0.0011 + 0.0001 + 2.6 \cdot 10^{-6} = 0.0104 \\ P(1 \leq X \leq 3) &= 0.3355 + 0.2936 + 0.1468 = 0.7759 \end{aligned}$$

4. Binomialverteilung 212798

(a) Jemand wettet, dass er bei 12 Würfen mit einer Münze genau 4 mal Zahl erziele. Wie gross ist die Gewinnwahrscheinlichkeit?

(b) Was müsst er tippen um die höchsten Gewinnchancen zu erzielen?

Lösung:
Wir betrachtetn die Gewinnwahrscheinlichkeit für die Anzahl Zahl (gemäss der Binomialverteilung):

x_i	0	1	2	3	4	5	
p_i	0.0002	0.0029	0.0161	0.0537	0.1208	0.1934	
x_i	6	7	8	9	10	11	12
p_i	0.2256	0.1934	0.1208	0.0537	0.0161	0.0029	0.0002

(a) Für 4 mal Zahl ist die Wahrscheinlichkeit bei $n = 12$ ist $P(X = 4) = 0.1208$

(b) Die höchsten Gewinnchancen hat er beim Erwartungswert

$$\mu = 6 \text{ also} P(X = 6) = 0.2256\ .$$

5. Würfeln 754394

Ein homogener Würfel wird 300-mal geworfen. Wie oft können wir dabei erwarten, dass eine durch 3 teilbare Augenzahl auftritt?

Lösung:

$$\mu = n \cdot p = 300 \cdot \frac{2}{6} = 100$$

6. Herstellergarantie 139668

Die Herstellung von Gewindeschrauben erfolge mit einem Ausschussanteil von 2 %. Wie viele nicht brauchbare Schrauben befinden sich im Mittel in einer Schachtel mit 250 Schrauben? Wie gross sind Varianz σ^2 und Standardabweichung s dieser Binomialverteilung?

Lösung:

$$\mu = n \cdot p = 250 \cdot \frac{2}{100} = 5$$
$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 250 \cdot \frac{2}{100} \cdot \frac{98}{100} = 4.9$$
$$\sigma = \sqrt{4.9} = 2.2136$$

7. Herstellergarantie 587843

Ein Hersteller garantiert, dass nur 0.1% der Batterienzellen defekt sind. Für eine Lieferung von 500 Zellen berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) keine Zelle defekt ist.

(b) genau 1 Zelle defekt ist.

(c) genau 2 Zellen defekt sind.

(d) genau 3 Zellen defekt sind.

Lösung:
Binomial-Verteilung $n = 500$, $p = 0.1$.

(a) keine Zelle defekt: $p_0 = 0.606378945$

(b) genau 1 Zelle defekt: $p_1 = 0.303492965$

(c) genau 2 Zellen defekt: $p_2 = 0.075797292$

(d) genau 3 Zellen defekt: $p_3 = 0.012594945$

8. Automarke **DHDX1G**

Ein Autohersteller befürchtet, dass weniger als 4 von 5 Personen die Automarke kennen. Die Stichprobe mit 200 Teilnehmern ergibt 168 Personen, die die Marke kennen. Formulieren Sie eine Nullhypothese und untersuchen Sie, ob sie zu verwerfen ist (Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$).

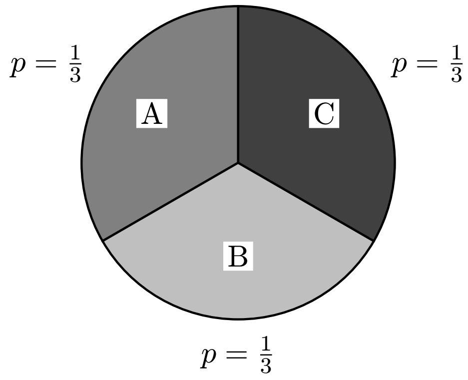
Lösung:
Nullhypothese: Der Bekanntheitsgrad ist $p = \frac{4}{5}$.
Berechnung der Wahrscheinlichkeit unter Voraussetzung der Nullhypothese (Binomialverteilung mit $n = 200$):

x_i	149.	150.	151.	152.	153.	154.	155.	156.
$\sum_{x \leq x_i} p_k$	0.03	0.05	0.07	0.09	0.13	0.17	0.21	0.26
x_i	161.	162.	163.	164.	165.	166.	167.	168.
$\sum_{x \leq x_i} p_k$	0.6	0.67	0.73	0.78	0.83	0.876105	0.91	0.9368

Unter Voraussetzung der Nullhypotese ist die Wahrscheinlichkeit, dass 168 oder mehr Personen die Marke kennen $P_0 = 1 - 0.9368 = 0.0632$. P_0 ist grösser als das Signifikanzniveau, d.h. die Irrtumswahrscheinlichkeit bei 168 gemessenen Personen, die die Marke kennen, ist immer noch höher als verlangt: Statistischer Schluss: Der Bekannheitsgrad liegt unter $p = 4/5$.
Dieser Resultat kommt zustande, weil der Umfang der Stichprobe klein ist. Schon ein doppelt so grosser Datensatz (336 von 400 kennen die Marke, Verhältnis 336/400 gleich wie in ursprünglicher Aufgabenstellung) erlaubt die Nullhypothese anzunehmen, denn $1 - P(X = 336) = 0.0175$,

9. Glückrad Test **078474**

Jemand behauptet aussersinnliche Wahrnehmungen zu besitzen. Um diese Behauptung zu überprüfen, wird das Glücksrad zehn Mal gedreht. Die Versuchsperson errät sieben Ausfälle richtig. Formulieren Sie eine Nullhypothese und untersuchen Sie, ob sie auf dem Signifikanzniveau 5% zu verwerfen ist?



Lösung:

Nullhypothese: Er errät die Zahlen zufällig. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $p = 1/3$.

Berechnung der Wahrscheinlichkeit unter Voraussetzung der Nullhypothese:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0.0173	0.0867	0.195	0.260	0.228	0.137

x_i	6	7	8	9	10
p_i	0.0569	0.0163	0.00305	0.000339	$1.69 \cdot 10^{-5}$

$$P_0 = p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} = 0.01966 \approx 0.02$$

Statistischer Schluss: P_0 ist kleiner als das Signifikanzniveau. Also hat die Person offenbar eine Möglichkeit die Resultate vorherzusehen.