Serie 16, Musterlösung

Klasse: 4U, 4Mb, 4Eb Datum: FS 19

1. Masse eines Zylinders BP532F

Um die Masse m eines homogenen Zylinders zu bestimmen, wurden folgende Messungen vorgenommen (jeweils von gleicher Genauigkeit):

- Zylinderhöhe: $h = 24.0\,\text{cm} \pm 3\%$
- Radius: $r = 17.5\,\text{cm} \pm 3\%$
- Dichte: $\rho = 2.50\,\text{g}/\text{cm}^3 \pm 2\%$

(a) Welchen mittleren Wert erhält man für die Zylindermasse m?

(b) Wie gross ist die absolute bzw. relative Messunsicherheit von m?

Lösung:
Die Masse ist $m = \pi \cdot r^2 \cdot h \cdot \rho = 57726.8$ g. Wir berechnen zuerst den prozentualen Messfehler:

$$\frac{\Delta m}{m} = \sqrt{\left|2 \cdot \frac{\Delta r}{r}\right|^2 + \left|1 \cdot \frac{\Delta h}{h}\right|^2 + \left|1 \cdot \frac{\Delta \rho}{\rho}\right|^2}$$

also

$$\frac{\Delta m}{m} = \sqrt{|2 \cdot 0.03|^2 + |1 \cdot 0.03|^2 + |1 \cdot 0.03|^2} = 0.07$$

Die relative Messunsicherheit ist 7 % und die absolute $m \cdot 0.07 = 4041$ g. Wir schreiben

$$m = 57.7 \pm 4 \text{ kg}$$

2. Turmhöhe DFRJT3

Bestimmen Sie die Höhe h eines Turms, dessen Spitze aus der Entfernung e unter dem Erhebungswinkel α erscheint. Wie gross ist die absolute bzw. die prozentuale Messunsicherheit von h?

$$e = 75.2 \pm 2.5\text{m}; \;\; \alpha = 30 \pm 1^\circ$$

Lösung:
Die Höhe ist $h = e \cdot \tan(\alpha) = 43.42$ m. Wir rechnen im Bogen Bogenmass. Dann ist $\alpha = 0.523599 \pm 0.0174533$. Der Fehler ist

$$\begin{aligned}
\Delta h &= \sqrt{\left|\frac{\partial h(e,\alpha)}{\partial e} \cdot \Delta e\right|^2 + \left|\frac{\partial h(e,\alpha)}{\partial \alpha} \cdot \Delta \alpha\right|^2} \\
&= \sqrt{|\tan(\alpha) \cdot \Delta e|^2 + \left|e \cdot \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \cdot \Delta \alpha\right|^2} \\
&\to \sqrt{|0.57735 \cdot 2.5|^2 + |100.267 \cdot 0.0174533|^2} \\
&= 2.27
\end{aligned}$$

Wir schreiben also für die Turmhöhe

$$h = 43.42 \pm 2.27 \text{ m}$$

Der prozentuale Messfehler ist

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{2.27}{43.42} = 5.2 \text{ \%}$$

```
syms h al l; h(l,al)=tan(al)*l
diff(h(l,al),l)
diff(h(l,al),al)
clear al h l
al=30*2*pi/360 ; l=75.2
dd=[ tan(al) l*(tan(al)^2 + 1)].*[2.5 1*2*pi/360]
norm(dd)
```

3. Parallelschaltung **J5WWRR**

Mit einer Brückenschaltung wurden die Widerstände R_1 und R_2 jeweils sechs Mal mit gleicher Genauigkeit gemessen:

R_1/Ω	96.5	97.2	98.6	95.9	97.1	96.7
R_2/Ω 40.1	42.3	41.5	40.7	41.9	42.5	

(a) Wie lauten die Messergebnisse für R_1 und R_2?

(b) Der Gesamtwiderstand R der Parallelschaltung aus R_1 und R_2 wird nach der Formel

$$1/R = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \text{ oder } R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

berechnet. Wie wirken sich die Messunsicherheiten ΔR_1 und ΔR_2 auf die Messunsicherheit ΔR des Gesamtwiderstandes aus? Geben Sie das Messergebnis für den Gesamtwiderstand R in der Form $R \pm \Delta R$ an.

Lösung:

Wir berechnen Mittelwert und Messfehler für die Messreihen:

$$\overline{R_1} = 97 \ \Omega \text{ und } \overline{R_2} = 41.5 \ \Omega$$

Der Messfehler ist (σ_1: Standard-Abweichung von n: Anzahl Messungen)

$$\Delta R_1 = \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}} = \frac{0.9121403400793068}{\sqrt{6}} \, \Omega = 0.37 \, \Omega$$

und gleich

$$\Delta R_2 = \frac{\sigma_2}{\sqrt{n}} = \frac{0.93808315}{\sqrt{6}} \, \Omega = 0.38 \, \Omega$$

Die Schaltung hat den Widerstand

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = 29.065\ \Omega$$

$$\begin{aligned}
\Delta R &= \sqrt{\left|\frac{\partial R}{\partial R_1} \cdot \Delta R_1\right|^2 + \left|\frac{\partial R}{\partial R_2} \cdot \Delta R_2\right|^2} \\
&= \sqrt{\left|\frac{1}{(1 + R_1/R_2)^2} \cdot \Delta R_1\right|^2 + \left|\frac{1}{(1 + R_2/R_1)^2} \cdot \Delta R_2\right|^2} \\
&= \sqrt{|0.0897835 \cdot 0.37\,\Omega|^2 + |0.490506 \cdot 0.38\,\Omega|^2} \\
&= 0.19\,\Omega
\end{aligned}$$

Wir schreiben also

$$R = 29.065 \pm 0.19\,\Omega$$