Serie 7, Musterlösung

Klasse: 4U, 4Mb, 4Eb Datum: FS 19

1. Boltzmann-Verteilung IL8NV6

Es sei die Funktion

$$f(x) = A \cdot e^{-x\cdot\beta}$$

gegeben, wobei β einen positiven Parameter bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie den Parameter A so, dass f auf dem Intervall $I = [0, \infty[$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F(X \le x)$ zu f und veranschaulichen Sie sich diese Funktionen in einem Graphen.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariable, die gemäss $f(x)$ verteilt ist.

(d) Berechnen Sie die Varianz der Zufallsvariable, die gemäss $f(x)$ verteilt ist.

(e) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten ($\beta = \frac{1}{10}$):

$$P(X \le 5), \; P(5 \le X \le 10), \; P(X \ge 10),$$

Lösung:

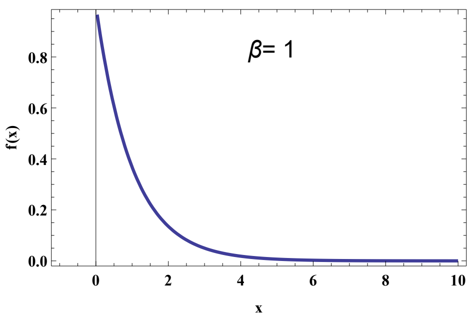
(a) Eine Wahrscheinlichkeitsdichte muss normiert sein. Hier ist

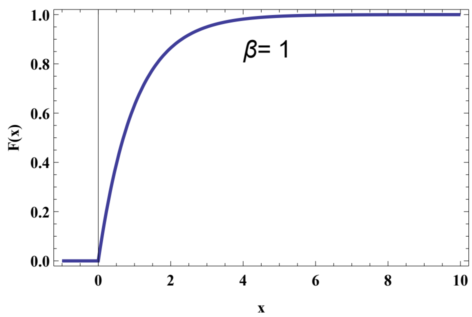
$$k = \int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty A \cdot e^{-x\cdot\beta}dx = A \cdot \left[\frac{e^{-x\cdot\beta}}{-\beta}\right]_0^\infty = \frac{A}{\beta}$$

Es muss deshalb gelten $k = 1 = \frac{A}{\beta}$ also $A = \beta$, d.h. $f(x) = \beta \cdot e^{-x\cdot\beta}$

(b) Um die Verteilungsfunktion zu berechnen, integrieren wir

$$F(X \le x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \beta \cdot e^{-t\cdot\beta}\, dt = \beta\left[\frac{e^{-t\cdot\beta}}{-\beta}\right]_0^x = 1 - e^{-\beta x}$$





(c) Erwartungswert

$$\mu = \int_0^\infty x \cdot f(x)dx = \beta \cdot \int_0^\infty x \cdot e^{-x\cdot\beta}\, dx = \left[-\frac{e^{-\beta x}(\beta x + 1)}{\beta}\right]_0^\infty = 1/\beta$$

(d) Varianz

$$\sigma^2+\mu^2 = \int_0^\infty x^2 \cdot f(x)dx = \beta \cdot \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x\cdot\beta}\, dx = \left[-\frac{e^{-bx}\,(b^2x^2+2bx+2)}{b^2}\right]_0^\infty = 2/\beta^2$$

Also $\sigma^2 = 2/\beta^2 - 1/\beta^2 = 1/\beta^2$.

(e)

$$\begin{aligned} P\,(X \le 5) &= F(5) - F(0) = 0.393469 \\ P\,(5 \le X \le 10) &= F(10) - F(5) = 0.632121 - 0.393469 = 0.238651 \\ P\,(X \ge 10) &= F(\infty) - F(10) = 1 - 0.632121 = 0.367879 \end{aligned}$$

Bemerkung: Diese Wahrscheinlichkeits-Verteilung hat verschiedenen Anwendungen in der Physik. Sind die Energie-Zustände ϵ eines Systems kontinuierlich, dann ist die Besetzungswahrscheinlichkeit bei der Temperatur T

$$p(\epsilon, \beta) = \beta \cdot e^{-\epsilon\cdot\beta}$$

wobei wir $\beta = \frac{1}{k_B \cdot T}$ setzen und k_B die Boltzmann-Konstante ist.

2. Quadratische Wahrscheinlichkeitsdichte **497914**

Es sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot (1-x^2) & \text{wenn } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben, wobei a einen positiven Parameter bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass f auf dem Intervall $I = [-1, 1]$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F zu f und veranschaulichen Sie diese in einem Graphen.

(c) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten für eine stetige Zufallsgrösse, die gemäss der obigen Funktion $f(x)$ verteilt ist und interpretieren Sie die Resultate geometrisch.

$$P\left(-1 \le X \le \frac{3}{4}\right),\ P\left(X \le \frac{1}{2}\right),\ P\left(\frac{3}{4} \le X\right),$$

Lösung:

(a) Eine Wahrscheinlichkeitsdichte muss normiert sein. Hier ist

$$k = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{1} a \cdot (1-x^2)dx = a\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4 \cdot a}{3}$$

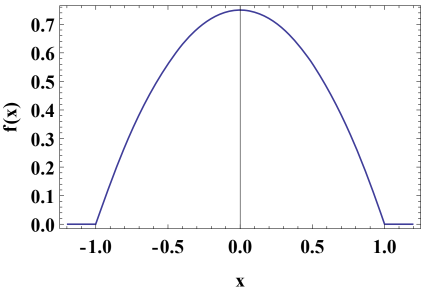
Es muss gelten $k = 1 = \frac{4 \cdot a}{3}$ also $a = \frac{3}{4}$.

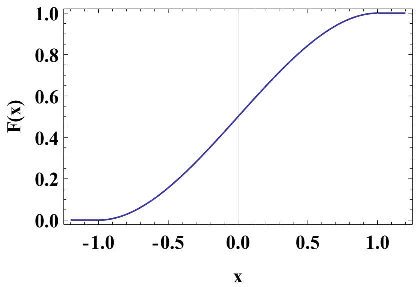
(b) Um die Verteilungsfunktion zu berechnen, machen wir eine Fallunterscheidung:

$$\begin{array}{lrcl} x<-1: & F(x) & = & \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0 \\ -1 \le x \le 1: & F(x) & = & \int_{-1}^{x} f(t)dt = \frac{3}{4}\cdot\int_{-1}^{x}(1-t^2)dt = \frac{3}{4}\cdot\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{x} \\ & & = & -\frac{x^3}{4}+\frac{3x}{4}+\frac{1}{2} \\ x>1: & F(x) & = & \int_{-1}^{1} f(t)dt + 0 = 1 \end{array}$$

Das können wir in einer abschnittweise definierten Funktion zusammenfassen:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x < -1 \\ -\frac{x^3}{4}+\frac{3x}{4}+\frac{1}{2} & \text{wenn } -1 \le x \le 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$





(c)

$$\begin{aligned} P\left(-1 \le X \le \frac{3}{4}\right) &= F(\frac{3}{4}) - F(-1) = \frac{245}{256} - 0 = \frac{245}{256} \\ P\left(X \le \frac{1}{2}\right) &= F(\frac{1}{2}) - F(-\infty) = \frac{27}{32} - 0 = \frac{27}{32} \\ P\left(\frac{3}{4} \le X\right) &= F(\infty) - F(\frac{3}{4}) = 1 - \frac{245}{256} = \frac{11}{256} \end{aligned}$$

3. Lineare Wahrscheinlichkeitsdichte, Erwartungswert und Varianz **096320**

Es sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2\cdot x & \text{wenn } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz.

Lösung:
Erwartungswert:

$$\begin{aligned} \mu &= \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx \\ &= 2\cdot\int_{0}^{1} x\cdot x\,dx = 2\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Varianz:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2 \\
&= 2 \cdot \int_0^1 x^2 \cdot x\, dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2 \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\
&= \frac{2}{4} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}
\end{aligned}$$

4. Wahrscheinlichkeitsdichte, Erwartungswert und Varianz **408316**

Es sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} \cdot (1 - x^2) \cdot x & \text{wenn } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Überprüfen Sie, ob es sich um eine Wahrscheinlichkeitsdichte handelt. Berechnen Sie dann den Erwartungswert und die Varianz.

Lösung:

Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-1}^{1} \frac{3}{4} \cdot (1 - x^2) \cdot x\, dx \\
&= \frac{3}{4} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass das Integral einer ungeraden Funktion über ein symmetrisches Intervall $[-a, a]$ verschwindet. Es handelt sich also nicht um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Dies zeigt sich auch in den problematischen Werten für die Varianz ($\sigma = \frac{-1}{25}$) und Erwartungswert $\mu = \frac{1}{5}$.

5. Quadratische Wahrscheinlichkeitsdichte, Erwartungswert und Varianz **444797**

Es sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} \cdot (1 - x^2) & \text{wenn } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz.

Lösung:

Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
\mu &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx \\
&= \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{3}{4} \cdot (1 - x^2)dx = \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = 0
\end{aligned}$$

Varianz:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2 \\
&= \frac{3}{4} \cdot \int_{-1}^{1} x^2 \cdot (1-x^2)dx = \frac{3}{4} \cdot \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

6. Lineare Wahrscheinlichkeitsdichte 060978

Es sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{wenn } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben, wobei a einen positiven Parameter bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass f auf dem Intervall $I = [0,1]$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F zu f und veranschaulichen Sie sich diese Funktionen in einem Graphen.

(c) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten für eine stetige Zufallsgrösse, die gemäss der obigen Funktion $f(x)$ verteilt ist und interpretieren Sie die Resultate geometrisch.

$$P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{3}{4}\right),\ P\left(X \leq \frac{1}{2}\right),\ P\left(\frac{3}{4} \leq X\right),$$

Lösung:

(a) Eine Wahrscheinlichkeitsdichte muss normiert sein. Hier ist

$$k = \int_{\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{1} a \cdot x dx = a\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = a \cdot \frac{1}{2}$$

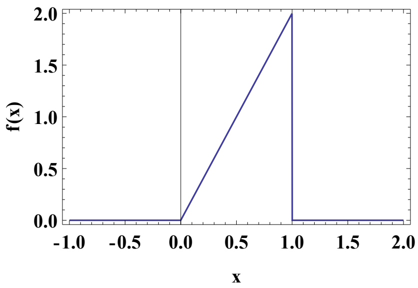
Es muss gelten $k = 1 = a \cdot \frac{1}{2}$ also $a = 2$.

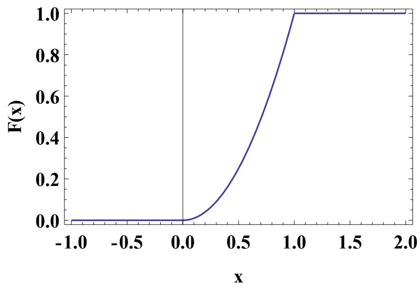
(b) Um die Verteilungsfunktion zu berechnen, machen wir eine Fallunterscheidung:

$$\begin{array}{lrcl}
x < 0: & F(x) & = & \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0 \\
0 \leq x \leq 1: & F(x) & = & \int_0^x f(t)dt = \int_0^x 2tdt = 2\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^x = x^2 \\
x > 1: & F(x) & = & \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt = 1 + \int_1^x f(t)dt = 1 + 0 = 1
\end{array}$$

Das können wir in einer abschnittweise definierten Funktion zusammenfassen:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x < 0 \\ x^2 & \text{wenn } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$





(c)

$$
\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{3}{4}\right) &= F(\frac{3}{4}) - F(\frac{1}{3}) = 9/16 - 1/9 = 65/144 \\
P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) &= F(\frac{1}{2}) - F(-\infty) = 1/4 - 0 = 1/4 \\
P\left(\frac{3}{4} \leq X\right) &= F(\infty) - F(\frac{3}{4}) = 1 - 9/16 = 7/16
\end{aligned}
$$