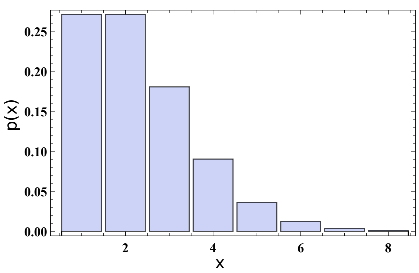
Serie 6, Musterlösung

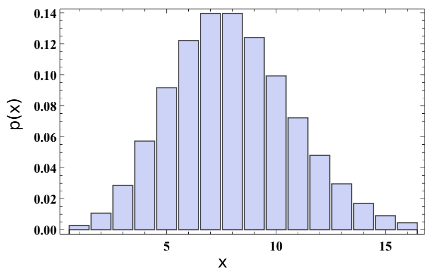
Klasse: 4U, 4Mb, 4Eb — Datum: FS 19

1. Poissonverteilung — 233857

Zeichnen Sie je ein Histogramm für die Poissonverteilung mit $\mu = 2$ und $\mu = 8$.

Lösung:





2. Telefonzentrale — 878030

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teilnehmer im Verlaufe einer Stunde bei einer Telefonzentrale anruft, betrage 1%. Die Zentrale bedient 300 Teilnehmer. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass während einer Stunde genau vier Teilnehmer anrufen?
Vergleichen Sie mit dem Wert aus der Binomialverteilung und geben sie die Abweichung an.

Lösung:
Der Erwartunswert ist $\mu = n \cdot p = 300 \cdot 0.01 = 3$. Daraus berechnen wir mit der Poissonverteilung

$$P(X = 4) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} = \frac{e^{-3}3^4}{4!} = 0.1680$$

In der Binomialverteilung ergibt sich

$$P(X = 4) = \binom{300}{4} 0.01^4 \cdot (1 - 0.01)^{100-4} = 0.1689$$

Die Abweichung ist 0.000846.

3. Fehlerhafte Teile — 934049

Eine Firma stellt gleichartige Zubehörteile für Kraftfahrzeuge in grosser Zahl her. Wir wissen, dass im Mittel 0.5% fehlerhaft sind. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lieferung von 1000 genau 10 schadhafte Stücke enthält? (Poisson-Verteilung)

Lösung:
Der Erwartunswert ist $\mu = n \cdot p = 1000 \cdot 0.005 = 5$. Daraus berechnen wir mit der Poissonverteilung

$$P(X = 10) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} = \frac{e^{-5}5^{10}}{10!} = 0.0181$$

4. Ostern und Pfingsten **159195**

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von einer Gruppe mit 730 Personen wenigstens drei am Oster- oder Pfingstsonntag geboren sind, wenn die Geburtstage zufällig verteilt sind?

Lösung:

Der Erwartunswert ist $\mu = n \cdot p = 730 \cdot \frac{2}{365} = 4$. Daraus berechnen wir mit der Poissonverteilung

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= 0.0183156 \\ P(X = 1) &= 0.0732626 \\ P(X = 2) &= 0.146525 \end{aligned}$$

Wir arbeiten nun mit der Gegenwahrscheinlichkeit

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 0.7619$$

5. Unfälle in der Stadt **681325**

Eine Stadt hat durchschnittlich zwei schwere Unfälle pro Woche. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für mehr als fünf Unfälle in einer Woche?

Lösung:

Der Erwartunswert ist gegeben $\mu = 2$. Daraus berechnen wir mit der Poissonverteilung

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= 0.135335 \\ P(X = 1) &= 0.270671 \\ P(X = 2) &= 0.270671 \\ P(X = 3) &= 0.180447 \\ P(X = 4) &= 0.0902235 \\ P(X = 5) &= 0.0360894 \end{aligned}$$

Wir arbeiten nun mit der Gegenwahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(X > 5) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) - P(X = 4) - P(X = 5) \\ &= 0.0165 \end{aligned}$$

6. Hafen **718860**

In einem Hafen laufen wöchentlich im Mittel fünf Lastschiffe ein. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Mittelwert nächste Woche übertroffen wird?

Lösung:

Der Erwartunswert ist gegeben $\mu = 5$. Daraus berechnen wir mit der Poissonverteilung

$$\begin{aligned} P(X=0) &= 0.00673795 \\ P(X=1) &= 0.0336897 \\ P(X=2) &= 0.0842243 \\ P(X=3) &= 0.140374 \\ P(X=4) &= 0.175467 \\ P(X=5) &= 0.175467 \end{aligned}$$

Wir arbeiten nun mit der Gegenwahrscheinlichkeit

$$P(X>5) = 1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)-P(X=3)-P(X=4)-P(X=5) = 0.384$$

7. Farbenblind **718860**

Ein Prozent der Bevölkerung ist farbenblind. Welchen Umfang muss eine Stichprobe mindestens haben, damit sie mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens eine farbenblinde Person hat? (Poissonverteilung)

Lösung:

Wir wollen die Wahrscheinlichkeit für eine Stichprobe mit n Elementen und $p = 0.01$, also

$$P(X \geq 1)$$

Es ist einfacher mit der Gegenwahrscheinlichkeit zu rechnen:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$$

Also mit der Poissonverteilung $\mu = n \cdot p = n \cdot 0.01$:

$$1 - \frac{e^{-n\cdot 0.01}(n \cdot 0.01)^0}{0!} = 0.95 \;\Rightarrow\; e^{-n\cdot 0.01} = 0.05$$

Wir logarithmieren

$$\log(e^{-n\cdot 0.01}) = \log(0.05) \;\Rightarrow\; -n \cdot 0.01 = \log(0.05)$$

also

$$n = -\frac{\log(0.05)}{0.01} = 299.573$$

Also muss die Stichprobe aus mindestens 300 Personen bestehen.

8. Over booking **718860**

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fluggast, der einen Platz reserviert hat, nicht zum Flug erscheint, beträgt 4%. Die Fluggesellschaft weiss dies und verkauft 75 für 73 verfügbare Plätze.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Plätze besetzt sind und niemand auf den nächsten Flug warten muss?

Vergleichen Sie die Werte aus der Poissonverteilung mit denen der Binomialverteilung.

Lösung:
Der Erwartunswert für Fluggäste, die nicht erscheinen ist $\mu = n \cdot p = 75 \cdot 0.04 = 3$. Hier suchen wir die Wahrscheinlichkeit, dass 2 Fluggäste nicht erscheinen

$$P(X = 2) = \frac{e^{-\mu}\mu^x}{x!} = \frac{e^{-3}3^2}{2!} = 0.22404$$

Die Binomialverteilung ergibt

$$P(X = 2) = 0.2255$$

9. Pflanzensamen **437347**

Eine Firma verkauft Saatgut in Päckchen von 1000 Samenkörnern verpackt. Die Firma gibt an, dass durchschnittlich zwei Körner, die nicht der Sorte des Saatgutes angehören, in einem Päckchen zu erwarten sind. Eine Stichprobe ergibt aber 6 Fremdkörner.
Formulieren Sie eine problembezogene Nullhypothese und untersuchen Sie, ob sie auf dem Signifikanzniveau 5% abgelehnt werden kann. (Poissonverteilung)

Lösung:
Die Nullhypothese ist $H_0 : \ \mu = 2$. Wir setzen H_0 voraus und berechen die Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Päckchen 6 oder mehr Fremdkörner enthält. Es ist einfacher mit der Gegenwahrscheinlichkeit zu rechnen:

$$\begin{aligned} P(X \geq 6) &= 1 - P(X < 6) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) - P(X = 4) - P(X = 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= 0.135335 \\ P(X = 1) &= 0.270671 \\ P(X = 2) &= 0.270671 \\ P(X = 3) &= 0.180447 \\ P(X = 4) &= 0.0902235 \\ P(X = 5) &= 0.360894 \end{aligned}$$

und also

$$P(X \geq 6) = 0.0165.$$

Da eine solche Abweichung von der Nullhypothese nicht mit Zufall erklärt werden kann, wird die Nullhypothese auf dem Niveau von 5% abgelehnt.