Serie 11, Musterlösung

Klasse: 4U, 4Mb, 4Eb Datum: FS 19

1. Länge von Wellen 695583

Durch Messung wurden die Längen von fünf Wellen bestimmt. Es wurden 8, 9, 11, 10, 10 Einheiten gemessen. Weicht der Mittelwert signifikant von $\mu = 10$E ab? Das Signifikanzniveau ist 1%.

Lösung:

Für die Stichprobe berechnen wir den geschätzten Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{5}\cdot 48 = 9.6$$

und die geschätzte Varianz

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = 1.3$$

Damit transformieren wir die Angaben in den t-Raum:

- Transformation der Abweichung vom Mittelwert

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{s}\cdot\sqrt{N} = -0.784465$$

- Bestimmung der kritischen Grösse zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$. Zweiseitige Fragestellung. $n = 5 - 1 = 4$. Wir lesen aus der Tabelle aus

$$t_{5-1,0.995} = 4.604$$

Die Abweichung ist kleiner als die kritische Grösse $|t| < t_{4,0.995}$, deshalb ist die Abweichung nicht signifikant.

2. Spannvorgang 886867

Bei einem Spannvorgang wurde bisher mit einem Vorgabewert von 135 s gerechnet. Eine Zeitaufnahme lieferte bei $N = 32$ aufgenommenen Zeiten für diesen Teilvorgang einen mittleren Zeitbedarf in der Höhe von $\bar{x} = 128$ s bei einer Standardabweichung von $s = 4.7$s. Kann aus dem Unterschied zwischen 135 s und 128 s darauf geschlossen werden, dass der wahre jedoch unbekannte mittlere Zeitbedarf für diesen Teilvorgang generell nicht bei 135 s liegt? Das Signifikanzniveau ist 1%.

Lösung:

- Transformation der Abweichung vom Mittelwert

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \cdot \sqrt{N} = -8.4251$$

- Bestimmung der kritischen Grösse zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$. Zweiseitige Fragestellung. $n = 32 - 1 = 31$. Wir lesen aus der Tabelle aus

$$t_{31,0.995} \approx 2.748$$

Die Abweichung ist grösser als die kritische Grösse $|t| > t_{32,0.995}$, deshalb ist die Abweichung signifikant.

3. Äcker **235309**

Auf vier Äckern von je 40 Aren konnte der Ertrag von Kartoffeln durch neuartige Behandlung um 0.55, 0.30, 1.52, 0.68 Tonnen gesteigert werden. Ist diese Behandlungsmethode wirksamer als frühere? Das Signifikanzniveau ist 1%.

Lösung:

Für die Stichprobe berechnen wir Mittelwert

$$\bar{x} = 0.7625$$

und Varianz.

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 = 0.279892$$

Ohne Behandlung wäre die Steigerung $\mu = 0$.

Damit transformieren wir die Angaben in den t-Raum:

- Transformation der Abweichung vom Mittelwert

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \sqrt{N} = 2.88254$$

- Bestimmung der kritischen Grösse zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$. Einseitige Fragestellung. $n = 4 - 1 = 3$. Wir lesen aus der Tabelle aus

$$t_{3,0.99} = 4.541$$

Die Abweichung ist kleiner als die kritische Grösse $|t| < t_{3,0.99}$, deshalb ist die Abweichung nicht signifikant. Die Produktion wurde nicht signifikant gesteigert.

4. Zugriffszeiten **158922**

Es werden die Zugriffszeiten bei einem bestimmten Produktionsprozess untersucht. Folgende Stichprobe [in Sekunden] wurde ermittelt. Sind diese Zeiten wirklich von 0.4 Sekunden verschieden? Das Signifikanzniveau ist 1%.

0.23	0.23	0.23	0.30	0.32	0.32	0.34	0.34	0.34
0.43	0.43	0.43	0.43	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45
0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.54	0.56	0.56	0.56
0.62	0.65	0.65	0.65	0.67	0.67	0.68	0.76	0.76

Lösung:
Für die Stichprobe (N=36) berechnen wir Mittelwert

$$\bar{x} = 0.490278$$

und Varianz.

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = 0.0216199$$

Damit transformieren wir die Angaben in den t-Raum:

- Transformation der Abweichung vom Mittelwert

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \cdot \sqrt{N} = 3.68388$$

- Bestimmung der kritischen Grösse zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.01$. Einseitige Fragestellung. $n = 36 - 1 = 35$. Wir lesen aus der Tabelle aus

$$t_{35,0.995} = 2.727$$

Die Abweichung ist grösser als die kritische Grösse $|t| > t_{n,1-\alpha/2}$, deshalb ist die Abweichung signifikant.

5. Vertrauensintervall **102626**

An Hand einer Stichprobe von 10 auf einem Drehautomaten bearbeiteten Wellen soll ein zur Vertrauenswahrscheinlichkeit 0.99 für den Erwartungswert μ der Grundgesamtheit der Abweichungen des Wellendurchmessers von der Mitte des Toleranzfeldes bestimmt werden. Folgende Abweichungen [in Mikrometer] der ist-Masse von der Mitte des Toleranzfeldes sind festgestellt worden:

$$2 \quad 1 \quad -2 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \quad -2 \quad 5 \quad 3 \quad 4$$

(a) Verwenden Sie die Normalverteilung!

(b) Verwenden Sie die Student-t-Verteilung!

Lösung:
Die Frage könnte auch so gestellt werden: In welchem Intervall können 99% der Abweichungen erwartet werden.
Für die Stichprobe (N=10) berechnen wir den geschätzten Mittelwert

$$\bar{x} = 2$$

und die geschätzte Varianz

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 = 5.77778$$

(a) Im z- Raum fällt es uns einfach die Grenzen zu Signifikanz-Niveau 0.99 (zweiseitig) für die Stichprobe zu bestimmen:

$$z_{0.995} = 2.576\ .$$

Die Grenzen sind im z-Raum bei ± 2.576. Wir transformieren diese Grenzen zurück in den x-Raum:

$$x_{\text{unten}} = \bar{x} - \frac{z_{0.995} \cdot s}{\sqrt{N}} = 2 - \frac{2.576 \cdot 2.4037}{\sqrt{10}} = 0.0419387$$

und

$$x_{\text{oben}} = \bar{x} + \frac{z_{0.995} \cdot s}{\sqrt{N}} = 3.9581$$

(b) Im t- Raum fällt es uns einfach die Grenzen zu Signifikanz-Niveau 0.99 (zweiseitig) für die Stichprobe $N = 10 \ \Rightarrow n = 10 - 1 = 9$ zu bestimmen:

$$t_{9,0.995} = 3.25\ .$$

Die Grenzen sind im t-Raum bei ± 3.25. Wir transformieren diese Grenzen zurück in den x-Raum:

$$x_{\text{unten}} = \bar{x} - \frac{t_{9,0.995} \cdot s}{\sqrt{N}} = 2 - \frac{3.25 \cdot 2.4037}{\sqrt{10}} = -0.4704$$

und

$$x_{\text{oben}} = \bar{x} + \frac{t_{9,0.995} \cdot s}{\sqrt{N}} = 4.4704$$

Da die t-Verteilung breiter ist, sind sind die Grenzen aus der t-Verteilung auch Grösser: Es wird eine Grössere Abweichung vom Mittelwert erwartet.

6. Zugriffszeiten II **936195**

Gegeben sei wieder die Stichprobe aus der vorherigen Aufgaben zu den Zugriffszeiten gegeben. In welchem Vertrauensintervall zur Vertrauenswahrscheinlichkeit 0.99 liegt der wirkliche Wert des Mittels der Zugriffszeiten?

Lösung:

Wir benutzen die Angaben von oben:

$$\bar{x} = 0.490278 \text{ und } s^2 = 0.0216199$$

Im t- Raum bestimmen wir die die Grenzen zu Signifikanz-Niveau 0.99 (zweiseitig) für die Stichprobe $N = 36 \ \Rightarrow n = 36 - 1 = 35$:

$$t_{35,0.995} = 2.728\ .$$

Die Grenzen des Vertrauensintervalls im t-Raum sind bei ± 2.728. Wir transformieren diese Grenzen zurück in den x-Raum:

$$x_{\text{unten}} = \bar{x} - \frac{t_{35,0.995} \cdot s}{\sqrt{N}} = 0.410633$$

und

$$x_{\text{oben}} = \bar{x} + \frac{t_{35,0.995} \cdot s}{\sqrt{N}} = 0.569923$$