Serie 10, Musterlösung

Klasse: 4U, 4Mb, 4Eb | Datum: FS 19

1. Mädchen vs. Knaben **442187**

Unter 3000 in einer Klinik neugeborenen Kindern befanden sich 1578 Knaben. Testen Sie mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0.01$ die Hypothesen

- $H_0: \; p(\text{Knabe}) = 0.5$
- $H_1: \; p(\text{Knabe}) \neq 0.5$

(a) Überprüfen Sie, ob die Verteilung mit einer Normalverteilung angenähert werden kann.

(b) Formulieren Sie den entsprechenden statistischen Schluss.

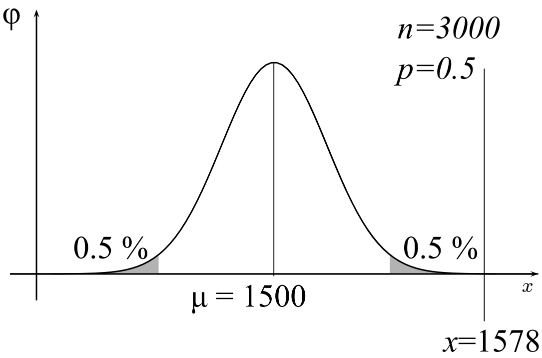
(c) Bestimmen Sie den Annahmebereich der Zufallvariable X.

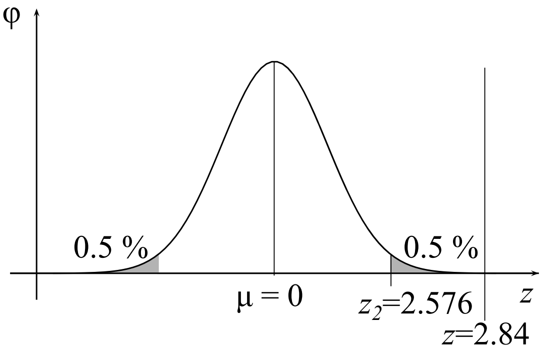
Lösung:
Es handelt sich hier um einen zweiseitigen Test, da hier die Alternativhypothese nur Werte $p \neq 0.5$ zulässt. Weiter beschreibe die Zufallsgrösse X die Anzahl Knaben unter den $n = 3000$ geborenen Kindern. Die Zufallsgrösse X ist binomialverteilt. Wir berechnen den Erwartungswert und die Varianz unter Annahme der Nullhypothese H_0

$$\begin{aligned} E(X) = \mu = n \cdot p &= 1500 \\ \text{Var}(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) &= 750 \; . \end{aligned}$$

Es stellt sich also die Frage, ob sich die Zahl der Knabengeburten signifikant vom Erwartungswert $\mu = 1500$ unterscheidet.
Wir können die Binomialverteilung mit einer Normalverteilung annähern, da $n \cdot p(1-p) = 750 > 9$.
Wir verteilen die Irrtumswahrscheinlichkeit symmetrisch über (0.5%) und unter (0.5%) den Annahmebereich, und lesen aus der Tabelle den entsprechenden $z-$Wert aus: $z(\Phi = 0.995) = 2.576$.
Wir übersetzen die gemesse Anzahl Knabengeburten in die Darstellung der standardisierten Normalverteilung

$$z = \frac{1578 - 1500}{\sqrt{750}} = 2.84816$$





Der z-Wert liegt ausserhalb, deshalb verwerfen wir die Nullhypothese.
Der Annahmebereich der Zufallsvariable ist

$$x_1 = \underbrace{z_1}_{-2.576} \cdot \sigma + \mu = 1430 \text{ und } x_2 = \underbrace{z_2}_{2.576} \cdot \sigma + \mu = 1571$$

2. Gezinkter Würfel **773714**

Wir würfeln mit einem Würfel. Bei 20 Würfen erhalten wir 9 Sechsen. Ist der Würfel gezinkt, d.h., werden bevorzugt Sechsen gewürfelt? Das Signifikanzniveau ist 5%.

(a) Formulieren Sie die Null- und Alternativhypothese.

(b) Überprüfen Sie, ob die Verteilung mit einer Normalverteilung angenähert werden kann.

(c) Formulieren Sie den entsprechenden statistischen Schluss.

Lösung:

(a) Nullhypothese H_0: Die Wahrscheinlichkeit eine Sechs zu würfeln ist $p(X = 6) = 1/6$. Alternativhypothese H_1: Die Wahrscheinlichkeit eine Sechs zu würfeln ist grösser als 1/6. Symbolisch:

- $H_0: \; p(X = 6) = 1/6$
- $H_1: \; p(X = 6) > 1/6$

Es handelt sich um einen einseitigen Tests.

(b) Wir gehen von der Nullhypothese aus und berechnen

$$n \cdot p \cdot (1-p) = 20 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 2.\dot{7} < 9 \;.$$

Hier darf die Näherung durch eine Normalverteilung nicht gemacht werden. Wir Rechnen mit der *Binomialverteilung* (z.B. in Excel). Die Wahrscheinlichkeit ist

$$P(X \geq 9) = 1 - \Phi(X \leq 8) = 1 - 0.997158 = 0.00284$$

(c) Die Wahrscheinlichkeit 9 oder mehr Sechsen zu würfeln mit einem symmetrischen Würfel liegt unter dem Signifikanz-Niveau. Die Nullhypothese wird also verworfen, d.h. der Würfel ist gezinkt.

3. Asymmetrische Münze **630597**

In 10000 Würfen zeigte eine Münze 5150 mal Zahl. Wird Zahl bevorzugt geworfen? Das Signifikanzniveau ist 5%.

(a) Formulieren Sie die Null- und Alternativhypothese.

(b) Überprüfen Sie, ob die Verteilung mit einer Normalverteilung angenähert werden kann.

(c) Formulieren Sie den entsprechenden statistischen Schluss.

(d) Unter Annahme der Nullhypothese, geben Sie an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die gemessene Abweichung auftritt.

Lösung:

(a) Nullhypothese H_0: Die Wahrscheinlichkeit Kopf zu werfen ist 1/2. Alternativhypothese H_1: Die Wahrscheinlichkeit Kopf zu werfen ist grösser als 1/2. Symbolisch:

- $H_0 : \; p(X = \mathrm{K}) = 1/2$
- $H_1 : \; p(X = \mathrm{K}) > 1/2$

Es handelt sich um einen einseitigen Tests.

(b) Wir gehen von der Nullhypothese aus und berechnen

$$n \cdot p \cdot (1-p) = 10000 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 2500 > 9 \;.$$

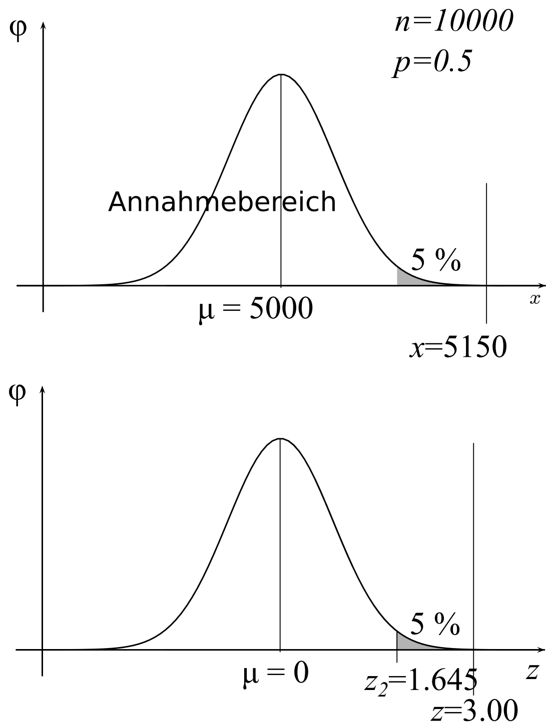
Hier darf die Näherung durch eine Normalverteilung gemacht werden. Die Zufallsgrösse X ist die Anzahl der gewürfelten Köpfe. Wir berechnen den Erwartungswert und die Varianz unter Annahme der Nullhypothese H_0

$$\begin{aligned} E(X) = \mu = n \cdot p &= 5000 \\ Var(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) &= 2500 \;. \end{aligned}$$

Wir ordnen die Irrtumswahrscheinlichkeit (5 %) über dem Annahmebereich an, und lesen aus der Tabelle den entsprechenden $z-$Wert aus: $z(\Phi = 0.95) =$

1.645.
Wir übersetzen die gemessene Anzahl der gewürfelten Köpfe in die Darstellung der standardisierten Normalverteilung

$$z_2 = \frac{5150 - 5000}{\sqrt{2500}} = 3.00$$



Der z-Wert liegt ausserhalb, deshalb verwerfen wir die Nullhypothese: Die Münze ist asymmetrisch.

(c) Die Wahrscheinlichkeit, dass 5150 und mehr gewürfelt werden, lesen wir mit Hilfe von $z_2 = 3.00$ aus der Tabelle aus:

$$P(X \geq 5150) = 1 - \Phi(3, 0, 1) = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

4. Beeinflussung der Wähler **079376**

Bei einer Umfrage vor einer Wahl sagten 285 der 2000 befragten Personen, sie würden nicht zur Wahl gehen. Nachdem in der Zwischenzeit ein medienintensiver Wahlkampf stattfand, betrug die tatsächliche Wahlbeteiligung 88.5%. Kann daraus geschlossen werden, dass in der Zwischenzeit Personen, die ursprünglich nicht zur Wahl gehen wollten, umgestimmt wurden? Signifikanzniveau 1%.

(a) Formulieren Sie die Null- und Alternativhypothese.

(b) Überprüfen Sie, ob die Verteilung mit einer Normalverteilung angenähert werden kann.

(c) Formulieren Sie den entsprechenden statistischen Schluss.

Lösung:

(a) Nullhypothese H_0: Vor der Wahl war die die Wahlbeteiligung 88.5%. Alternativhypothese H_1: Vor der Wahl war die Wahlbeteiligung kleiner als 88.5% oder symbolisch:
Vor der Wahl war:

- $H_0 : \ p(X = \mathrm{K}) = 0.885$
- $H_1 : \ p(X = \mathrm{K}) < 0.885$

Es handelt sich um einen einseitigen Tests.

(b) Wir gehen von der Nullhypothese aus und berechnen

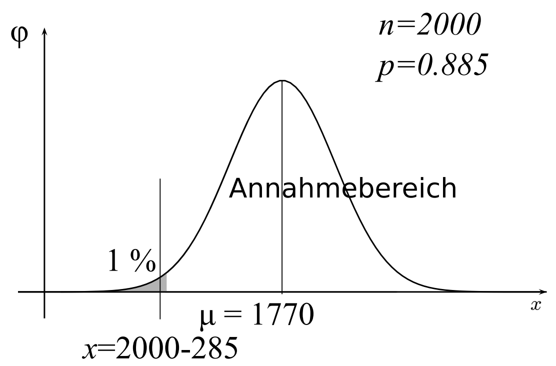
$$n \cdot p \cdot (1-p) = 2000 \cdot 0.885 \cdot 0.115 = 203.55 > 9 \ .$$

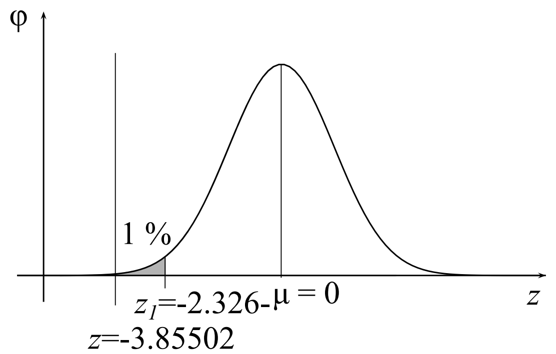
Hier darf die Näherung durch eine Normalverteilung gemacht werden. Die Zufallsgrösse X ist die Anzahl der Wähler. Wir berechnen den Erwartungswert und die Varianz unter Annahme der Nullhypothese H_0

$$\begin{aligned} E(X) = \mu = n \cdot p &= 1770 \\ Var(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) &= 203.55 \ . \end{aligned}$$

Wir ordnen die Irrtumswahrscheinlichkeit (1%) unter dem Annahmebereich an, und lesen aus der Tabelle den entsprechenden $z-$Wert aus: $z(\Phi = 0.99) = 2.326$. Also ist der Annahmebereich der Nullhypothese $z \in [-2.326, \infty]$
Wir übersetzen die Anzahl Wähler die Darstellung der standardisierten Normalverteilung

$$z = \frac{2000 - 285 - 1770}{\sqrt{203.55}} = -3.85502$$





Der z-Wert liegt unterhalb des Annahmebereichs, deshalb verwerfen wir die Nullhypothese: Vor dem Wahlkampf war die Wahlbeteiligung unter 88.5 %.

Oder alternativ können wir mit dem Annahmebereich im x-Raum arbeiten:

$$z_1 = \frac{2000 - x_1 - 1770}{\sqrt{203.55}} = 2.326 \;\rightarrow\; x_1 = 197$$

$$z_2 = \frac{2000 - x_2 - 1770}{\sqrt{203.55}} = -2.326 \;\rightarrow\; x_1 = 263$$

Es wollten aber 285 Wähler nicht wählen gehen. Deshalb lag die Wahlbeiligung vor dem Wahlkampf tiefer als 0.885.

5. Multiple-Choice-Test **469088**

Eine Multiple-Choice-Prüfung bestehe aus 100 Einzelfragen, wobei bei jeder Frage in zufälliger Reihenfolge 4 Antworten angegeben sind, wovon genau eine richtig ist. Der Prüfling darf jeweils nur eine Antwort ankreuzen. Wie viel richtig angekreuzte Antworten müssen zum Bestehen der Prüfung mindestens verlangt werden, damit die Prüfung durch (zufälliges Ankreuzen) höchstens mit Wahrscheinlichkeit

(a) 0.05

(b) 0.01

(c) 0.001

(d) 0.0001

Lösung:

Nullhypothese H_0: Die Fragen werden zufällig, d.h. mit der Wahrscheinlichkeit $p = 1/4$ beantwortet. Alternativhypothese H_1: Die Fragen werden nicht zufällig, d.h. mit der Wahrscheinlichkeit $p > 1/4$ beantwortet. Symbolisch:

- $H_0: \; p(X = \text{richtig}) = 0.25$
- $H_1: \; p(X = \text{richtig}) > 0.25$

Es handelt sich um einen einseitigen Tests. Wir gehen von der Nullhypothese aus und berechnen

$$n \cdot p \cdot (1-p) = 100 \cdot 0.25 \cdot 0.75 = 18.75 > 9 \;.$$

Hier darf die Näherung durch eine Normalverteilung gemacht werden. Die Zufallsgrösse X ist die Anzahl richtigen Antworten der Wähler. Wir berechnen den Erwartungswert und die Varianz unter Annahme der Nullhypothese H_0

$$\begin{aligned} E(X) = \mu = n \cdot p &= 25 \\ Var(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) &= 18.75 \;. \end{aligned}$$

Wir ordnen die Irrtumswahrscheinlichkeit (5 %) über dem Annahmebereich an, und lesen aus der Tabelle den entsprechenden $z-$Wert aus: $z_2(\Phi = 0.95) = 1.6449$. Also ist der Annahmebereich der Nullhypothese $z \in [-\infty, 1.6449]$

Die obere Grenze liegt also bei $x_2 = 1.6449 \cdot \sqrt{18.75} + 25 = 32.1224$. Also müssen mindestnes 33 Fragen richtig beantwortet werden. Analog die weitere Teilaufgaben

(b) $z_2(\Phi = 0.99) = 2.32636 \;\Rightarrow\; x_2 = 2.326 \cdot \sqrt{18.75} + 25 = 35.07$. Also müssen mindestens 36 Fragen richtig beantwortet werden.

(c) $z_2(\Phi = 0.999) = 3.10 \;\Rightarrow\; x_2 = 3.10 \cdot \sqrt{18.75} + 25 = 38.38$. Also müssen mindestens 39 Fragen richtig beantwortet werden.

(d) $z_2(\Phi = 0.9999) = 3.72 \;\Rightarrow\; x_2 = 3.72 \cdot \sqrt{18.75} + 25 = 41.10$. Also müssen mindestens 42 Fragen richtig beantwortet werden.