Serie 8, Musterlösung

Klasse: 4U, 4Mb, 4Eb — Datum: FS 19

1. Standardisierte Normalverteilung — 09YW38

Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten einer standardisierten Normalverteilung, d.h. $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

(a) $P(0 \leq Z \leq 0.62)$

(b) $P(-\infty \leq Z \leq 2.01)$

(c) $P(-0.57 \leq Z \leq 0.57)$

(d) $P(-2.88 \leq Z \leq 2.88)$

(e) $P(|Z| \leq 0.5)$

(f) $P(|Z| \geq \frac{1}{4})$

Lösung:

(a) $P(0 \leq Z \leq 0.62) = \Phi(0.62, 0, 1) - \Phi(0, 0, 1) = 0.7324 - 0.5 = 0.2324$

(b) $P(-\infty \leq Z \leq 2.01) = \Phi(2.01, 0, 1) - \Phi(-\infty, 0, 1) = 0.9778 - 0 = 0.9778$

(c)

$$\begin{aligned}
P(-0.57 \leq Z \leq 0.57) &= \Phi(0.57, 0, 1) - \Phi(-0.57, 0, 1) \\
&= \Phi(0.57, 0, 1) - [1 - \Phi(0.57, 0, 1)] \\
&= 2 \cdot 0.7157 - 1 = 0.4314
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
P(-2.88 \leq Z \leq 2.88) &= \Phi(2.88, 0, 1) - \Phi(-2.88, 0, 1) \\
&= \Phi(2.88, 0, 1) - [1 - \Phi(2.88, 0, 1)] \\
&= 2 \cdot 0.9980 - 1 = 0.996
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
P(|Z| \leq 0.5) &= \Phi(0.5, 0, 1) - \Phi(-0.5, 0, 1) \\
&= \Phi(0.5, 0, 1) - [1 - \Phi(0.5, 0, 1)] \\
&= 0.6915 - [1 - 0.6915] = 0.383
\end{aligned}$$

(f) $P(|Z| \geq \frac{1}{4}) = 2 \cdot \Phi(-0.25, 0, 1) = 2 \cdot [1 - 0.5987] = 0.8026$

2. Standardisierte Normalverteilung (Excel) — JDX83E

Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten einer standardisieren Normalverteilung, d.h. $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ mit Excel. Benutzen Sie den Befehl `NORM.VERT`.

(a) $P(0 \leq Z \leq 0.62)$

(b) $P(-\infty \leq Z \leq 2.01)$

(c) $P(-2.88 \leq Z \leq 2.88)$

(d) $P(|Z| \geq \frac{1}{4})$

Lösung:

(a) $P(0 \leq Z \leq 0.62) = 0.232371$
(b) $P(-\infty \leq Z \leq 2.01) = 0.977784406$
(c) $P(-2.88 \leq Z \leq 2.88) = 0.996023$
(d) $P(|Z| \leq \frac{1}{4}) = 0.197413 \;\Rightarrow\; P(|Z| \geq \frac{1}{4}) = 0.802587349$

3. Normalverteilung (Excel) **2H050S**

Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten mit Excel. Benutzen Sie den Befehl `NORM.VERT`.

(a) $P(3.09 \leq X \leq 6.91)$ wenn $X \sim \mathcal{N}(5, 8)$
(b) $P(-\infty \leq X \leq -7.44)$ wenn $X \sim \mathcal{N}(-10, 4)$
(c) $P(8.64 \leq X \leq 11.36)$ wenn $X \sim \mathcal{N}(10, 10)$
(d) $P(2.83 \leq X \leq 2.95)$ wenn $X \sim \mathcal{N}(2.8, 0.04)$

Lösung:

(a) $P(3.09 \leq X \leq 6.91) = 0,500506543$
(b) $P(-\infty \leq X \leq -7.44) = 0,899727432$
(c) $P(8.64 \leq X \leq 11.36) = 0,332855105$
(d) $P(2.83 \leq X \leq 2.95) = 0,213754955$

4. Normalverteilung Tabelle **3CQ0R5**

Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten mit der Tabelle T1 und die Transformation $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

(a) $P(3.09 \leq X \leq 6.91)$ wenn $X \sim \mathcal{N}(5, 8)$
(b) $P(-\infty \leq X \leq -7.44)$ wenn $X \sim \mathcal{N}(-10, 4)$
(c) $P(8.64 \leq X \leq 11.36)$ wenn $X \sim \mathcal{N}(10, 10)$
(d) $P(2.83 \leq X \leq 2.95)$ wenn $X \sim \mathcal{N}(2.8, 0.04)$

Lösung:

(a) Wir haben $\mu = 5$ und $\sigma = \sqrt{8}$. Wir nennen die untere Grenze a und die obere Grenze b und erhalten durch die Transformation

$$\begin{aligned} a' &= \frac{a-5}{\sqrt{8}} = \frac{3.09-5}{\sqrt{8}} = -0.675287 \\ b' &= \frac{b-5}{\sqrt{8}} = \frac{6.91-5}{\sqrt{8}} = 0.675287 \end{aligned}$$

In der Tabelle T1 lesen wir aus:

$$P(3.09 \leq X \leq 6.91) \;=\; P(-0.67 \leq Z \leq 0.67) = \Phi(0.67, 0, 1) - \Phi(-0.67, 0, 1) = 0.4908$$

(b) Transformation der Grenzen

$$\begin{aligned} a' &= \frac{-\infty - (-10)}{\sqrt{4}} = -\infty \\ b' &= \frac{-7.44 - (-10)}{\sqrt{4}} = \frac{-7.44 + 10}{2} = 1.28 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} P(-\infty \leq X \leq -7.44) &= P(-\infty \leq Z \leq 1.28) = \Phi(1.28, 0, 1) - \Phi(\infty, 0, 1) \\ &= 0.8997 - 0 = 0.8997 \end{aligned}$$

(c) Transformation der Grenzen

$$\begin{aligned} a' &= \frac{8.64 - 10}{\sqrt{10}} = \frac{1.36}{\sqrt{10}} = -0.43007 \\ b' &= \frac{11.36 - 10}{\sqrt{10}} = \frac{1.36}{\sqrt{10}} = 0.43007 \end{aligned}$$

also $P(8.64 \leq X \leq 11.36) = 2 \cdot \Phi(0.43, 0, 1) - 1 = 0.3328$

(d) $P(2.83 \leq X \leq 2.95) = \Phi(0.75, 0, 1) - \Phi(0.15, 0, 1) = 0.7734 - 0.5596 = 0.2138$

5. q-Quantile der Normalverteilung mit Excel **2E86MB**

Berechnen Sie die Grenzen x und die Halb-Breiten s. Benutzen Sie dazu die Funktion `NORM.INV( probability, mean, standard_dev )` in Excel

(a) $P(x \geq X) = 0.9$ wenn $X \sim \mathcal{N}(1, 9)$;

(b) $P(X \geq x) = 0.25$ wenn $X \sim \mathcal{N}(-2, 4)$;

(c) $P(5 - s \leq X \leq 5 + s) = 2/3$ wenn $X \sim \mathcal{N}(5, 10)$.

(d) $P(-1 - s \leq X \leq -1 + s) = 0.6$ wenn $X \sim \mathcal{N}(-1, 16)$.

Lösung:

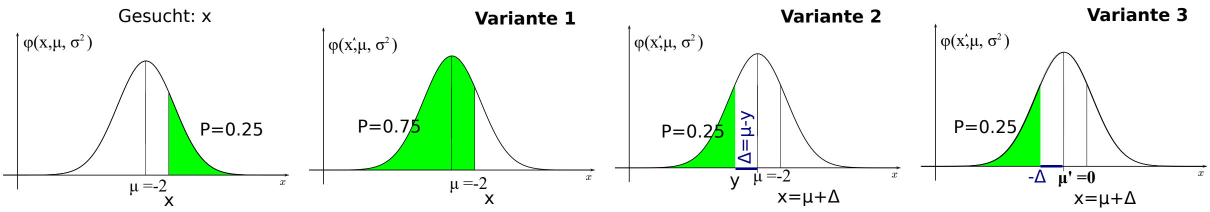
(a) $x = 4.84465$

(b) Variante 1: Da hier eine *untere* Grenze gesucht ist, rechnen wir mit der Gegenwahrscheinlichkeit $P = 0.75$. Wir erhalten $x = -0.6510205$.
Variante 2: Wir berechnen die obere Grenze zum $P = 0.25$ und erhalten $y = -3,349$. Daraus berechnen wir den Abstand zu μ: $\Delta = \mu - y = 1,349$, und spiegeln y an μ:

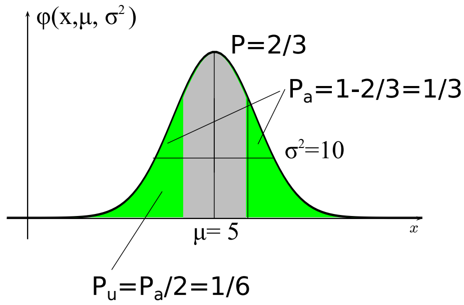
$$x = \mu + \Delta = -0.6510205$$

Variante 3: Wir betrachten zuerst eine Normalverteilung mit $\mu = 0$ aber mit dem korrekten $\sigma^2 = 4$. Berechnen wir die Grenze zu $P = 0.25$, erhalten wir direkt $-\Delta = -1,349$. Also ist

$$x = \mu + \Delta = -0.6510205$$



(c) Wir suchen einen Bereich, der symmetrisch um den Mittelwert verteilt ist. In dem Bereichen ausserhalb liegt noch $P_a = 1 - 2/3 = 1/3$ an Fläche. Sie ist symmetrisch verteilt, oberhalb und unterhalb vom Bereich, den wir suchen. Die untere Fläche ist noch $P_u = P_a/2 = 1/6$. Für die obere Grenze dieser Fläche P_u finden wir mit `NORM.INV` $s' = 1.9407$, d.h. $s = 5 - 1.9407 = 3.0593$



(d) Zuerst obere Grenze zu Fläche $P + P_u = 0.6 + (1 - 0.6)/2 = 0.8$ bestimmen

$$P(X \leq s') = 0.8 \;\Rightarrow\; s' = 2.3665$$

Dann Halb-Breite des Intervalls berechnen $s = s' - \mu = 3.3665$.

6. q-Quantile der Normalverteilung mit der Tabelle **MAPCCX**

Berechnen Sie die Grenzen x. Benutzen Sie dazu die Tabelle T.2 und die Transformation $x = \mu + \sigma \cdot z$ von der standardisieren Normalverteilung zur Normalverteilung mit $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

(a) $P(x \geq X) = 0.9$ wenn $X \sim \mathcal{N}(1, 9)$

(b) $P(X \geq x) = 0.25$ wenn $X \sim \mathcal{N}(-2, 4)$

(c) $P(5 - x \leq X \leq 5 + x) = 2/3$ wenn $X \sim \mathcal{N}(5, 10)$

(d) $P(-1 - x \leq X \leq -1 + x) = 0.6$ wenn $X \sim \mathcal{N}(-1, 16)$.

Lösung:

(a) Wir bestimmen zuerst $P(z \geq Z) = 0.9$ wenn $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ aus der Tabelle T.2: $z = 1.281$. Diesen Wert rechnen wir um $x = \mu + \sigma \cdot z = 1 + 1.281 \cdot \sqrt{9} = 4.843$

(b) Wir bestimmen die obere Grenze von $P = 0.75$ im Z-Bereich (Gegenwahrscheinlichkeit):
$P(z \geq Z) = 0.75$ wenn $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ aus der Tabelle T.2: $z = 0.674$. Diesen Wert rechnen wir um $x = \mu + \sigma \cdot z = -2 + 0.674 \cdot \sqrt{4} = -0.652$

(c) Beidseitig begrenzter Bereich symmetrisch um den Mittelwert. Bestimme zuerst obere Grenze in $Z-$Bereich zu $P + P_u = \frac{2}{3} + \frac{1/3}{2} = 0.8333$.

$$P(Z \leq z) = 0.8333 \;\Rightarrow\; z = 0.966$$

Diesen Wert rechnen wir um $x = \mu + \sigma \cdot z = 5 + 0.966 \cdot \sqrt{10} = 8.0548$, d.h. die Breite des Intervalls ist

$$x = 8.0548 - 5 = 3.0548$$

(d) Beidseitig begrenzter Bereich symmetrisch um den Mittelwert. Bestimme zuerst obere Grenze in $Z-$Bereich zu $P + P_u = 0.6 + \frac{0.4}{2} = 0.8$.

$$P(Z \leq z) = 0.8 \;\Rightarrow\; z = 0.842$$

Diesen Wert rechnen wir um $x = \mu + \sigma \cdot z = -1 + 0.842 \cdot \sqrt{16} = 2.368$, d.h. die Breite des Intervalls ist

$$x = 2.368 - (-1) = 3.368$$