



Serie 9, Musterlösung

Klasse: 4U, 4Mb, 4Eb

Datum: FS 18

1. Mädchen vs. Knaben

442187

Unter 3000 in einer Klinik neugeborenen Kindern befanden sich 1578 Knaben. Testen Sie mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.01$ die Hypothesen

- $H_0 : p(\text{Knabe}) = 0.5$
- $H_1 : p(\text{Knabe}) \neq 0.5$

- Überprüfen Sie, ob die Verteilung mit einer Normalverteilung angenähert werden kann.
- Formulieren Sie den entsprechenden statistischen Schluss.
- Bestimmen Sie den Annahmehereich der Zufallsvariable X .

Lösung:

Es handelt sich hier um einen zweiseitigen Test, da hier die Alternativhypothese nur Werte $p \neq 0.5$ zulässt. Weiter beschreibe die Zufallsgröße X die Anzahl Knaben unter den $n = 3000$ geborenen Kindern. Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt. Wir berechnen den Erwartungswert und die Varianz unter Annahme der Nullhypothese H_0

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu = n \cdot p = 1500 \\ \text{Var}(X) &= \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) = 750 . \end{aligned}$$

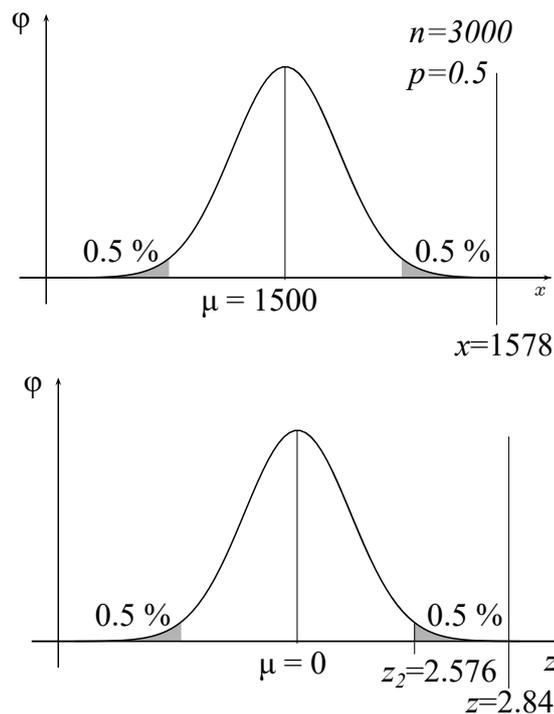
Es stellt sich also die Frage, ob sich die Zahl der Knabengeburten signifikant vom Erwartungswert $\mu = 1500$ unterscheidet.

Wir können die Binomialverteilung mit einer Normalverteilung annähern, da $n \cdot p(1 - p) = 750 > 9$.

Wir verteilen die Irrtumswahrscheinlichkeit symmetrisch über (0.5%) und unter (0.5%) den Annahmehereich, und lesen aus der Tabelle den entsprechenden z -Wert aus: $z(\Phi = 0.995) = 2.576$.

Wir übersetzen die gemessene Anzahl Knabengeburten in die Darstellung der standardisierten Normalverteilung

$$z = \frac{1578 - 1500}{\sqrt{750}} = 2.84816$$



Der z -Wert liegt ausserhalb, deshalb verwerfen wir die Nullhypothese.
Der Annahmebereich der Zufallsvariable ist

$$x_1 = \underbrace{z_1}_{-2.576} \cdot \sigma + \mu = 1430 \text{ und } x_2 = \underbrace{z_2}_{2.576} \cdot \sigma + \mu = 1571$$

2. Gezinkter Würfel

773714

Wir würfeln mit einem Würfel. Bei 20 Würfeln erhalten wir 9 Sechsen. Ist der Würfel gezinkt, d.h., werden bevorzugt Sechsen gewürfelt? Das Signifikanzniveau ist 5%.

- Formulieren Sie die Null- und Alternativhypothese.
- Überprüfen Sie, ob die Verteilung mit einer Normalverteilung angenähert werden kann.
- Formulieren Sie den entsprechenden statistischen Schluss.

Lösung:

- $H_0 : p(X = 6) = 1/6$
 - $H_1 : p(X = 6) > 1/6$

Es handelt sich um einen einseitigen Tests.

- (b) Wir gehen von der Nullhypothese aus und berechnen $n \cdot p \cdot (1 - p) = 20 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 1.6 < 9$. Hier darf die Näherung durch eine Normalverteilung nicht gemacht werden. Wir Rechnen mit der *Binomialverteilung* (z.B. in Excel). Die Wahrscheinlichkeit ist

$$P(X \geq 9) = 1 - \Phi(X \leq 8) = 1 - 0.997158 = 0.00284$$

- (c) Die Wahrscheinlichkeit 9 oder mehr Sechsen zu würfeln mit einem symmetrischen Würfel liegt unter dem Signifikanz-Niveau. Die Nullhypothese wird also verworfen, d.h. der Würfel ist gezinkt.

3. Asymmetrische Münze

630597

In 10000 Würfeln zeigte eine Münze 5150 mal Zahl. Wird Zahl bevorzugt geworfen? Das Signifikanzniveau ist 5%.

- Formulieren Sie die Null- und Alternativhypothese.
- Überprüfen Sie, ob die Verteilung mit einer Normalverteilung angenähert werden kann.
- Formulieren Sie den entsprechenden statistischen Schluss.
- Unter Annahme der Nullhypothese, geben Sie an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die gemessene Abweichung auftritt.

Lösung:

- $H_0 : p(X = K) = 1/2$
 - $H_1 : p(X = K) > 1/2$

Es handelt sich um einen einseitigen Tests.

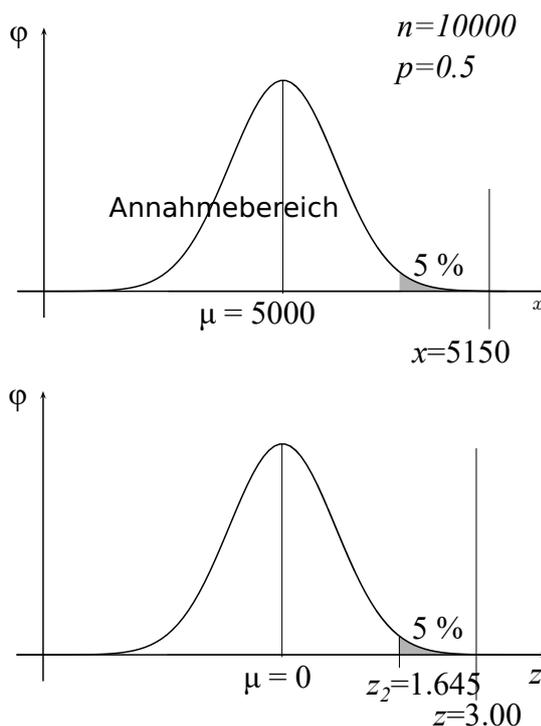
- Wir gehen von der Nullhypothese aus und berechnen $n \cdot p \cdot (1 - p) = 10000 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 4166.6 > 9$. Hier darf die Näherung durch eine Normalverteilung gemacht werden. Die Zufallsgrösse X die Anzahl der gewürfelten Köpfe. Wir berechnen den Erwartungswert und die Varianz unter Annahme der Nullhypothese H_0

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu = n \cdot p = 5000 \\ \text{Var}(X) &= \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) = 2500 . \end{aligned}$$

Wir ordnen die Irrtumswahrscheinlichkeit (5 %) über dem Annahmebereich an, und lesen aus der Tabelle den entsprechenden z -Wert aus: $z(\Phi = 0.95) = 1.645$.

Wir übersetzen die gemessene Anzahl der gewürfelten Köpfe in die Darstellung der standardisierten Normalverteilung

$$z_2 = \frac{5150 - 5000}{\sqrt{2500}} = 3.00$$



Der z -Wert liegt ausserhalb, deshalb verwerfen wir die Nullhypothese: Die Münze ist asymmetrisch.

- (c) Die Wahrscheinlichkeit, dass 5150 und mehr gewürfelt werden, lesen wir mit Hilfe von $z_2 = 3.00$ aus der Tabelle aus:

$$P(X \geq 5150) = 1 - \Phi(3, 0, 1) = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

4. Beeinflussung der Wähler

079376

Bei einer Umfrage vor einer Wahl sagten 285 der 2000 befragten Personen, sie würden nicht zur Wahl gehen. Nachdem in der Zwischenzeit ein medienintensiver Wahlkampf stattfand, betrug die tatsächliche Wahlbeteiligung 88.5%. Kann daraus geschlossen werden, dass in der Zwischenzeit Personen, die ursprünglich nicht zur Wahl gehen wollten, umgestimmt wurden? Signifikanzniveau 99%.

- (a) Formulieren Sie die Null- und Alternativhypothese.
 (b) Überprüfen Sie, ob die Verteilung mit einer Normalverteilung angenähert werden kann.
 (c) Formulieren Sie den entsprechenden statistischen Schluss.

Lösung:

- (a) Vor der Wahl war:
- $H_0 : p(X = K) = 0.885$
 - $H_1 : p(X = K) < 0.885$

Es handelt sich um einen einseitigen Tests.

- (b) Wir gehen von der Nullhypothese aus und berechnen $n \cdot p \cdot (1 - p) = 2000 \cdot 0.885 \cdot 0.115 = 203.55 > 9$. Hier darf die Näherung durch eine Normalverteilung gemacht werden. Die Zufallsgrösse X ist die Anzahl der Wähler. Wir berechnen den Erwartungswert und die Varianz unter Annahme der Nullhypothese H_0

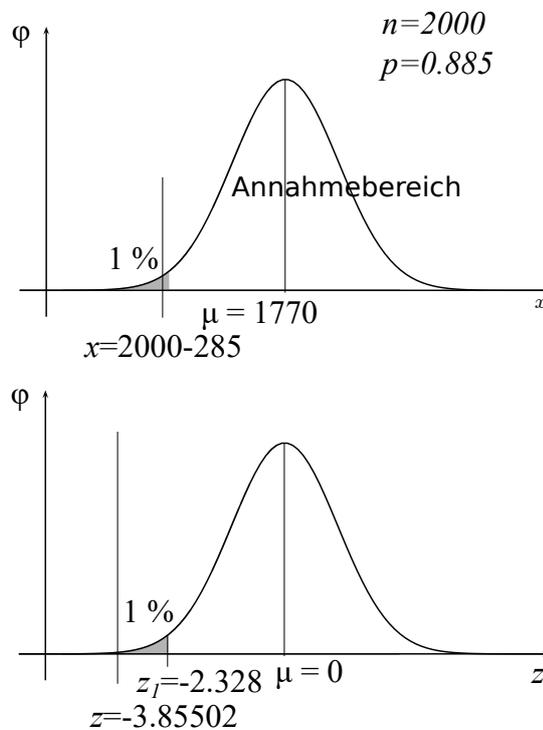
$$E(X) = \mu = n \cdot p = 1770$$

$$Var(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) = 203.55 .$$

Wir ordnen die Irrtumswahrscheinlichkeit (5 %) unter dem Annahmebereich an, und lesen aus der Tabelle den entsprechenden z -Wert aus: $z(\Phi = 0.95) = 2.326$. Also ist der Annahmebereich der Nullhypothese $z \in [-2.326, \infty]$

Wir übersetzen die Anzahl Wähler die Darstellung der standardisierten Normalverteilung

$$z = \frac{2000 - 285 - 1770}{\sqrt{203.55}} = -3.85502$$



Der z -Wert liegt unterhalb des Annahmebereichs, deshalb verwerfen wir die Nullhypothese: Vor dem Wahlkampf war die Wahlbeteiligung unter 88.5 %.

Oder alternativ können wir mit dem Annahmebereich im x -Raum arbeiten:

$$z_1 = \frac{2000 - x_1 - 1770}{\sqrt{203.55}} = 2.326 \rightarrow x_1 = 197$$

$$z_2 = \frac{2000 - x_2 - 1770}{\sqrt{203.55}} = -2.326 \rightarrow x_2 = 263$$

Es sind wollten aber 285 Wähler nicht wählen gehen. Deshalb lag die Wahlbeteiligung vor dem Wahlkampf tiefer als 0.885.

5. Multiple-Choice-Test**469088**

Eine Multiple-Choice-Prüfung bestehe aus 100 Einzelfragen, wobei bei jeder Frage in zufälliger Reihenfolge 4 Antworten angegeben sind, wovon genau eine richtig ist. Der Prüfling darf jeweils nur eine Antwort ankreuzen. Wie viel richtig angekreuzte Antworten müssen zum Bestehen der Prüfung mindestens verlangt werden, damit die Prüfung durch (zufälliges Ankreuzen) höchstens mit Wahrscheinlichkeit

- (a) 0.05
- (b) 0.01
- (c) 0.001
- (d) 0.0001

Lösung:

- $H_0 : p(X = \text{richtig}) = 0.25$
- $H_1 : p(X = \text{richtig}) > 0.25$

Es handelt sich um einen einseitigen Tests. Wir gehen von der Nullhypothese aus und berechnen $n \cdot p \cdot (1 - p) = 100 \cdot 0.25 \cdot 0.75 = 18.75 > 9$. Hier darf die Näherung durch eine Normalverteilung gemacht werden. Die Zufallsgrösse X ist die Anzahl richtigen Antworten der Wähler. Wir berechnen den Erwartungswert und die Varianz unter Annahme der Nullhypothese H_0

$$\begin{aligned} E(X) = \mu = n \cdot p &= 1770 \\ \text{Var}(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) &= 203.55 . \end{aligned}$$

Wir ordnen die Irrtumswahrscheinlichkeit (5 %) über dem Annahmebereich an, und lesen aus der Tabelle den entsprechenden z -Wert aus: $z_2(\Phi = 0.95) = 2.326$. Also ist der Annahmebereich der Nullhypothese $z \in [-\infty, 2.326]$

Die obere Grenze liegt also bei $x_2 = 2.326 \cdot \sqrt{203.55} + 25 = 32.1224$. Analog die weitere Teilaufgaben

- (a) $z_2(\Phi = 0.99) = 2.32636 \Rightarrow x_2 = 2.326 \cdot \sqrt{203.55} + 25 = 35.07$. Also müssen mindestens 36 Fragen richtig beantwortet werden.
- (b) $z_2(\Phi = 0.999) = 3.10 \Rightarrow x_2 = 3.10 \cdot \sqrt{203.55} + 25 = 38.38$. Also müssen mindestens 39 Fragen richtig beantwortet werden.
- (c) $z_2(\Phi = 0.9999) = 3.72 \Rightarrow x_2 = 3.72 \cdot \sqrt{203.55} + 25 = 41.10$. Also müssen mindestens 42 Fragen richtig beantwortet werden.