WST
donat.adams@fhnw.ch
IMN

Test 1 Musterlösung

Name, Nummer: Datum: 29. März 2017

1. Strichcode (10) 344790

Wir betrachten Barcodes. Sie enthalten Striche und Lücken, die entweder schmal oder breit sein können. Striche und Lücken wechseln sich ab. Ein Barcode fängt stets mit einem Strich an und endet mit einem Strich. Zeichen und Zahlen werden also mit Strichen und Lücken kodiert.

(a) Wie viel verschiedene Zeichen lassen sich mit 5 Strichen und 4 Lücken darstellen?

(b) Wie viele Möglichkeiten sind es, wenn Zeichen, die durch Vertauschung der Reihenfolge (rechts $\leftrightarrow$ links) ineinander übergehen, nicht unterschieden werden?

(c) Wie viele Striche und Lücken benötigt man mindestens, wenn man alle Ziffern und Buchstaben (10+26 Zeichen) darstellen will.

Lösung:

(a) Wir Zählen für jedes Zeichen die Anzahl Möglichkeiten und multiplizieren:

$$n_s \cdot n_l \cdot n_s \cdot n_l \cdot n_s \cdot n_l \cdot n_s \cdot n_l \cdot n_s = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9 = 512$$

(b) Durch die Spiegelsymmetrie des Barcodes gibt es nur noch $512/2 = 256$ Möglichkeiten.

Alternativ:

Die Aufgabe kann auch so verstanden werden: In einem Code können alle Striche und alle Lücken vertauscht werden. Dann lassen sich die Möglichkeiten aufzählen.

Striche

breit	schmal
5	0
4	1
3	2
2	3
1	4
0	5

Lücken

breit	schmal
4	0
3	1
2	2
1	3
0	4

Also sind es $5 \cdot 6 = 30$ Möglichkeiten.

(c) Mit jedem Strich oder jeder Lücke, die dazukommt, erhalten wir 2 mal mehr Kombinationen. Deshalb muss gelten:

$$2^n = 26 + 10$$

Wir lösen diese Gleichung

$$\begin{array}{rcll} 2^n & = & 36 & \mid \quad \log \\ n \cdot \log(2) & = & \log(36) & \mid \; : \log(2) \\ n & = & \frac{\log(36)}{\log(2)} = 5.1 & \end{array}$$

Es werden also 6 Striche und Lücken benötigt (das wären 3 Striche und 3 Lücken). Um den Strichcode abzuschliessen muss man noch einen Strich dazu fügen.

2. Tetraederwürfel (10) **705457**

Wir haben zwei Würfel mit nur 4 Seiten (Tetraederwürfel). Der eine ist rot, der andere schwarz. Ihre Augenzahlen sind 3, 4, 5, 6. Die unten liegende Augenzahl zählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Würfe mit den zwei Würfeln:

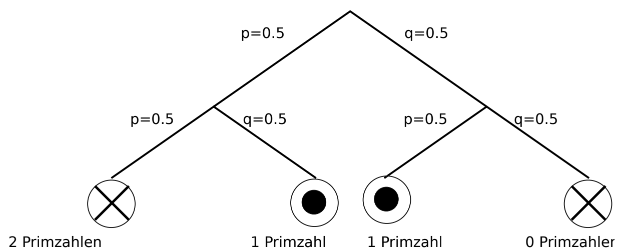
(a) genau ein Würfel liegt auf einer Primzahl

(b) die Summe der verdeckten Augenzahlen ist <14

(c) Berechnen Sie Erwartunswert und Varianz für die Summe der Augenzahlen bei 10 Würfen mit zwei Würfeln.

Lösung:

(a) Die Primzahlen sind 3 und 5. Jeder Würfel hat die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ auf einer Primzahl zu liegen.



Es gibt 2 Möglichkeiten 1 Primzahl zu würfeln mit 2 Würfeln. Die gesamte Wahrscheinlichkeit ist

$$P = 2 \cdot (0.5)^2 = 0.5$$

(b) Die Augenzahlen sind höchstens 12, also ist $P(X < 14)$ ein sicheres Ereignis und $P = 1$.

(c) Der Erwartunswert (für einen Würfel) ist

$$\mu = \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 6 = 4.5$$

und die Varianz

$$\sigma^2 = \frac{1}{4} \cdot (3-4.5)^2 + \frac{1}{4} \cdot (4-4.5)^2 + \frac{1}{4} \cdot (5-4.5)^2 + \frac{1}{4} \cdot (6-4.5)^2 = \frac{1}{4}(2.25+0.25+0.25+2.25) = 1.25 \,.$$

Es gibt zwei Möglichkeiten, den Aufgabentext zu interpretieren, entweder als Erwartungswert und Varianz eines Wurfes mit zwei Würfeln oder als Erwartungswert und Varianz der Gesammtpunktzahl bei 10 Würfen mit Würfeln.

i. (hier ist die Angagabe, dass 10 Würfe gemacht werden nicht relevant). Der Erwartungswert ist

$$\mu_t = 2\mu = 9$$

und die Varianz

$$\sigma_t^2 = 2\sigma^2 = 2.5$$

ii. Insgesamt fallen 20 Würfel. Der Erwartungswert ist

$$\mu_t = 20\mu = 90$$

und die Varianz

$$\sigma_t^2 = 2\sigma^2 = 25$$

3. Zwei mal 6 würfeln (10) 973422

Bei dieser Aufgabe würfeln wir mit einem Würfel so lange bis wir erfolgeich sind, das heisst bis wir insgesamt zwei Mal eine 6 gewürfelt haben. Wir notieren jeweils, wie viele Würfe nötig sind um zwei mal 6 zu würfeln. Für 12 Spiele ergibt sich die Statistik:

Würfe	7	8	10	11	12	13	14	16	18	20	21	22	25	32
Häufigkeit	1	1	1	2	1	2	4	1	1	1	1	2	1	1

Stichprobenraum:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Berechnen Sie die angegebenen Grössen und erstellen Sie einen Box-und-Whisker Plot für die Daten.

- Median
- Quartile $Q_{0.25}$ und $Q_{0.75}$.
- Aussreissergrenzen.

Lösung:

- Wir nummerieren die Datenpunkte einzeln, d.h. mit den Indizes 1 bis 20. Wir haben eine gerade Anzahl von Datenpunkten. Also

$$\tilde{x} = \frac{1}{2} \cdot [x_{10} + x_{11}] = \frac{1}{2} \cdot [14 + 14] = 14$$

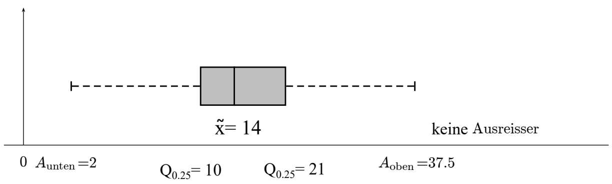
- $Q_{0.25} = x_5 = 10$ und $Q_{0.75} = x_{15} = 21$. (Auch $Q_{0.25} = x_5 = 11$ und $Q_{0.75} = x_{15} = 20$ zählen als richtig.)
- Die Aussreissergrenzen berechnen sich wie folgt:

$$d_Q = Q_{0.75} - Q_{0.25} = 11$$

also

$$A_{\mathrm{u}} = -6.5 \text{ und } A_{\mathrm{o}} = 37.5$$

Die negative Aussreissergrenze setzen wir auf das Minimum $A_{\mathrm{u}} = 2$.



4. Zwei mal 6 würfeln II (10) 872178

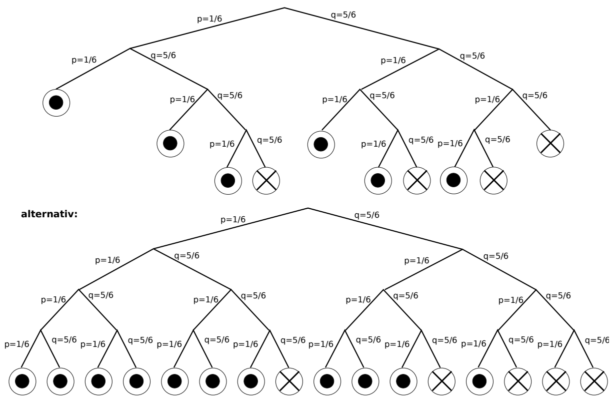
Bei dieser Aufgabe würfeln wir mit einem Würfel so lange bis wir erfolgeich sind, das heisst hier bis wir insgesamt zwei Mal eine 6 gewürfelt haben.
Stichprobenraum:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(a) Zeichnen Sie den Ereignisbaum für maximal 4 Würfe. Benutzen die angegebenen Codes in der Zeichnung (erfolgreiches Spiel/nicht erfolgreiches Spiel, Wahrscheinlichkeiten p und q bei den Verzweigungen).

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel bei maximal 4 Würfen erfolgreich ist?

Lösung:



Es gibt drei Typen von erfolgreichen Ästen:

- 0 Misserfolge: $P_0 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0.0277778$, 1 Ast
- 1 Misserfolg: $P_1 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} = 0.0231481$, 2 Äste
- 2 Misserfolge: $P_2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0.0192901$, 3 Äste

Wir zählen die Wahrscheinlichkeiten der erfolgreichen Äste zusammen und gewichten mit der Anzahl Äste

$$P = 1 \cdot 0.0277778 + 2 \cdot 0.0231481 + 3 \cdot 0.0192901 = 0.132$$

Alternativ kann das Spiel weiter gespielt werden, wenn schon zwei Treffer gemacht wurden und auch, wenn es unmöglich ist, zwei Treffer zu machen. Dieser Ereignisbaum ist auch angegeben. Die gesamt Wahrscheinlichkeit für zwei Treffer bleibt unverändert.

5. Qualitätskontrolle (10) **936390**

Ein Computerhersteller will eine neue Bestückungsmaschine für Platinen kaufen. Die Ausschussrate soll höchstens 5 % sein. Zur Kontrolle wird ein Probelauf mit 20 Platinen durchgeführt. Sind mehr als k Platinen fehlerhaft bestückt, so muss die Produktion gestoppt und kostenfrei nachgebessert werden.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man bei einer tatsächlichen Ausschussrate von 5 % höchstens 3 fehlerhafte Platinen?

(b) Wie muss die Zahl k gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für einen Produktionsstopp trotz ausreichender Ausschussrate kleiner als 10 % ist?

Lösung:

fehlerhaft k	0	1	2	3	4	5	6
P_k	0.358	0.377	0.189	0.06	0.013	0.002	0.
$\sum_{i=0}^{k} P_i$	0.358	0.736	0.925	0.984	0.997	1.	1.

(a) Wir addieren die Wahrscheinlihckeiten für 0, 1, 2 und 3 fehlerhafte Platinen (Binomial-Verteilung, $n = 20$, $p = 0.05$, kann z.B. mit Excel berechnet werden):

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= 0.358 + 0.377 + 0.189 + 0.0596 = 0.984 \end{aligned}$$

Das heisst bei einer Ausschussrate von 5 % deckt $k = 3$ (abschalten nur bei mehr als 3 fehlerhaften Platinen) 98.4 % der Fälle ab, und nur in 1.6 % der Fälle wird die Maschine abgescchaltet, obwohl die Ausschussrate bei 5 % liegt.

(b) Wir rechnen mit der Gegenwahrscheinlichkeit: k soll so gewählt werden, dass wir mindestens 90 % der Fälle abdecken. Aus der Tabelle lesen wir heraus, dass dies bei $k = 2$ gegeben ist: $\sum_{i=0}^{2} P_i = 0.925$.