Serie 13, Musterlösung

Klasse: 4U, 4Mb, 4Eb Datum: FS 19

1. Temperaturabhängigkeit ohmscher Widerstand 1VCRWS

(a) Bestimmen Sie die Temperaturabhängigkeit in der Form $R(T) = a \cdot T + b$.

(b) Geben Sie die Unsicherheit der Parameter a und b an.

(c) Stellen Sie Ihre Resultate graphisch dar.

T_i [°C]	20	25	30	40	50	60	56	80
R_i [Ω]	16.3	16.44	16.61	16.81	17.10	17.37	17.38	17.86

Lösung:
Wir haben $n = 8$ Datenpunkte. Die Mittelwerte sind $\bar{x} = 45.1250$ und $\bar{y} = 16.9838$ und die Matrix der Varianzen und der Kovarianz

$$S = \begin{bmatrix} (s_x)^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & (s_y)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 410.1250 & 10.8352 \\ 10.8352 & 0.2887 \end{bmatrix}$$

Die Regressionsparameter berechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} a &= \; = \frac{s_{xy}}{(s_x)^2} = \frac{10.8352}{410.1250} = 0.0264192 \\ b &= \bar{y} - a \cdot \bar{x} = 16.9838 - 0.026 \cdot 45.1250 = 15.792 \end{aligned}$$

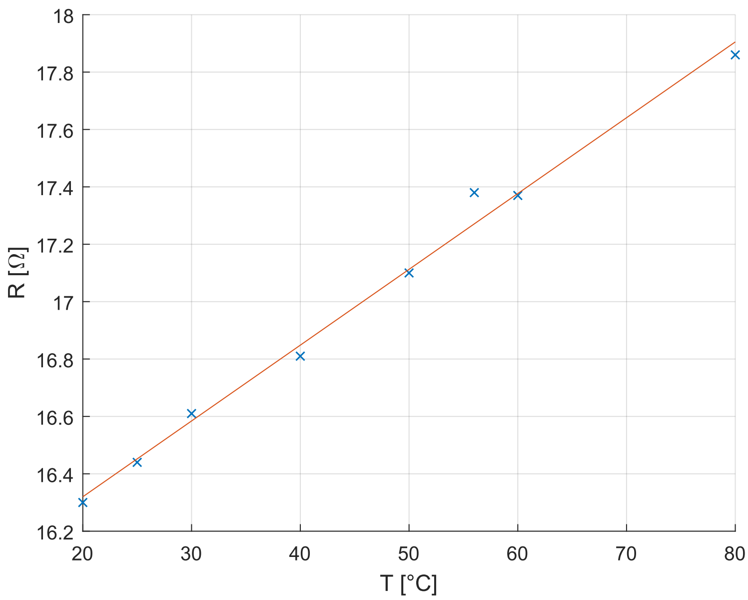
Die Regressionsgerade ist also $R(T) = 0.026 \cdot T + 15.792$.

Die Varianzen der Regressionsparametern sind

$$\begin{aligned} (s_a)^2 &= \frac{(1-r^2) \cdot (s_y)^2}{(n-2) \cdot (s_x)^2} = 9.7470 \cdot 10^{-7} \\ (s_b)^2 &= \frac{(n-1) \cdot (s_x)^2 + n \cdot \bar{x}^2}{n} \cdot (s_a)^2 = 0.0023 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 0.0264192 \pm \sqrt{9.7470 \cdot 10^{-7}} = 0.0264 \pm 9.87 \cdot 10^{-4} \\ b &= 15.792 \pm \sqrt{0.0023} = 15.79 \pm 0.0483 \end{aligned}$$

Die Einheiten von a sind $\frac{\Omega}{\mathrm{K}}$, die Einheiten von b sind Ω.



2. Einkommen Schuhgrösse **CBTRTX**

(a) Bestimmen Sie die Regressions-Gerade in der Form $y(x) = a \cdot x + b$.

(b) Geben Sie die Unsicherheit der Parameter a und b an.

(c) Stellen Sie Ihre Resultate graphisch dar.

x_i [Grösse]	49.	40.5	42.5	44.5	35.	43.5	39.5	48.	36.	41.
y_i [kCHF]	20.6	6.9	10.1	14.9	0.2	11.5	4.7	17.	1.	6.8

x_i [Grösse]	48.5	36.	43.5	48.5	37.	41.	48.5	37.	46.5
y_i [kCHF]	17.3	1.4	13.5	20.1	3.2	6.6	17.5	1.6	14.5

Lösung:

Wir haben $n = 19$ Datenpunkte. Die Mittelwerte sind $\bar{x} = 42.4211$ und $\bar{y} = 9.9684$ und die Matrix der Varianzen und der Kovarianz

$$S = \begin{bmatrix} (s_x)^2 & s_{xy} \\ s_{xy} & (s_y)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23.3962 & 32.9474 \\ 32.9474 & 47.7201 \end{bmatrix}$$

Die Regressionsparameter berechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} a &= = \frac{s_{xy}}{(s_x)^2} = \frac{32.9474}{23.3962} = 1.4082 \\ b &= \bar{y} - a \cdot \bar{x} = 9.9684 - 1.4082 \cdot 42.4211 = -49.7704 \end{aligned}$$

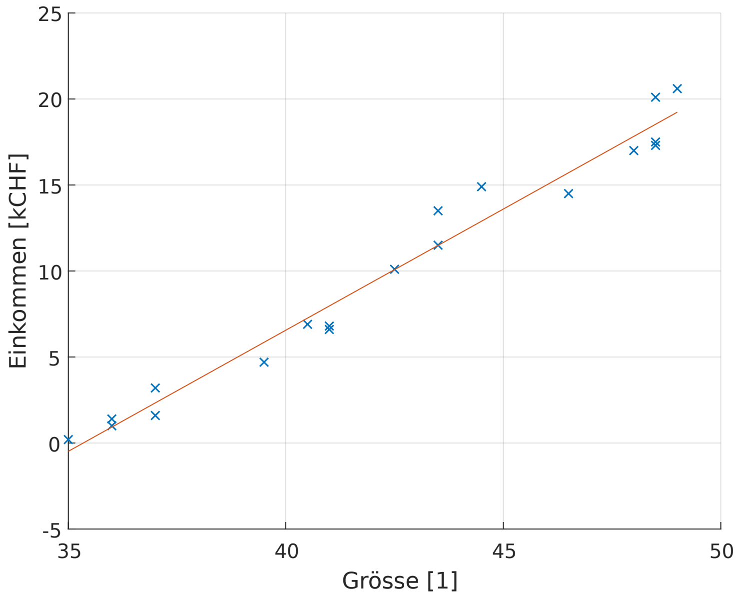
Die Regressionsgerade ist also $y(x) = 1.4082 \cdot x - 49.7704$.

Die Varianzen der Regressionsparametern sind

$$(s_a)^2 = \frac{(1-r^2)\cdot(s_y)^2}{(n-2)\cdot(s_x)^2} = 0.0033$$
$$(s_b)^2 = \frac{(n-1)\cdot(s_x)^2 + n\cdot\bar{x}^2}{n}\cdot(s_a)^2 = 6.0568$$

$$a = 1.4082 \pm \sqrt{0.0033} = 1.41 \pm 0.0577$$
$$b = -49.7704 \pm \sqrt{6.0568} = -50 \pm 2.46$$

Die Einheiten von a sind $\frac{\text{kCHF}}{1}$, die Einheiten von b sind kCHF.



3. Regression Zinsatz/Häuserpreis **5ABECJ**

Erstellen Sie eine lineare Regression für den Datensatz. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Berechnen Sie die Koeffizienten der linearen Regression $P(r) = a\cdot r + b$, wo P der Preis der Häuser ist und r der Zinssatz.

(b) Berechnen Sie den Mess-Fehler der Regressions-Parameter s_a und s_b.

(c) Geben Sie die Konfidenz-Intervalle zur Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 10\%$ an.

Jahr	Zins [%]	Durchschnittlicher Preis [$]
1988	10.30	183800
1989	10.30	183200
1990	10.10	174900
1991	9.30	173500
1992	8.40	172900
1993	7.30	173200
1994	8.40	173200
1995	7.90	169700
1996	7.60	174500
1997	7.60	177900
1998	6.90	188100
1999	7.40	203200
2000	8.10	230200
2001	7	258200
2002	6.50	309800
2003	5.80	329800

Lösung:

(a) Die lineare Regression ergibt

$$P(r) = -23410 \cdot r + 393349$$

(b) Die Mess-Fehler der Regressions-Parameter Regressions-Parameter sind (x_i: Zinsatz, y_i: Häuserpreis)

$$\begin{aligned} s_a &= \sqrt{\frac{\frac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\epsilon_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}} = 7914 \\ s_b &= s_a \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2} = 64595 \end{aligned}$$

mit der Definition $\epsilon_i = y_i - (a \cdot x_i + b)$.

(c) Das Quantil gibt (Tabelle T.3 Skript) $t_{16-1;0.95} = 1.7531$ (oder `tinv(0.95,15)` in matlab) und damit sind die Konfidenz-Intervalle

$$\begin{aligned} a &\in [a - \frac{s_a \cdot t_{n-1;\,1-\alpha/2}}{\sqrt{16}},\ a + \frac{s_a \cdot t_{n-1;\,1-\alpha/2}}{\sqrt{16}}] = [-26878\,; -19940.9] \\ b &\in [b - \frac{s_b \cdot t_{n-1;\,1-\alpha/2}}{\sqrt{16}},\ b + \frac{s_b \cdot t_{n-1;\,1-\alpha/2}}{\sqrt{16}}] = [365038\,; 421659] \end{aligned}$$